CENGAGE Learning

Cálculo de una variable

Trascendentes tempranas

7E

JAMES STEWART

CÁLCULO

DE UNA VARIABLE

TRASCENDENTES TEMPRANAS

SÉPTIMA EDICIÓN

CÁLCULO

DE UNA VARIABLE

TRASCENDENTES TEMPRANAS

SÉPTIMA EDICIÓN

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY

Y

UNIVERSITY OF TORONTO

Traducción
María del Carmen Rodríguez Pedroza

Revisión técnica
Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional en Ingeniería y Tecnologías Aplicadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

Dr. Abel Flores Amado
Coordinador de la materia de Cálculo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Puebla

Mtro. Gustavo Zamorano Montiel
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla

CENGAGE Learning

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning

Cálculo de una variable
Trascendentes tempranas
Séptima edición
James Stewart

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica
Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español
Pilar Hernández Santamarina

Coordinador de Manufactura
Rafael Pérez González

Editores
Sergio Cervantes González
Gloria Luz Olguín Sarmiento

Diseño de portada
Irene Morris

Imagen de portada
Irene Morris

Composición tipográfica
6Ns

© D.R. 2012 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse, a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información, a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro *Calculus. Single variable. Early trascendentals.* Seventh Edition.
James Stewart
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning ©2012
ISBN: 978-0-538-49867-8

Datos para catalogación bibliográfica
Stewart James
Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas.
Séptima edición
ISBN: 978-607-481-881-9

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

A Bill Ralph y Bruce Thompson

Contenido

Prefacio xiii

Al estudiante xxv

Exámenes de diagnóstico xxvii

UN PREVIO DE CÁLCULO 1

1 Funciones y modelos 9

1.1 Cuatro maneras de representar una función 10

1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales 23

1.3 Nuevas funciones a partir de funciones viejas 36

1.4 Calculadoras graficadoras y computadoras 44

1.5 Funciones exponenciales 51

1.6 Funciones inversas y logaritmos 58

Repaso 72

Principios para la resolución de problemas 75

2 Límites y derivadas 81

2.1 Problemas de la tangente y la velocidad 82

2.2 Límite de una función 87

2.3 Cálculo de límites usando las leyes de los límites 99

2.4 La definición precisa de límite 108

2.5 Continuidad 118

2.6 Límites al infinito, asíntotas horizontales 130

2.7 Derivadas y razones de cambio 143

Redacción de proyecto ▪ Primeros métodos para encontrar tangentes 153

2.8 La derivada como una función 154

Repaso 165

Problemas adicionales 170

3 Reglas de derivación 173

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales 174

Proyecto de aplicación ▪ Construcción de una montaña rusa 184

3.2 Reglas del producto y el cociente 184

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas 191

3.4 Regla de la cadena 198

Proyecto de aplicación ▪ ¿Dónde debería un piloto iniciar el aterrizaje? 208

3.5 Derivación implícita 209

Proyecto de laboratorio ▪ Familias de curvas implícitas 217

3.6 Derivadas de funciones logarítmicas 218

3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales 224

3.8 Crecimiento y decaimiento exponenciales 237

3.9 Razones relacionadas 244

3.10 Aproximaciones lineales y diferenciales 250

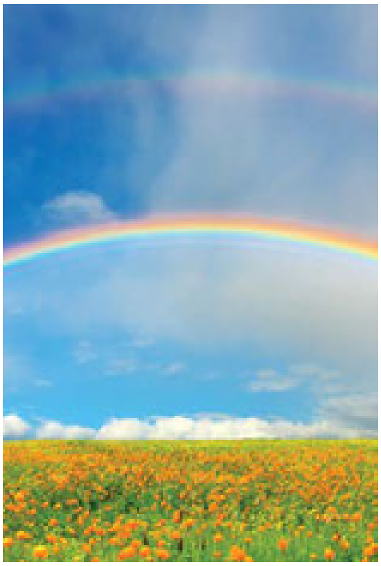
Proyecto de laboratorio ▪ Polinomios de Taylor 256

3.11 Funciones hiperbólicas 257

Repaso 264

Problemas adicionales 268

4 Aplicaciones de la derivada 273



4.1 Valores máximos y mínimos 274

Proyecto de aplicación ▪ Cálculo de arcoíris 282

4.2 Teorema del valor medio 284

4.3 Cómo afecta la derivada la forma de una gráfica 290

4.4 Formas indeterminadas y regla de l'Hospital 301

Redacción de proyecto ▪ Los orígenes de la regla de l'Hospital 310

4.5 Resumen de trazado de curvas 310

4.6 Graficación con cálculo y calculadoras 318

4.7 Problemas de optimización 325

Proyecto de aplicación ▪ La forma de una lata 337

4.8 El método de Newton 338

4.9 Antiderivadas 344

Repaso 351

Problemas adicionales 355

5 Integrales 359

5.1 Áreas y distancias 360

5.2 La integral definida 371

Proyecto para un descubrimiento ▪ Funciones área 385

5.3 Teorema fundamental del cálculo 386

5.4 Integrales indefinidas y el teorema del cambio neto 397

Redacción de proyecto ▪ Newton, Leibniz y la invención del cálculo 406

5.5 Regla de sustitución 407

Repaso 415

Problemas adicionales 419

6 Aplicaciones de la integración 421

6.1 Áreas entre curvas 422

Proyecto de aplicación ▪ El índice Gini 429

6.2 Volúmenes 430

6.3 Volúmenes mediante cascarones cilíndricos 441

6.4 Trabajo 446

6.5 Valor promedio de una función 451

Proyecto de aplicación ▪ El cálculo y el beisbol 455

Proyecto de aplicación ▪ Dónde sentarse en el cine 456

Repaso 457

Problemas adicinales 459

7 Técnicas de integración 463

7.1 Integración por partes 464

7.2 Integrales trigonométricas 471

7.3 Sustitución trigonométrica 478

7.4 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales 484

7.5 Estrategias para la integración 494

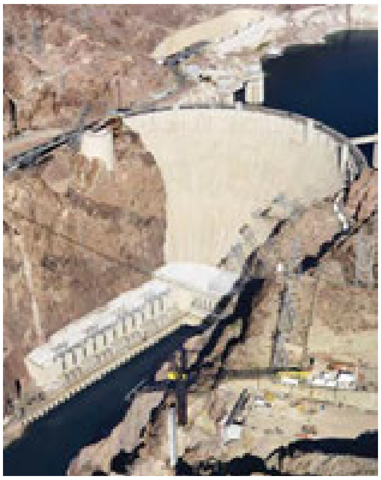
7.6 Integración utilizando tablas y sistemas algebraicos computarizados 500

Proyecto para un descubrimiento ▪ Patrones en integrales 505

7.7 Integración aproximada 506
7.8 Integrales impropias 519
Repaso 529

Problemas adicionales 533

8 Aplicaciones adicionales de la integración 537



8.1 Longitud de arco 538
Proyecto para un descubrimiento ▪ Concurso de la longitud de arco 545
8.2 Área de una superficie de revolución 545
Proyecto para un descubrimiento ▪ Rotación sobre una pendiente 551
8.3 Aplicaciones a la física y a la ingeniería 552
Proyecto para un descubrimiento ▪ Tazas de café complementarias 562
8.4 Aplicaciones a la economía y a la biología 563
8.5 Probabilidad 568
Repaso 575

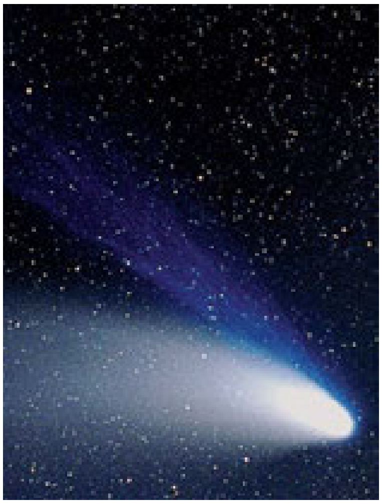
Problemas adicionales 577

9 Ecuaciones diferenciales 579

9.1 Modelado con ecuaciones diferenciales 580
9.2 Campos direccionales y método de Euler 585
9.3 Ecuaciones separables 594
Proyecto de aplicación ▪ ¿Qué tan rápido drena un tanque? 603
Proyecto de aplicación ▪ ¿Qué es más rápido, subir o bajar? 604
9.4 Modelos de crecimiento poblacional 605
9.5 Ecuaciones lineales 616
9.6 Sistemas depredador-presa 622
Repaso 629

Problemas adicionales 633

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares 635



10.1 Curvas definidas por medio de ecuaciones paramétricas 636

Proyecto de laboratorio ▪ Circunferencias que corren alrededor de circunferencias 644

10.2 Cálculo con curvas paramétricas 645

Proyecto de laboratorio ▪ Curvas de Bézier 653

10.3 Coordenadas polares 654

Proyecto de laboratorio ▪ Familias de curvas polares 664

10.4 Áreas y longitudes en coordenadas polares 665

10.5 Secciones cónicas 670

10.6 Secciones cónicas en coordenadas polares 678

Repaso 685

Problemas adicionales 688

11 Sucesiones y series infinitas 689

11.1 Sucesiones 690

Proyecto de laboratorio ▪ Sucesiones logísticas 703

11.2 Series 703

11.3 La prueba de la integral y estimación de sumas 714

11.4 Pruebas por comparación 722

11.5 Series alternantes 727

11.6 Convergencia absoluta y las pruebas de la razón y la raíz 732

11.7 Estrategia para probar series 739

11.8 Series de potencias 741

11.9 Representación de las funciones como series de potencias 746

11.10 Series de Taylor y de Maclaurin 753

Proyecto de laboratorio ▪ Un límite escurridizo 767

Redacción de proyecto ▪ Cómo descubrió Newton la serie binomial 767

11.11 Aplicaciones de los polinomios de Taylor 768

Proyecto de aplicación ▪ Radiación proveniente de las estrellas 777

Repaso 778

Problemas adicionales 781

Apéndices A1

A Números, desigualdades y valores absolutos A2
B Geometría de coordenadas y rectas A10
C Gráficas de ecuaciones de segundo grado A16
D Trigonometría A24
E Notación sigma A34
F Demostración de teoremas A39
G El logaritmo definido como una integral A48
H Números complejos A55
I Respuestas a ejercicios de número impar A63

Índice A115

Prefacio

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero siempre hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. El problema puede ser modesto, pero si desafía su curiosidad y pone en juego sus facultades inventivas para resolverlo por sus propios medios, usted puede experimentar la emoción y disfrutar el triunfo del descubrimiento.
>
> GEORGE POLYA

El arte de la enseñanza, dijo Mark Van Doren, es el arte de ayudar a descubrir. He intentado escribir un libro que ayude a los estudiantes a descubrir el Cálculo, tanto por su utilidad práctica como por su sorprendente belleza. En esta edición, como en las seis primeras ediciones, mi objetivo es mostrar a los estudiantes un sentido de la utilidad del cálculo y desarrollar en ellos una competencia técnica, pero también intento ilustrar la belleza intrínseca de la materia. Sin duda, Newton experimentó una sensación de triunfo cuando hizo sus grandes descubrimientos; es mi deseo que los estudiantes compartan un poco de esa sensación.

El énfasis está en la comprensión de los conceptos. Creo que casi todo el mundo está de acuerdo en que esta comprensión debe ser el objetivo principal de la enseñanza del Cálculo. De hecho, el impulso para la actual reforma en la enseñanza del Cálculo vino desde la Conferencia de Tulane en 1986, donde se formuló su primera recomendación:

Concentrarse en la comprensión de los conceptos

He intentado implementar este objetivo mediante la *regla de los tres*: "Los temas deben presentarse con enfoques geométricos, numéricos y algebraicos". La visualización, la experimentación numérica y gráfica y otros enfoques han modificado la manera en que se enseña el razonamiento conceptual. La regla de los tres se ha ampliado para convertirse en la *regla de los cuatro* al hacer hincapié en la verbalización y lo descriptivo.

En la redacción de la séptima edición me he propuesto lograr una comprensión conceptual y conservar aún lo mejor del Cálculo tradicional. El libro contiene elementos de la reforma, pero dentro del contexto de un currículo tradicional.

Versiones alternativas

He escrito otros libros de cálculo que podrían ser preferidos por algunos maestros. La mayoría de ellos también vienen en versiones de una variable y de varias variables.

- *Cálculo: Transcendentes tempranas*, séptima edición, versión híbrida, es similar al presente libro en contenido y cobertura salvo que todos los ejercicios de la sección están disponibles sólo en Enhanced WebAssign. El texto impreso incluye un repaso de todo el material al final de capítulo.

- *Cálculo*, séptima edición, es similar al presente libro de texto excepto que las funciones trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales se tratan en un segundo semestre.

- *Cálculo*, séptima edición, versión híbrida, es similar a *Cálculo*, séptima edición, en contenido y cobertura, salvo que todos los ejercicios al final de la sección están disponibles sólo en Enhanced WebAssign. El texto impreso incluye un repaso de todo el material al final del capítulo.

- *Cálculo esencial* es un libro mucho más breve (800 páginas), aunque contiene casi todos los temas de *Cálculo*, séptima edición. La relativa brevedad se logra a través de una exposición más concreta de algunos temas y poniendo algunas características en el sitio web.

- *Cálculo esencial: transcendentes tempranas* se asemeja *a Cálculo esencial*, sólo que las funciones trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas se tratan en el capítulo 3.

- *Cálculo: conceptos y contextos*, cuarta edición, destaca la comprensión conceptual aún más fuertemente que este libro. La cobertura de temas no es enciclopédica y el material sobre funciones trascendentes y ecuaciones paramétricas es tejido a lo largo del libro en lugar de ser tratadas en capítulos separados.

- *Cálculo: primeros vectores* introduce los vectores y las funciones vectoriales en un primer semestre y las integra en todo el libro. Es adecuado para los estudiantes que toman cursos de ingeniería y física simultáneamente con el de Cálculo.

- *Cálculo aplicado abreviado* está destinado a estudiantes de negocios, ciencias sociales y ciencias de la vida.

¿Qué hay de nuevo en la séptima edición?

Los cambios han sido resultado de los comentarios de mis colegas y estudiantes de la Universidad de Toronto y de la lectura de diarios, así como de las sugerencias de los usuarios y los revisores. Éstas son algunas de las muchas mejoras que he incorporado en esta edición.

- Parte del material ha sido reescrito para mayor claridad o mejor motivación. Véase, por ejemplo, la introducción al tema de valores máximos y mínimos en la página 274 y la introducción a las series en la página 703.

- Se han agregado nuevos ejemplos, y las soluciones a algunos de los ejemplos existentes han sido ampliadas. Un caso puntual: he añadido detalles para la solución del ejemplo 2.3.11 porque cuando enseño la sección 2.3 de la sexta edición me he dado cuenta de que los estudiantes necesitan más orientación cuando se configuran las desigualdades para el teorema de la compresión.

- El programa de arte ha sido renovado: se han incorporado nuevas figuras y un porcentaje importante de las actuales figuras han sido redibujadas.

- Se han actualizado los datos de ejemplos y ejercicios para ser más pertinentes.

- Se han agregado tres nuevos proyectos: *El índice Gini* (página 429) explora cómo medir la distribución del ingreso entre los habitantes de un país y es una atractiva aplicación del tema de área entre curvas. (Agradezco a Klaus Volpert por sugerir este proyecto.) En *Familias de curvas implícitas* (página 217) se investigan variadas formas cambiantes de curvas definidas implícitamente como parámetros en una familia. Las *familias de curvas polares* (página 664) exhiben las fascinantes formas de curvas polares y cómo evolucionan en el contexto de una familia.

- Más de 25% de los ejercicios de cada capítulo son nuevos. Éstos son algunos de mis favoritos: 1.6.58, 2.6.51, 2.8.13-14, 3.3.56, 3.4.67, 3.5.69-72, 3.7.22, 4.3.86, 5.2.51-53, 6.4.30, 11.2.49-50 y 11.10.71-72.

Mejoras tecnológicas

- Los medios de comunicación y tecnología para apoyar el texto se han mejorado para dar a los profesores mayor control sobre su curso, proporcionar ayuda adicional para hacer frente a los diversos niveles de preparación de los estudiantes del curso de Cálculo y fortalecer el apoyo para la comprensión conceptual. Las características del nuevo Enhanced WebAssign incluyen un Cengage YouBook personalizado, un repaso *Just in Time,* un *Show your Work*, un Evaluador de respuestas, un Plan de estudio personalizado, Master Its, solución en videos, videoclips de conferencias (con preguntas asociadas) y un *Visualizing Calculus* (animaciones TEC con preguntas asociadas) que se han desarrollado para facilitar el mejor aprendizaje de los estudiantes y hacer flexible el trabajo docente en el aula.
- El TEC (*Herramientas para Enriquecer el Cálculo*) ha sido completamente rediseñado y está disponible en Enhanced WebAssign, CourseMate y PowerLecture. Selected Visuals y Modules están disponibles en www.stewartcalculus.com.

Características

EJERCICIOS CONCEPTUALES

La manera más importante de fomentar la comprensión conceptual es a través de los problemas que proponemos. Para ello he ideado varios tipos de problemas. Algunos conjuntos de ejercicios comienzan solicitando la explicación del significado de los conceptos básicos de la sección. (Véase, por ejemplo, los primeros ejercicios en 2.2, 2.5 y 11.2.) Del mismo modo, todas las secciones de repaso comienzan con una verificación de conceptos y un Examen rápido Verdadero-Falso. Los ejercicios de verificación de comprensión conceptual a través de gráficos o tablas se ven en los ejercicios 2.7.17, 2.8.35-40, 2.8.43-46, 9.1.11-13, 10.1.24-27 y 11.10.2.

Otro tipo de ejercicio donde se utiliza la descripción verbal para verificar la comprensión conceptual está en los ejercicios 2.5.10, 2.8.58, 4.3.63-64 y 7.8.67. Considero de valor especial los problemas que combinan y comparan los enfoques numéricos, gráficos y algebraicos (ver ejercicios 2.6.39-40, 3.7.27 y 9.4.2).

CONJUNTOS DE EJERCICIOS CALIFICADOS

Cada conjunto de ejercicios es cuidadosamente calificado, progresando desde ejercicios conceptuales básicos y problemas para el desarrollo de habilidades hasta problemas más desafiantes de aplicaciones y demostraciones.

DATOS DEL MUNDO REAL

Mis ayudantes y yo hemos pasado mucho tiempo buscando en bibliotecas, poniéndonos en contacto con empresas y organismos gubernamentales, y buscando información en internet con el fin de presentar, motivar e ilustrar los conceptos del Cálculo a partir de datos del mundo real. Como resultado, muchos de los ejemplos y ejercicios se tratan con funciones definidas por estos datos numéricos o gráficos. Véase, por ejemplo, la figura 1 en la sección 1.1 (sismogramas del terremoto de Northridge), ejercicio 2.8.36 (porcentaje de la población menor de 18 años), ejercicio 5.1.16 (velocidad del transbordador espacial Endeavour) y la figura 4 en la sección 5.4 (consumo de energía de San Francisco).

PROYECTOS

Una manera de interesar y activar a los estudiantes es hacerlos trabajar (quizás en grupos) en proyectos extendidos que den la sensación de triunfo al obtener un logro sustancial una vez finalizados. He incluido cuatro tipos de proyectos: *proyectos de aplicación* que involucran aplicaciones diseñadas para apelar a la imaginación de los estudiantes. El proyecto posterior a la sección 9.3 pregunta si una pelota lanzada verticalmente hacia arriba tarda más tiempo en llegar a su altura máxima o en volver a su altura original. (La respuesta

podría sorprenderle.) En la siguiente sección, 10.2, se muestra cómo utilizar las curvas de Bézier en el diseño de formas que representan letras para una impresora láser. La *redacción de proyectos* pide a los estudiantes comparar métodos actuales con los de los fundadores del Cálculo, por ejemplo, el método de Fermat para encontrar rectas tangentes; para esto se sugieren referencias. Los *proyectos para un descubrimiento* anticipan resultados que se analizan más adelante o fomentan el descubrimiento a través del reconocimiento de patrones (véase la posterior a la sección 7.6). Otros proyectos se encuentran en la *Guía del instructor* (véase, por ejemplo, el grupo ejercicio 5.1: Posición a partir de muestras).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los estudiantes suelen tener dificultades con problemas para los que no existe algún procedimiento bien definido para obtener la respuesta. Creo que nadie ha mejorado mucho la estrategia de George Polya con sus cuatro etapas para resolver un problema, por lo que, en consecuencia, he incluido una versión de sus principios para resolver problemas después del capítulo 1. Estos principios, tanto explícita como implícitamente, se aplican en todo el libro. Después de los otros capítulos he colocado secciones llamadas *Problemas adicionales*, que incluyen ejemplos de cómo afrontar problemas difíciles de Cálculo. En la selección de los variados problemas para estas secciones tomé en cuenta el consejo de David Hilbert: "un problema matemático debe ser difícil para convencernos, pero no inaccesible como para frustrar nuestros esfuerzos". Cuando propongo estos desafiantes problemas en tareas y exámenes, los califico de manera diferente. Aquí premio significativamente a un estudiante por sus ideas y aportaciones orientadas hacia una solución y por reconocer cuáles principios de solución de problemas son relevantes.

TECNOLOGÍA

La disponibilidad de la tecnología no hace menos, sino más importante comprender claramente los conceptos que subyacen en las imágenes en la pantalla. Cuando se utilizan correctamente, las calculadoras y dispositivos de graficación son poderosas herramientas para analizar y comprender los conceptos. Este libro de texto puede utilizarse con o sin tecnología y empleo dos símbolos especiales para indicar claramente cuándo se requiere un tipo especial de máquina. El icono indica un ejercicio que definitivamente necesita de esta tecnología, pero no indica que no sea posible usarla en otros ejemplos. El símbolo SAC se utiliza para problemas que requieren todos los recursos de un sistema algebraico computarizado (Derive, Maple, Mathematica o la TI-89/92). A pesar de todo, la tecnología no deja obsoletos al lápiz y el papel. Con frecuencia son preferibles los cálculos y trazos hechos manualmente para ilustrar y reforzar algunos conceptos. Tanto profesores como estudiantes necesitan desarrollar la capacidad de decidir cuándo es apropiado trabajar a mano o con máquina.

HERRAMIENTAS PARA ENRIQUECER EL CÁLCULO

TEC es un acompañante de este libro de texto y está pensado para enriquecer y complementar su contenido (disponible desde internet en **www.stewartcalculus.com** y en Enhanced WebAssign y CourseMate). Desarrollado por Harvey Keynes, Dan Clegg, Hubert Hohn y por mí, TEC utiliza un enfoque exploratorio y de descubrimiento. En las secciones del libro donde la tecnología es particularmente apropiada, los iconos al margen dirigen a estudiantes hacia módulos TEC que proporcionan un entorno de laboratorio en el que puede explorar el tema de diferentes maneras y en distintos niveles. **Visual son animaciones de figuras en el texto; Module son actividades más elaboradas e incluyen ejercicios**. Los profesores pueden optar por participar en varios niveles diferentes, que van desde simplemente alentar a los estudiantes a usar Visual y Module para la exploración independiente, hasta asignar ejercicios específicos de los incluidos en Module, o a la creación de ejercicios adicionales, laboratorios y proyectos que hacen uso de Visual y Module.

TAREAS SUGERIDAS

Aquí se presentan tareas sugeridas en forma de preguntas y tratan de emular un asistente efectivo de enseñanza al funcionar como un discreto tutor. En cada sección del texto se incluyen sugerencias para los ejercicios representativos (normalmente impares), indicando en rojo el número del ejercicio. Los ejercicios están construidos de manera que no revelan más de la solución real de lo que es mínimo necesario para avanzar más y están disponibles a los estudiantes en stewartcalculus.com, CourseMate y Enhanced WebAssign.

ENHANCED WEBASSIGN La tecnología está teniendo impacto en la forma en que se asignan tereas a estudiantes, particularmente en grupos numerosos. El uso de tareas en línea es creciente y su interés depende de la facilidad de uso, calidad de calificación y confiabilidad. Con la séptima edición hemos estado trabajando con la comunidad de Cálculo y WebAssign para desarrollar un sistema más sólido de tareas en línea. Hasta 70% de los ejercicios de cada sección son asignables como tareas en línea, incluyendo respuestas libres, opción múltiple y otros varios formatos.

El sistema también incluye ejemplos activos, en los que los estudiantes son guiados paso a paso en tutoriales a través de ejemplos textuales, con enlaces al libro de texto y a las soluciones en video. Las nuevas mejoras al sistema incluyen un eBook personalizable, una muestra de las características de su trabajo (*Show Your Work*), un repaso de prerrequisitos de precálculo (*Just in Time*), un editor de tareas mejorado (*Assignment Editor*) y un evaluador de respuestas (*Answer Evaluator*) que acepta respuestas matemáticamente equivalentes y permite la calificación de las tareas del mismo modo en que lo hace el profesor.

www.stewartcalculus.com Este sitio incluye lo siguiente:

- Tareas sugeridas
- Repaso de álgebra
- Mi calculadora miente y la computadora me dijo
- Historia de las matemáticas, con vínculos a los mejores sitios históricos
- Tópicos adicionales (complementados con conjuntos de ejercicios): series de Fourier, fórmulas para el término del residuo en la serie de Taylor, rotación de ejes
- Problemas archivados (ejercicios de práctica que aparecieron en las ediciones anteriores, junto con sus soluciones)
- Problemas de desafío (algunos de los problemas especiales que aparecieron en secciones de ediciones anteriores)
- Vínculos para tópicos particulares a recursos externos de la web
- Tools for Enriching Calculus (TEC), Module y Visual

Contenido

Exámenes de diagnóstico El libro comienza con cuatro exámenes de diagnóstico relacionados con álgebra básica, geometría analítica, funciones y trigonometría.

Un previo de Cálculo Se presenta una visión general del tema e incluye una lista de preguntas para motivar el estudio del cálculo.

1 Funciones y modelos Desde el principio, se hace hincapié en varias representaciones de las funciones: verbal, numérica, visual y algebraica. Una discusión de los modelos matemáticos conduce a una revisión de las funciones estándar, incluyendo las funciones exponenciales y logarítmicas, desde estos cuatro puntos de vista.

2 Límites y derivadas El material sobre límites está motivado por un debate previo sobre los problemas de la recta tangente y la velocidad. Los límites son tratados desde puntos de vista descriptivos, gráficos, numéricos y algebraicos. La sección 2.4, sobre la definición precisa ε-δ de un límite, es una sección opcional. Las secciones 2.7 y 2.8 tratan de derivadas (especialmente con funciones definidas gráfica y numéricamente) antes de estudiar las reglas de derivación en el capítulo 3. Aquí los ejemplos y ejercicios exploran los significados de derivadas en diversos contextos. Las derivadas de orden superior se presentan en sección 2.8.

3 Reglas de derivación Aquí se derivan todas las funciones básicas, incluyendo las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas. Cuando las derivadas se calculan en situaciones aplicadas, se pide a los estudiantes explicar su significado. En este capítulo se estudian el crecimiento y decaimiento exponencial.

4 Aplicaciones de la derivada

Los hechos básicos relativos a los valores extremos y a las formas de las curvas se deducen del teorema del valor medio. Las gráficas con tecnología hacen hincapié en la interacción entre el Cálculo y las calculadoras y el análisis de las familias de curvas. Se proporcionan algunos problemas importantes, incluyendo una explicación del porqué necesita levantar su cabeza 42° para ver la parte superior de un arcoíris.

5 Integrales

Los problemas del área y la distancia sirven para motivar el estudio de la integral definida, recurriendo a la notación sigma cada vez que sea necesario. (En el apéndice E se proporciona un tratamiento completo de la notación sigma.) Se enfatiza la explicación del significado de la integral en diversos contextos y en la estimación de sus valores en gráficas y tablas.

6 Aplicaciones de la integración

Aquí presento las aplicaciones de la integración —área, volumen, trabajo, valor promedio— que razonablemente pueden hacerse sin técnicas especializadas de integración. Se hace hincapié en métodos generales. El objetivo es que los estudiantes puedan dividir una cantidad en trozos pequeños, estimarla con sumas de Riemann, y reconocer su límite como una integral.

7 Técnicas de integración

Aquí se cubren los métodos estándar pero, por supuesto, el verdadero desafío es reconocer qué técnica se utiliza mejor en una situación dada. En consecuencia, en la sección 7.5 presento una estrategia para la integración. El uso de sistemas algebraicos computarizados se explica en la sección 7.6.

8 Aplicaciones adicionales de la integración

Aquí aparecen las aplicaciones de integración: área de una superficie y longitud de un arco, para las que es útil tener disponibles todas las técnicas de integración, así como aplicaciones a la biología, la economía y la física (fuerza hidrostática y centros de masa). También he incluido una sección de probabilidad. Aquí hay más aplicaciones de las que en realidad se pueden cubrir en un curso determinado, así que los profesores deben seleccionar las aplicaciones adecuadas para interesar a los estudiantes y a ellos mismos.

9 Ecuaciones diferenciales

El modelado es el tema que unifica este tratamiento preliminar de las ecuaciones diferenciales. Los campos direccionales y el método de Euler se estudian antes de resolver las ecuaciones lineales y separables de forma explícita, por lo que los enfoques cualitativos, numéricos y analíticos reciben igual consideración. Estos métodos se aplican a los modelos exponenciales, logísticos y otros para el estudio del crecimiento de la población. Las primeras cuatro o cinco secciones de este capítulo son una buena introducción a las ecuaciones diferenciales de primer orden. Una sección final opcional utiliza el modelo depredador-presa para ilustrar los sistemas de ecuaciones diferenciales.

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Este capítulo introduce las curvas paramétricas y polares y las aplicaciones del Cálculo en ellas. Las curvas paramétricas están bien adaptadas a los proyectos de laboratorio; los tres presentados involucran a familias de curvas y curvas de Bézier. Un breve tratamiento de las cónicas en coordenadas polares prepara el camino para las leyes de Kepler en el capítulo 13.

11 Sucesiones y series infinitas

Las pruebas de convergencia tienen justificaciones intuitivas (véase la página 714) así como demostraciones formales. Las estimaciones numéricas de sumas de series están basadas en cuál prueba se usó para demostrar una convergencia. El énfasis está en la serie y polinomios de Taylor y sus aplicaciones a la física. Las estimaciones de error incluyen los de dispositivos de graficación.

Material auxiliar

Cálculo. Trascendentes tempranas, séptima edición, se apoya en un conjunto completo de materiales auxiliares desarrollados bajo mi dirección. Cada parte se ha diseñado para mejorar la comprensión del estudiante y facilitar la enseñanza creativa. Con esta edición,

se han desarrollado nuevos medios y tecnologías que ayudan al estudiante a visualizar el cálculo y a los instructores a personalizar el contenido para mejorar la forma en que enseñan su curso. Las tablas en las páginas xxiii–xxiv describen cada uno de estos auxiliares.

Agradecimientos

Para la preparación de ésta y las anteriores ediciones he invertido mucho tiempo leyendo las opiniones (aunque a veces contradictorias) de un gran número de astutos revisores. Agradezco enormemente a todos ellos por el tiempo dedicado a la cuidadosa lectura y a la comprensión del enfoque adoptado. He aprendido algo de cada uno de ellos.

REVISORES DE LA SÉPTIMA EDICIÓN

Amy Austin, *Texas A&M University*
Anthony J. Bevelacqua, *University of North Dakota*
Zhen-Qing Chen, *University of Washington—Seattle*
Jenna Carpenter, *Louisiana Tech University*
Le Baron O. Ferguson, *University of California—Riverside*
Shari Harris, *John Wood Community College*
Amer Iqbal, *University of Washington—Seattle*
Akhtar Khan, *Rochester Institute of Technology*
Marianne Korten, *Kansas State University*
Joyce Longman, *Villanova University*
Richard Millspaugh, *University of North Dakota*
Lon H. Mitchell, *Virginia Commonwealth University*
Ho Kuen Ng, *San Jose State University*
Norma Ortiz-Robinson, *Virginia Commonwealth University*
Qin Sheng, *Baylor University*
Magdalena Toda, *Texas Tech University*
Ruth Trygstad, *Salt Lake Community College*
Klaus Volpert, *Villanova University*
Peiyong Wang, *Wayne State University*

REVISORES DE LA TECNOLOGÍA

Maria Andersen, *Muskegon Community College*
Eric Aurand, *Eastfield College*
Joy Becker, *University of Wisconsin–Stout*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Monica Brown, *University of Missouri–St. Louis*
Roxanne Byrne, *University of Colorado at Denver and Health Sciences Center*
Teri Christiansen, *University of Missouri–Columbia*
Bobby Dale Daniel, *Lamar University*
Jennifer Daniel, *Lamar University*
Andras Domokos, *California State University, Sacramento*
Timothy Flaherty, *Carnegie Mellon University*
Lee Gibson, *University of Louisville*
Jane Golden, *Hillsborough Community College*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Diane Hoffoss, *University of San Diego*
Lorraine Hughes, *Mississippi State University*
Jay Jahangiri, *Kent State University*
John Jernigan, *Community College of Philadelphia*
Brian Karasek, *South Mountain Community College*
Jason Kozinski, *University of Florida*
Carole Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Ken Kubota, *University of Kentucky*
John Mitchell, *Clark College*
Donald Paul, *Tulsa Community College*
Chad Pierson, *University of Minnesota, Duluth*
Lanita Presson, *University of Alabama in Huntsville*
Karin Reinhold, *State University of New York at Albany*
Thomas Riedel, *University of Louisville*
Christopher Schroeder, *Morehead State University*
Angela Sharp, *University of Minnesota, Duluth*
Patricia Shaw, *Mississippi State University*
Carl Spitznagel, *John Carroll University*
Mohammad Tabanjeh, *Virginia State University*
Capt. Koichi Takagi, *United States Naval Academy*
Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*
Roger Werbylo, *Pima Community College*
David Williams, *Clayton State University*
Zhuan Ye, *Northern Illinois University*

REVISORES DE EDICIONES ANTERIORES

B. D. Aggarwala, *University of Calgary*
John Alberghini, *Manchester Community College*
Michael Albert, *Carnegie-Mellon University*
Daniel Anderson, *University of Iowa*
Donna J. Bailey, *Northeast Missouri State University*
Wayne Barber, *Chemeketa Community College*
Marilyn Belkin, *Villanova University*
Neil Berger, *University of Illinois, Chicago*
David Berman, *University of New Orleans*
Richard Biggs, *University of Western Ontario*
Robert Blumenthal, *Oglethorpe University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Stephen W. Brady, *Wichita State University*
Michael Breen, *Tennessee Technological University*
Robert N. Bryan, *University of Western Ontario*
David Buchthal, *University of Akron*
Jorge Cassio, *Miami-Dade Community College*
Jack Ceder, *University of California, Santa Barbara*
Scott Chapman, *Trinity University*
James Choike, *Oklahoma State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Carl Cowen, *Purdue University*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Charles N. Curtis, *Missouri Southern State College*
Daniel Cyphert, *Armstrong State College*
Robert Dahlin
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Gregory J. Davis, *University of Wisconsin–Green Bay*
Elias Deeba, *University of Houston–Downtown*
Daniel DiMaria, *Suffolk Community College*
Seymour Ditor, *University of Western Ontario*
Greg Dresden, *Washington and Lee University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Kenn Dunn, *Dalhousie University*
Dennis Dunninger, *Michigan State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
David Ellis, *San Francisco State University*
John Ellison, *Grove City College*
Martin Erickson, *Truman State University*
Garret Etgen, *University of Houston*
Theodore G. Faticoni, *Fordham University*
Laurene V. Fausett, *Georgia Southern University*
Norman Feldman, *Sonoma State University*
Newman Fisher, *San Francisco State University*
José D. Flores, *The University of South Dakota*
William Francis, *Michigan Technological University*
James T. Franklin, *Valencia Community College, East*
Stanley Friedlander, *Bronx Community College*
Patrick Gallagher, *Columbia University–New York*
Paul Garrett, *University of Minnesota–Minneapolis*
Frederick Gass, *Miami University of Ohio*
Bruce Gilligan, *University of Regina*
Matthias K. Gobbert, *University of Maryland, Baltimore County*
Gerald Goff, *Oklahoma State University*
Stuart Goldenberg, *California Polytechnic State University*
John A. Graham, *Buckingham Browne & Nichols School*
Richard Grassl, *University of New Mexico*
Michael Gregory, *University of North Dakota*
Charles Groetsch, *University of Cincinnati*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Salim M. Haïdar, *Grand Valley State University*
D. W. Hall, *Michigan State University*
Robert L. Hall, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Howard B. Hamilton, *California State University, Sacramento*
Darel Hardy, *Colorado State University*
Gary W. Harrison, *College of Charleston*
Melvin Hausner, *New York University/Courant Institute*
Curtis Herink, *Mercer University*
Russell Herman, *University of North Carolina at Wilmington*
Allen Hesse, *Rochester Community College*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
James F. Hurley, *University of Connecticut*
Matthew A. Isom, *Arizona State University*
Gerald Janusz, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
John H. Jenkins, *Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott Campus*
Clement Jeske, *University of Wisconsin, Platteville*
Carl Jockusch, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
Jan E. H. Johansson, *University of Vermont*
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Zsuzsanna M. Kadas, *St. Michael's College*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
Matt Kaufman
Matthias Kawski, *Arizona State University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Virgil Kowalik, *Texas A&I University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Leonard Krop, *DePaul University*
Mark Krusemeyer, *Carleton College*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Christopher C. Leary, *State University of New York at Geneseo*
David Leeming, *University of Victoria*
Sam Lesseig, *Northeast Missouri State University*
Phil Locke, *University of Maine*
Joan McCarter, *Arizona State University*
Phil McCartney, *Northern Kentucky University*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Igor Malyshev, *San Jose State University*
Larry Mansfield, *Queens College*
Mary Martin, *Colgate University*
Nathaniel F. G. Martin, *University of Virginia*
Gerald Y. Matsumoto, *American River College*
Tom Metzger, *University of Pittsburgh*
Michael Montaño, *Riverside Community College*
Teri Jo Murphy, *University of Oklahoma*

Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Hussain S. Nur, *California State University, Fresno*
Wayne N. Palmer, *Utica College*
Vincent Panico, *University of the Pacific*
F. J. Papp, *University of Michigan–Dearborn*
Mike Penna, *Indiana University–Purdue University Indianapolis*
Mark Pinsky, *Northwestern University*
Lothar Redlin, *The Pennsylvania State University*
Joel W. Robbin, *University of Wisconsin–Madison*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*
E. Arthur Robinson, Jr., *The George Washington University*
Richard Rockwell, *Pacific Union College*
Rob Root, *Lafayette College*
Richard Ruedemann, *Arizona State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Richard St. Andre, *Central Michigan University*
Ricardo Salinas, *San Antonio College*
Robert Schmidt, *South Dakota State University*
Eric Schreiner, *Western Michigan University*
Mihr J. Shah, *Kent State University–Trumbull*
Theodore Shifrin, *University of Georgia*
Wayne Skrapek, *University of Saskatchewan*
Larry Small, *Los Angeles Pierce College*
Teresa Morgan Smith, *Blinn College*
William Smith, *University of North Carolina*
Donald W. Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Edward Spitznagel, *Washington University*
Joseph Stampfli, *Indiana University*
Kristin Stoley, *Blinn College*
M. B. Tavakoli, *Chaffey College*
Paul Xavier Uhlig, *St. Mary's University, San Antonio*
Stan Ver Nooy, *University of Oregon*
Andrei Verona, *California State University–Los Angeles*
Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*
William L. Walton, *McCallie School*
Jack Weiner, *University of Guelph*
Alan Weinstein, *University of California, Berkeley*
Theodore W. Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Steven Willard, *University of Alberta*
Robert Wilson, *University of Wisconsin–Madison*
Jerome Wolbert, *University of Michigan–Ann Arbor*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts, Boston*
Mary Wright, *Southern Illinois University–Carbondale*
Paul M. Wright, *Austin Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*

Además, me gustaría dar las gracias a Jordan Bell, George Bergman, Leon Gerber, Mary Pugh y Simon Smith por sus sugerencias; Al Shenk y Dennis Zill por su permiso para utilizar ejercicios de sus textos de cálculo; COMAP por su permiso para utilizar el material de los proyectos; George Bergman, David Bleecker. Dan Clegg, Victor Kaftal, Anthony Lam, Jamie Lawson, Ira Rosenholtz, Paul Sally, Lowell Smylie y Larry Wallen por sus ideas para los ejercicios; Dan Drucker por el proyecto del derby de rodillos; Thomas Banchoff, Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, Philip Straffin y Klaus Volpert por sus ideas para los proyectos; Dan Anderson, Dan Clegg, Jeff Cole, Dan Drucker y Barbara Frank por resolver los nuevos ejercicios y sugerir formas para mejorarlos; Marv Riedesel y Mary Johnson por su precisión en la corrección; y Jeff Cole y Dan Clegg por su cuidadosa preparación y corrección del manuscrito de respuesta.

Asimismo, doy las gracias a quienes han contribuido a pasadas ediciones: Ed Barbeau, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Bob Burton, David Cusick, Tom DiCiccio, Garret Etgen, Chris Fisher, Stuart Goldenberg, Arnold Good, Gene Hecht, Harvey Keynes, E.L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Emile LeBlanc, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Lothar Redlin, Carl Riehm, John Ringland, Peter Rosenthal, Doug Shaw, Dan Silver, Norton Starr, Saleem Watson, Alan Weinstein y Gail Wolkowicz.

También agradezco a Kathi Townes, Stephanie Kuhns y Rebekah Million of TECHarts por sus servicios de producción y al siguiente personal de Brooks/Cole: Cheryll Linthicum, gerente de proyecto de contenido; Liza Neustaetter, editor asistente; Maureen Ross, editor de medios; Sam Subity, gerente de medios de edición; Jennifer Jones, director de marketing; y Vernon Boes, director de arte. Todos han hecho un trabajo excepcional.

He sido muy afortunado de haber trabajado con algunos de los mejores en el negocio de la edición en Matemáticas durante las últimas tres décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst, Gary Ostedt, Bob Pirtle, Richard Stratton y ahora Liz Covello. Todos ellos han contribuido en gran medida al éxito de este libro.

JAMES STEWART

Asimismo, deseamos agradecer la valiosa colaboración de los profesores Dr. Ernesto Filio López de UPITA (IPN), M. en C. Manuel Robles Bernal, L.F.M. Luis Ángel Filio Rivera, de ESIME Zacatenco (IPN), M. en C. Lilia Quintos Vázquez, de ESIME Ticomán (IPN), Dr. Abel Flores Amado, del ITESM Campus Puebla y al Mtro. Gustavo Zamorano Montiel, de la UPAEP (Puebla), en la revisión de esta séptima edición en español.

Además agradecemos al Dr. Hugo Gustavo González Hernández, Director del Departamento de Ciencias y al Dr. Abel Flores Amado, Coordinador de la materia de Cálculo así como a los siguientes profesores del ITESM Campus Puebla por la confianza depositada en la obra *Cálculo Trascendentes tempranas* de Stewart y adoptarlo para sus cursos.

Dr. Juan José Gómez Diaz
Master Aida Ignacia Salazar C.
Master Álvaro Andrade Andrade
Master Jorge Luis Figueroa Ramírez
Dr. Juan Manuel Merlo
Dr. Julio César Ramírez San Juan
Master Luis Daniel Bravo

Atentamente,

Los Editores.

Auxiliares para instructores

Power Lecture

ISBN 0-8400-5421-1

Este DVD contiene todo el arte del texto en formatos de PowerPoint y jpeg, ecuaciones clave y tablas del texto completo predefinidas de conferencias en PowerPoint, una versión electrónica de la guía del instructor, un generador de soluciones, un software de pruebas ExamView, herramientas para enriquecer el cálculo (TEC), un video de instrucciones y un comando JoinIn sobre el contenido de TurningPoint.

Instructor's Guide

Por Douglas Show

ISBN 0-8400-5418-1

Cada sección del texto se analiza desde varios puntos de vista. La guía del instructor (Instructor's Guide) contiene tiempo sugerido de asignación, puntos a destacar, temas de debate del texto, materiales básicos para la clase, sugerencias para trabajo en taller y ejercicios de trabajo de grupo en una forma adecuada para su entrega y sugiere las asignaciones de tareas. Una versión electrónica de la guía del instructor está disponible en el DVD de PowerLecture.

Complete Solutions Manual

Single Variable Early Transcendentals

Por Daniel Anderson, Jeffery A. Cole y Daniel Drucker

ISBN 0-8400-4936-6

Contiene las soluciones detalladas de todos los ejercicios del texto.

Solution Builder

www.cengage.com/solutionbuilder

Esta base de datos en línea para el instructor ofrece soluciones muy elaboradas para todos los ejercicios en el texto. El generador de soluciones (Solution Builder) permite crear impresiones personalizadas de soluciones seguras (en formato PDF) que coinciden exactamente con los problemas asignados en clase.

Printed Test Bank

Por William Steven Harmon

ISBN 0-8400-5419-X

Contiene textos específicos de opción múltiple y exámenes de respuesta libre.

ExamView Testing

Crear, entregar y personalizar los exámenes en formatos impresos en línea con ExamView, permite una evaluación de fácil uso a través de un software tutorial. ExamView contiene cientos de elementos para exámenes de respuesta múltiple y libre. ExamView está disponible en el DVD de PowerLecture.

Auxiliares para instructores y estudiantes

Stewart Website

www.stewartcalculus.com

Contenido: *Tareas sugeridas* ■ *Repaso de álgebra* ■ *Temas adicionales* ■ *Ejercicios de simulación* ■ *Problemas de desafío* ■ *Enlaces web* ■ *Historia de las matemáticas* ■ *Herramientas para enriquecer el cálculo (TEC)*

TEC Tools for Enriching™ Calculus

Por James Stewart, Harvey Keynes, Dan Clegg y el desarrollador Hu Hohn

Herramientas para enriquecer el cálculo (TEC) funciona como una poderosa herramienta para instructores, así como un entorno tutorial en el que los estudiantes pueden explorar y revisar temas seleccionados. Los módulos de simulación en Flash en TEC incluyen instrucciones escritas y en audio de los conceptos y ejercicios. TEC está accesible en CourseMate, WebAssign y PowerLecture. Los elementos seleccionados en Visual y Module están disponibles en www.stewartcalculus.com.

Enhanced WebAssign

www.webassign.net

El sistema de distribución de tareas de WebAssign permite a los instructores entregar, recoger, calificar y elaborar listas a través de la web. Enhanced WebAssign para el Cálculo de *Stewart involucra ahora a los estudiantes en la revisión del contenido al comienzo del curso y al principio de cada sección así como en los conocimientos previos. Además, para los problemas seleccionados, los estudiantes pueden obtener ayuda adicional en forma de "mayor retroalimentación" (las respuestas) y soluciones en video.* ***Otras características clave incluyen:*** *miles de problemas del* Cálculo *de Stewart. Un personalizable Cengage YouBook, un plan de estudio personal, una muestra de su trabajo, un repaso en el momento, un evaluador de respuestas, módulos de animaciones y visualización del Cálculo, concursos, videos de conferencias (con preguntas asociadas) y mucho más.*

Cengage Customizable YouBook

YouBook es un eBook en Flash interactivo y personalizable, que tiene todo el contenido del Cálculo *de Stewart. Las características de YouBook son una herramienta de edición de texto que permite a los profesores modificar la narrativa del libro de texto según sea necesario. Con YouBook, los profesores pueden reordenar rápidamente capítulos y secciones enteras u ocultar cualquier contenido que no enseñan, para crear un libro electrónico que coincida perfectamente con su plan de estudios. Los profesores pueden personalizar aún más el texto añadiendo sus ideas o enlaces de video en YouTube. Los activos de medios adicionales incluyen: figuras animadas, videoclips, destacando notas y más. YouBook está disponible en Enhanced WebAssign.*

■ Electrónicos ■ Impresos

CourseMate **CourseMate**

www.cengagebrain.com

CourseMate es una perfecta herramienta de autoaprendizaje para estudiantes y no requiere ningún apoyo de los profesores. CourseMate trae conceptos con aprendizaje interactivo, estudio y herramientas interactivas para la preparación de exámenes que apoyan al libro de texto impreso. CourseMate para el Cálculo *de Stewart incluye: un libro electrónico interactivo, herramientas para enriquecer el cálculo, videos, cuestionarios, tarjetas en flash y más. Para los profesores, CourseMate incluye Engagement Tracker, una herramienta de primera en su tipo que supervisa el trabajo estudiantil.*

Maple CD-ROM

Maple proporciona un dispositivo avanzado de cálculo matemático de alto rendimiento plenamente integrado con símbolos numéricos, todos accesibles desde un entorno técnico desde WYSIWYG.

CengageBrain.com

Para accesos de materiales adicionales del curso y recursos de apoyo, por favor visite www.cengagebrain.com. En esta página busque por ISBN o por título (desde la cubierta posterior de su libro) usando el comando de búsqueda en la parte superior de la página. Esto le llevará a la página del producto donde se pueden encontrar gratuitamente recursos de apoyo.

Auxiliares para estudiantes

Student Solutions Manual

Single Variable Early Transcendentals

Por Daniel Anderson, Jeffery A. Cole y Daniel Drucker

ISBN 0-8400-4934-X

Proporciona soluciones completamente detalladas para todos los ejercicios impares en el texto, dando a los estudiantes una oportunidad de verificar sus respuestas y asegurar que hicieron los pasos correctos para llegar a una respuesta.

Study Guide

Single Variable Early Transcendentals

Por Richard St. Andre

ISBN 0-8400-5420-3

Para cada sección del texto, la guía de estudio proporciona a los estudiantes una breve introducción, una breve lista de conceptos al profesor así como resumen y preguntas de enfoque con respuestas explicadas. La guía de estudio también contiene preguntas "Tecnología Plus" y preguntas tipo examen de opción múltiple y de estilo "su propia respuesta".

CalcLabs with Maple

Single Variable

Por Philip B. Yasskin y Robert Lopez

ISBN 0-8400-5811-X

CalcLabs with Mathematica

Single Variable

Por Selwyn Hollis

ISBN 0-8400-5814-4

Cada uno de estos comprensibles manuales de laboratorio ayudará a los estudiantes a aprender a usar las herramientas de tecnología a su disposición. CalcLabs contienen ejercicios claramente explicados y una variedad de proyectos para acompañar el texto y laboratorios.

A Companion to Calculus

Por Dennis Ebersole, Doris Schattschneider, Alicia Sevilla y Kay Somers

ISBN 0-495-01124-X

Escrito para mejorar el álgebra y las habilidades para resolver problemas de los estudiantes que están tomando un curso de Cálculo. Cada capítulo de este acompañante tiene una clave referente a un tema de Cálculo, que proporciona antecedentes conceptuales y técnicas de álgebra específicos necesarios para comprender y resolver problemas de Cálculo relacionados con ese tema. Está diseñado para cursos de Cálculo que incluyen la revisión de los conceptos de precálculo o para uso individual.

Linear Algebra for Calculus

Por Konrad J. Heuvers, William P. Francis, John H. Kuisti, Deborah F. Lockhart, Daniel S. Moak y Gene M. Ortner

ISBN 0-534-25248-6

Este comprensible libro está diseñado para complementar el curso de Cálculo. Proporciona una introducción y un repaso de las ideas básicas del Álgebra lineal.

■ Electrónicos ■ Impresos

Al estudiante

Leer un libro de texto de Cálculo es diferente a la lectura de un periódico, una novela o incluso un libro de física. No se desaliente si tiene que leer un párrafo más de una vez para entenderlo. Debe tener lápiz, papel y calculadora disponibles para esbozar un diagrama o hacer un cálculo.

Algunos estudiantes comienzan por abordar sus problemas de tarea y leen el texto sólo si se bloquean en un ejercicio. Sugiero que un plan mucho mejor es leer y comprender una sección del texto antes de enfrentar los ejercicios. En particular, debe leer con cuidado las definiciones para ver el significado exacto de cada término. Antes de leer cada ejemplo, le sugiero que llegue a la solución tratando de resolver el problema usted mismo. Obtendrá mucho más que mirando la solución si es que lo hace.

Parte del objetivo de este curso es inducir el pensamiento lógico. Es muy importante aprender a escribir las soluciones de los ejercicios de una manera articulada, paso a paso, con comentarios explicativos, no sólo una cadena de ecuaciones o fórmulas desconectadas.

Las respuestas a los ejercicios de número impar aparecen al final del libro, en el apéndice I. Algunos ejercicios piden una explicación verbal, interpretación o descripción. En tales casos no hay una única forma correcta de expresar la respuesta, por lo que no se preocupe si no ha encontrado la respuesta definitiva. Además, a menudo hay varias formas diferentes para expresar una respuesta numérica o algebraica, así que si su respuesta aparenta ser diferente a la mía, no asuma inmediatamente que se equivocó. Por ejemplo, si la respuesta dada al final del libro es $\sqrt{2} - 1$ y usted obtuvo $1/(1 + \sqrt{2})$, entonces está usted en lo correcto y racionalizar el denominador demostrará que las respuestas son equivalentes.

El icono ▦ indica un ejercicio que sin duda requiere el uso de una calculadora graficadora o una computadora con software de gráficos (en la sección 1.4 se analiza el uso de estos dispositivos de graficación y algunas de las dificultades que puedan surgir). Sin embargo, esto no significa que los dispositivos de gráficos no puedan utilizarse para comprobar el trabajo de otros ejercicios. El símbolo SAC se reserva para problemas en los que se requieren todos los recursos

de un sistema algebraico computarizado (Derive, Maple, Mathematica o la TI-89/92). También se usará el símbolo ⊘ para cuidar que no se cometa un error. He puesto este símbolo en los márgenes en situaciones donde he advertido que gran parte de mis estudiantes tienden a cometer el mismo error.

Las *Herramientas para enriquecer el cálculo*, acompañantes de este texto, están indicadas por medio del símbolo **TEC** y están disponible en Enhanced WebAssign y en CourseMate (los recursos Visual y Module están disponibles en www.stewartcalculus.com). Aquí se dirige al estudiante a los módulos en los que puede explorar los aspectos del Cálculo para los que la computadora es particularmente útil.

En TEC también se encuentra *Tareas sugeridas* para ejercicios representativos que están indicados con número en rojo: **5.** Estas sugerencias pueden encontrarse en stewartcalculus.com así como en Enhanced WebAssign y CourseMate. Estas sugerencias de tareas hacen preguntas al estudiante que le permiten avanzar hacia una solución sin dar realmente la respuesta. Es necesario que el estudiante siga activamente cada pista con lápiz y papel a la mano para destacar los detalles. Si una sugerencia particular no permite resolver el problema, puede hacer clic para ver la siguiente sugerencia.

Le recomiendo que conserve este libro para fines de consulta después de terminar el curso. Es probable que olvide algunos de los detalles específicos del Cálculo, por lo que el libro servirá como una referencia útil cuando sea necesario utilizar el Cálculo en cursos posteriores. Puesto que este libro contiene más material del que es posible cubrir en todo un curso, también puede servir como un valioso recurso para un trabajo científico o de ingeniería.

El Cálculo es un tema apasionante, justamente considerado uno de los mayores logros del intelecto humano. Espero que el estudiante descubra que no sólo es útil, sino también intrínsecamente hermoso.

JAMES STEWART

Exámenes de diagnóstico

El éxito en Cálculo depende en gran medida del conocimiento de las matemáticas que le preceden: álgebra, geometría analítica, funciones y trigonometría. Los siguientes exámenes están destinados a diagnosticar las debilidades que el estudiante pueda tener en estas áreas. Después de cada examen puede verificar sus respuestas comparándolas con las respuestas determinadas y, si es necesario, actualizar sus habilidades haciendo referencia a los materiales de repaso que se proporcionan.

A Examen de diagnóstico: álgebra

1. Evalúe las siguientes expresiones sin utilizar calculadora:

a) $(-3)^4$ b) -3^4 c) 3^{-4}

d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique las siguientes expresiones. Escriba su respuesta sin exponentes negativos:

a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$

b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Desarrolle y simplifique las siguientes expresiones:

a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ b) $(x + 3)(4x - 5)$

c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ d) $(2x + 3)^2$

e) $(x + 2)^3$

4. Factorice las siguientes expresiones:

a) $4x^2 - 25$ b) $2x^2 + 5x - 12$

c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ d) $x^4 + 27x$

e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifique las siguientes expresiones racionales:

a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ b) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{2x + 1}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ d) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

6. Racionalice y simplifique las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ b) $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

7. Reescriba las siguientes expresiones completando un trinomio cuadrado perfecto.

a) $x^2 + x + 1$ b) $2x^2 - 12x + 11$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones (encuentre sólo las soluciones reales).

a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ b) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x}$

c) $x^2 - x - 12 = 0$ d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ f) $3|x-4| = 10$

g) $2x(4-x)^{-1/2} - 3\sqrt{4-x} = 0$

9. Resuelva las siguientes desigualdades y exprese la solución en intervalos:

a) $-4 < 5 - 3x \leqslant 17$ b) $x^2 < 2x + 8$

c) $x(x-1)(x+2) > 0$ d) $|x-4| < 3$

e) $\dfrac{2x-3}{x+1} \leqslant 1$

10. Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$ b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$ d) $\dfrac{1+TC}{C} = 1 + T$

e) $\dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ f) $\dfrac{1/x}{a/x - b/x} = \dfrac{1}{a-b}$

Respuestas al examen de diagnóstico A: álgebra

1. a) 81 b) -81 c) $\frac{1}{81}$
d) 25 e) $\frac{9}{4}$ f) $\frac{1}{8}$

2. a) $6\sqrt{2}$ b) $48a^5b^7$ c) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. a) $11x - 2$ b) $4x^2 + 7x - 15$
c) $a - b$ d) $4x^2 + 12x + 9$
e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4. a) $(2x-5)(2x+5)$ b) $(2x-3)(x+4)$
c) $(x-3)(x-2)(x+2)$ d) $x(x+3)(x^2-3x+9)$
e) $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$ f) $xy(x-2)(x+2)$

5. a) $\dfrac{x+2}{x-2}$ b) $\dfrac{x-1}{x-3}$
c) $\dfrac{1}{x-2}$ d) $-(x+y)$

6. a) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

7. a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ b) $2(x-3)^2 - 7$

8. a) 6 b) 1 c) $-3, 4$
d) $-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e) $\pm 1, \pm\sqrt{2}$ f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
g) $\frac{12}{5}$

9. a) $[-4, 3)$ b) $(-2, 4)$
c) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$ d) $(1, 7)$
e) $(-1, 4]$

10. a) Falsa b) Verdadera c) Falsa
d) Falsa e) Falsa f) Verdadera

Si tiene usted dificultades con este examen, puede consultar Review of Algebra (repaso de álgebra) en el sitio web www.stewartcalculus.com

B Examen de diagnóstico: geometría analítica

1. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(2, -5)$ y

a) tiene pendiente -3

b) es paralela al eje x

c) es paralela al eje y

d) es paralela a la recta $2x - 4y = 3$

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en $(-1, 4)$ y que pasa por el punto $(3, -2)$.

3. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

4. Sean $A(-7, 4)$ y $B(5, -12)$ puntos en el plano.

a) Encuentre la pendiente de la recta determinada por A y B.

b) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por A y B. ¿Cuáles son los puntos de intersección con los ejes?

c) Encuentre el punto medio del segmento AB.

d) Encuentre la longitud del segmento AB.

e) Encuentre la ecuación de la perpendicular que biseca a AB.

f) Encuentre la ecuación de la circunferencia para la que AB es diámetro.

5. Trace la región en el plano xy definida por la ecuación o desigualdades.

a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$

b) $|x| < 4$ y $|y| < 2$

c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$

d) $y \geqslant x^2 - 1$

e) $x^2 + y^2 < 4$

f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

Respuestas al examen de diagnóstico B: geometría analítica

1. a) $y = -3x + 1$ b) $y = -5$

c) $x = 2$ d) $y = \frac{1}{2}x - 6$

2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 52$

3. Centro $(3, -5)$, radio 5

4. a) $-\frac{4}{3}$

b) $4x + 3y + 16 = 0$; intersección en $x = -4$, intersección en $y = -\frac{16}{3}$

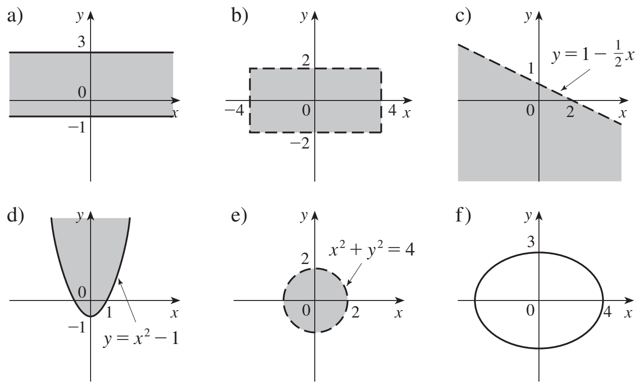
c) $(-1, -4)$

d) 20

e) $3x - 4y = 13$

f) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

5.



Si tiene usted dificultades con este examen, puede consultar el repaso de geometría analítica en los apéndices B y C.

C Examen de diagnóstico: funciones

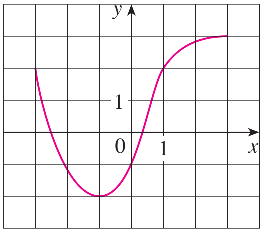


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. La gráfica de una función f está dada a la izquierda.
   a) Determine el valor de $f(-1)$.
   b) Estime el valor de $f(2)$.
   c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 2$?
   d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.
   e) Establezca el dominio y el rango de f.

2. Si $f(x) = x^3$, evalúe el cociente de diferencias $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ y simplifique su respuesta.

3. Encuentre el dominio de la función

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x - 2}$ b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

4. ¿Qué aspecto tiene cada una de las gráficas siguientes a partir de la gráfica de f?

a) $y = -f(x)$ b) $y = 2f(x) - 1$ c) $y = f(x-3) + 2$

5. Sin usar calculadora, haga un bosquejo de cada una de las gráficas siguientes:

a) $y = x^3$ b) $y = (x+1)^3$ c) $y = (x-2)^3 + 3$
d) $y = 4 - x^2$ e) $y = \sqrt{x}$ f) $y = 2\sqrt{x}$
g) $y = -2^x$ h) $y = 1 + x^{-1}$

6. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$.   b) Trace la gráfica de f

7. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 2x - 3$, encuentre cada una de las siguientes funciones:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $g \circ g \circ g$

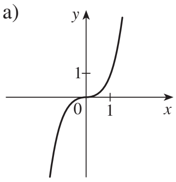
Respuestas al examen de diagnóstico C: funciones

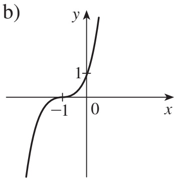
1. a) -2 b) 2.8
   c) $-3, 1$ d) $-2.5, 0.3$
   e) $[-3, 3], [-2, 3]$

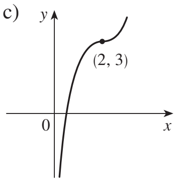
2. $12 + 6h + h^2$

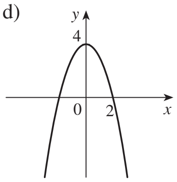
3. a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$
   b) $(-\infty, \infty)$
   c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

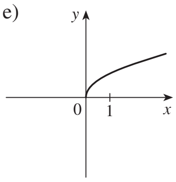
4. a) Reflexión respecto al eje x
   b) Alargamiento vertical en un factor de 2 y después un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo
   c) Desplazamiento de 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba

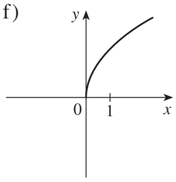
5. a)


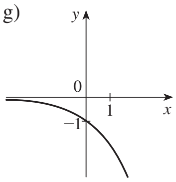
b)


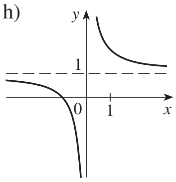
c)


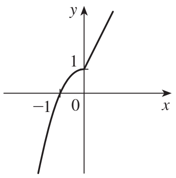
d)


e)


f)


g)


h)


6. a) $-3, 3$
   b)


7. a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
   b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
   c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

Si tiene usted dificultades con este examen, vea las secciones 1.1-1.3 de este libro

D Examen de diagnóstico: trigonometría

1. Convierta de grados a radianes.
a) 300° b) −18°

2. Convierta de radianes a grados.
a) $5\pi/6$ b) 2

3. Encuentre la longitud del arco de circunferencia de radio 12 cm si el arco subtiende un ángulo central de 30°.

4. Encuentre los valores exactos de:
a) $\tan(\pi/3)\tan(\pi/3)$ b) $\text{sen}(7\pi/6)$ c) $\sec(5\pi/3)$

5. Exprese las longitudes de a y b de la figura en términos de θ.

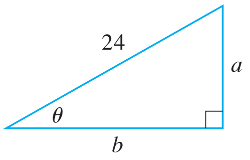


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

6. Si $\text{sen}\, x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x y y están entre 0 y $\pi/2$, evalúe $\text{sen}\,(x + y)$.

7. Demuestre las identidades:
a) $\tan\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta = \sec\theta$
b) $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \text{sen}\, 2x$

8. Encuentre todos los valores de x tales que $\text{sen}\, 2x = \text{sen}\, x$ y $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

9. Trace la gráfica de la función $y = 1 + \text{sen}\, 2x$ sin usar calculadora.

Respuestas al examen de diagnóstico D: trigonometría

1. a) $5\pi/3$ b) $-\pi/10$

2. a) 150° b) $360°/\pi \approx 114.6°$

3. 2π cm

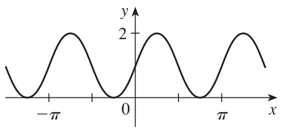
4. a) $\sqrt{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 2

5. a) $24\,\text{sen}\,\theta$ b) $24\cos\theta$

6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$

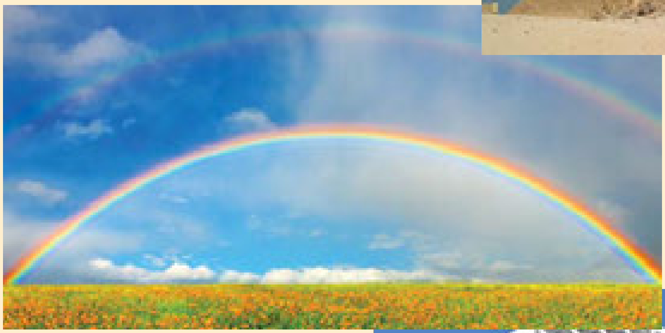
9.



Si tiene usted dificultades con este examen de diagnóstico, vea el apéndice D de este libro.

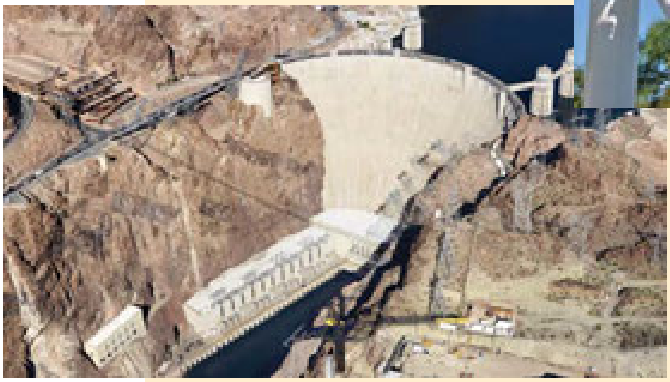
Un previo de Cálculo

© Ziga Camernik / Shutterstock


© Pichugin Dmitry / Shutterstock

Cuando termine este curso, podrá usted estimar el número de trabajadores necesarios para construir una pirámide, explicar la formación y ubicación del arcoíris, diseñar una montaña rusa para un viaje suave y calcular la fuerza sobre una presa.

© Brett Mulcahy / Shutterstock


© iofoto / Shutterstock

El Cálculo es fundamentalmente diferente de las matemáticas que ha estudiado anteriormente: el Cálculo es menos estático y más dinámico. Se ocupa de los cambios y el movimiento; estudia cantidades que se aproximan a otras cantidades. Por eso puede ser útil tener una visión general del tema antes de comenzar su estudio intensivo. Aquí damos un vistazo de algunas de las ideas principales del Cálculo, mostrando cómo surge el concepto de límite cuando intentamos resolver diversos problemas.

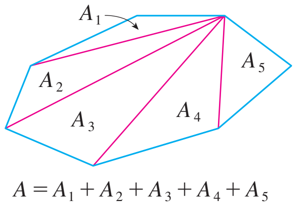


FIGURA 1

El problema del área

Los orígenes del cálculo se remontan a unos 2 500 años a los antiguos griegos, quienes calcularon áreas usando el "método de agotamiento". Los griegos sabían cómo encontrar el área de cualquier polígono al dividirlo en triángulos como se ve en la figura 1 y sumar las áreas de estos triángulos.

Un problema mucho más difícil es encontrar el área encerrada por una figura curvada. El método griego de agotamiento consistía en inscribir y circunscribir polígonos en la figura y a continuación aumentar el número de lados de los polígonos. La figura 2 ilustra este proceso para el caso especial de un círculo con polígonos regulares inscritos.

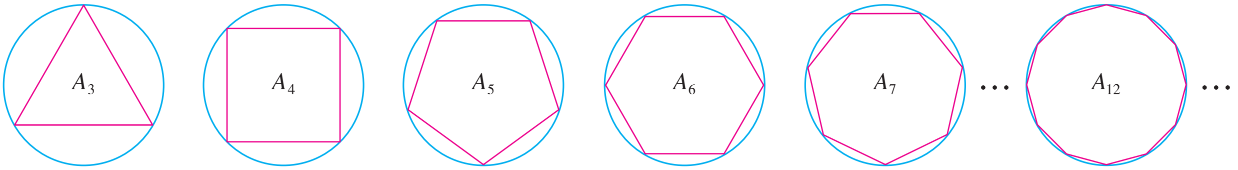


FIGURA 2

TEC En Preview Visual, puede ver cómo las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos se aproximan al área del círculo.

Sea A_n el área del polígono inscrito con n lados. A medida que aumenta n, el área A_n se parece cada vez más y más al área del círculo. Así, decimos que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos, y escribimos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Los griegos no utilizaron explícitamente el concepto de límite. Sin embargo, por razonamiento indirecto, Eudoxo (siglo V a.C.) utilizó la técnica de agotamiento para obtener la conocida fórmula para el área de un círculo: $A = \pi r^2$.

En el capítulo 5 utilizaremos una idea similar para encontrar las áreas de regiones del tipo que se muestra en la figura 3. Nos aproximaremos al área deseada por medio de áreas de rectángulos (como en la figura 4), disminuyendo el ancho de los rectángulos y luego calculando el área A como el límite de estas sumas de áreas de rectángulos.

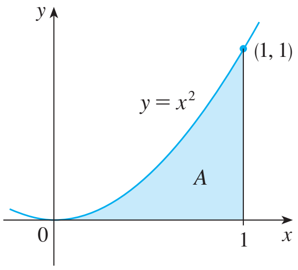


FIGURA 3

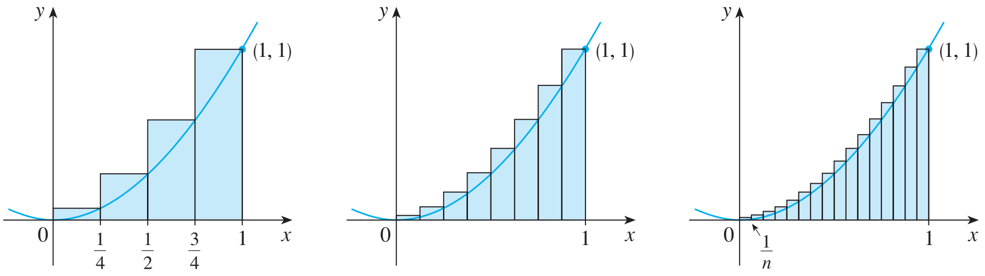


FIGURA 4

El problema del área es el problema central en la rama del Cálculo llamado *cálculo integral*. Las técnicas que vamos a desarrollar en el capítulo 5 para encontrar áreas también nos permitirán calcular el volumen de un sólido, la longitud de una curva, la fuerza de las aguas contra una presa, la masa y el centro de gravedad de una varilla y el trabajo realizado al bombear agua hacia afuera de un tanque.

El problema de la tangente

Considere el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente t a una curva con ecuación $y = f(x)$ en un punto dado P. (En el capítulo 2 daremos una definición precisa

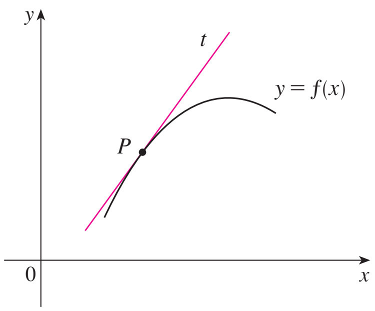


FIGURA 5
La recta tangente en P

de una recta tangente. Por ahora podemos considerarla como una recta que toca la curva en P como en la figura 5.) Como sabemos que el punto P se encuentra en la recta tangente, podemos encontrar la ecuación de t si sabemos su pendiente m. El problema es que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente y tenemos sólo un punto P de t. Para sortear el problema encontramos en primer lugar una aproximación a m tomando un punto cercano Q de la curva y calculamos la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. De la figura 6 vemos que

1
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

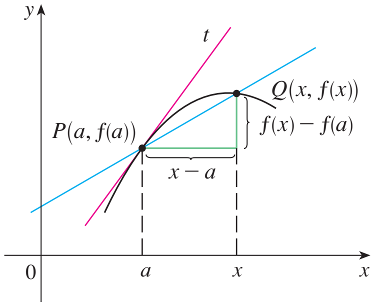


FIGURA 6
La recta secante PQ

Ahora imaginemos que Q se mueve a lo largo de la curva hacia P como en la figura 7. Puede ver que la recta secante gira y se acerca a la recta tangente como su posición límite. Esto significa que la pendiente m_{PQ} de la recta secante se acerca más y más a la pendiente m de la recta tangente. Escribimos

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

y decimos que m es el límite de m_{PQ} cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva. Puesto que x se aproxima a a cuando Q se aproxima a P, también podríamos utilizar la ecuación 1 para escribir

2
$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

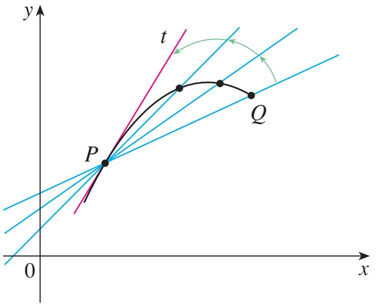


FIGURA 7
Recta secante aproximándose a la recta tangente

En el capítulo 2 veremos ejemplos específicos de este procedimiento.

El problema de la tangente ha dado lugar a la rama del cálculo llamada *cálculo diferencial*, inventada más de 2 000 años después que el cálculo integral. Las principales ideas detrás del cálculo diferencial se deben al matemático francés Pierre de Fermat (1601–1665) y fueron desarrolladas por los matemáticos ingleses John Wallis (1616–1703), Isaac Barrow (1630–1677) e Isaac Newton (1642–1727) y el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646–1716).

Las dos ramas de cálculo y sus principales problemas, el problema del área y el problema de la tangente, parecen ser muy diferentes, pero resulta que hay una conexión muy estrecha entre ellos. El problema de la tangente y el área son problemas inversos en un sentido que se describe en el capítulo 5.

Velocidad

Cuando miramos el velocímetro de un automóvil y leemos que se está desplazando a 48 mi/h, ¿qué información estamos obteniendo? Si la velocidad se mantiene constante, después de una hora nos habremos desplazado 48 mi. Pero, si varía la velocidad del coche, ¿qué significa decir que la velocidad en un instante dado es 48 mi/h?

A fin de analizar esta situación, examinemos el caso de un automóvil que viaja a lo largo de una carretera recta en el que suponemos que es posible medir la distancia recorrida por el vehículo (en pies) a intervalos de un segundo como se registra en la siguiente tabla:

t = Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distancia (pies)	0	2	9	24	42	71

Un primer paso para hallar la velocidad una vez que han transcurrido 2 segundos, es encontrar la velocidad promedio durante el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 4$:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$= \frac{42 - 9}{4 - 2}$$

$$= 16.5 \text{ pies/s}$$

Del mismo modo, la velocidad promedio en el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 3$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{24 - 9}{3 - 2} = 15 \text{ pies/s}$$

Tenemos la sensación de que la velocidad en el instante $t = 2$ no puede ser muy diferente de la velocidad promedio durante un corto intervalo de tiempo desde $t = 2$. Así que imaginemos que se ha medido la distancia recorrida en intervalos de tiempo de 0.1 segundo como se ve en la siguiente tabla:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	9.00	10.02	11.16	12.45	13.96	15.80

Entonces podemos calcular, por ejemplo, la velocidad promedio en el intervalo de tiempo [2, 2.5]:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{15.80 - 9.00}{2.5 - 2} = 13.6 \text{ pies/s}$$

Los resultados de estos cálculos se muestran en la siguiente tabla:

Intervalo de tiempo	[2, 3]	[2, 2.5]	[2, 2.4]	[2, 2.3]	[2, 2.2]	[2, 2.1]
Velocidad promedio (pies/s)	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

Las velocidades promedio durante intervalos sucesivamente más pequeños parecen estar aproximándose cada vez más a un número cercano a 10 y, por tanto, esperaríamos que la velocidad en exactamente $t = 2$ sea de 10 pies/s. En el capítulo 2 definiremos la velocidad instantánea de un objeto en movimiento, como el valor límite de las velocidades promedio durante intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

En la figura 8 se muestra una representación gráfica del movimiento del automóvil al ubicar los puntos correspondientes a la distancia recorrida como función del tiempo. Si escribimos $d = f(t)$, entonces $f(t)$ es el número de pies recorridos después de t segundos. La velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[2, t]$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8. La velocidad v cuando $t = 2$ es el valor límite de esta velocidad promedio cuando t se aproxima a 2; es decir,

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

y de la ecuación 2 reconocemos que esto es lo mismo que la pendiente de la recta tangente a la curva en P.

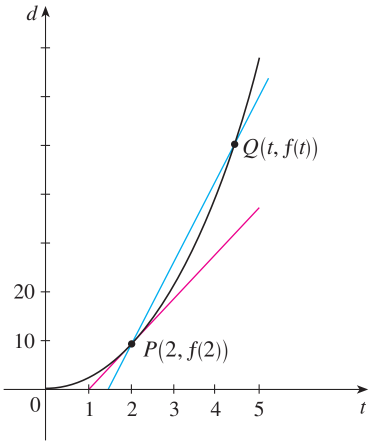


FIGURA 8

Así, cuando resolvemos el problema de la tangente en el cálculo diferencial, también estamos resolviendo problemas relativos a velocidades. Las mismas técnicas permiten resolver problemas relacionados con tasas de cambio en las ciencias naturales y sociales.

El límite de una sucesión

En el siglo v a.C. el filósofo griego Zenón de Elea planteó cuatro problemas, ahora conocidos como *Paradojas de Zenón*, que estaban diseñados para cuestionar algunas de las ideas sobre el espacio y el tiempo que se sostenían en esos días. La segunda paradoja de Zenón se refiere a una carrera entre el héroe griego Aquiles y una tortuga a la que se ha dado cierta ventaja al inicio. Zenón argumentaba, como se hace ver enseguida, que Aquiles nunca podría rebasar a la tortuga. Supongamos que Aquiles empieza en la posición a_1 y la tortuga comienza en posición t_1 (véase la figura 9). Cuando Aquiles alcanza el punto $a_2 = t_1$, la tortuga está más adelante en la posición t_2. Cuando Aquiles llega a $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3. Este proceso continúa indefinidamente y así parece que ¡la tortuga siempre estará por delante! Pero esto desafía el sentido común.

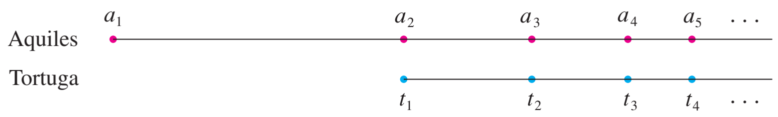


FIGURA 9

Una manera de explicar esta paradoja es con el concepto de sucesión. Las posiciones sucesivas de Aquiles $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ o las posiciones sucesivas de la tortuga $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ forman lo que se conoce como una sucesión.

En general, una sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto de números escritos en un orden definido. Por ejemplo, la sucesión

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

puede describirse dando la siguiente fórmula para el n-ésimo término:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Podemos visualizar esta sucesión ubicando sus términos en una recta numérica como en la figura 10a) o dibujando su gráfica como en la figura 10b). En cualquiera de las dos representaciones observamos que los términos de la sucesión $a_n = 1/n$ se aproximan cada vez más y más a 0 al aumentar n. De hecho, podemos encontrar términos tan pequeños como queramos haciendo n suficientemente grande. En estas condiciones, decimos que el límite de la sucesión es 0, y lo indicamos escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

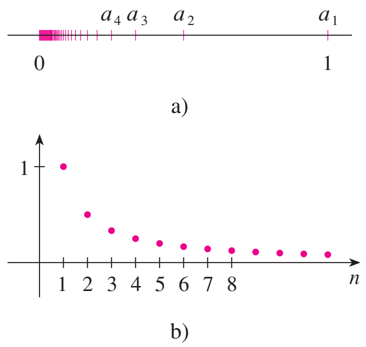


FIGURA 10

En general, la notación

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

se utiliza si los términos de a_n se aproximan al número L cuando n es suficientemente grande. Esto significa que los números a_n pueden acercarse al número L tanto como se quiera si se toma una n suficientemente grande.

El concepto de límite de una sucesión ocurre cada vez que utilizamos la representación decimal de un número real. Por ejemplo, si

$$a_1 = 3.1$$
$$a_2 = 3.14$$
$$a_3 = 3.141$$
$$a_4 = 3.1415$$
$$a_5 = 3.14159$$
$$a_6 = 3.141592$$
$$a_7 = 3.1415926$$
$$\vdots$$

entonces $$\lim_{n \to \infty} a_n = \pi$$

Los términos de esta sucesión son aproximaciones racionales de π.

Regresemos a la paradoja de Zenón. Las posiciones sucesivas de Aquiles y la tortuga forman sucesiones $\{a_n\}$ y $\{t_n\}$, donde $a_n < t_n$ para toda n. Puede demostrarse que ambas sucesiones tienen el mismo límite

$$\lim_{n \to \infty} a_n = p = \lim_{n \to \infty} t_n$$

Es precisamente en este punto p que Aquiles alcanza a la tortuga.

La suma de una serie

Otra de las paradojas de Zenón, según Aristóteles, es la siguiente: "un hombre parado en una sala no puede caminar hasta la pared. Para ello, primero tendría que recorrer la mitad de la distancia, después recorrer la mitad de la distancia restante y, a continuación, recorrer la mitad de lo que falta. Este proceso puede mantenerse siempre y nunca puede ser terminado". (Véase la figura 11.)

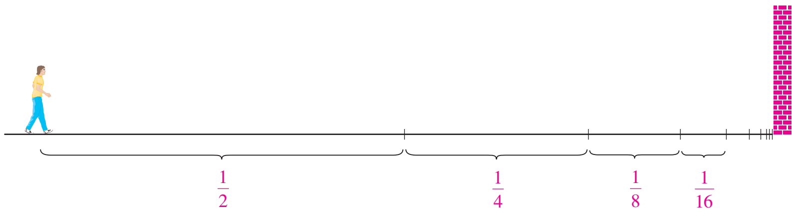


FIGURA 11

Por supuesto, sabemos que el hombre realmente puede llegar a la pared, lo que sugiere que tal vez la distancia total puede expresarse como la suma de una infinidad de distancias cada vez más pequeñas como sigue:

3 $$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenón argumentaba que no tiene sentido sumar una infinidad de números. Pero hay otras situaciones en que utilizamos implícitamente sumas infinitas. Por ejemplo, en notación decimal, el símbolo $0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots$$

y así, en cierto sentido, debe ser cierto que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Más generalmente, si d_n denota el n-ésimo dígito en la representación decimal de un número, entonces

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Por tanto, algunas sumas infinitas o series infinitas, como se les llama, tienen un significado. Pero debemos definir cuidadosamente lo que es la suma de una serie infinita.

Regresando a la serie en la ecuación 3, denotamos por s_n la suma de los n primeros términos de la serie. Por tanto,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0.5 \\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75 \\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875 \\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0.9375 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0.96875 \\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0.984375 \\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0.9921875 \\
&\vdots \\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0.99902344 \\
&\vdots \\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0.99998474
\end{aligned}$$

Observe que como le añadimos cada vez más términos, las sumas parciales parecen ser más cercanas a 1. De hecho, se puede demostrar que si n es suficientemente grande (es decir, si se suman suficientes términos de la serie), podemos aproximar la suma parcial s_n tanto como queramos al número 1. Por tanto, parece razonable decir que la suma de la serie infinita es 1 y escribir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

En otras palabras, la razón de que la suma de la serie sea 1 es que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

En el capítulo 11 analizaremos con más detalle estas ideas y utilizaremos la propuesta de Newton de combinar las series infinitas con el cálculo diferencial e integral.

Resumen

Hemos visto que el concepto de límite surge al intentar encontrar el área de una región, la pendiente de la recta tangente a una curva, la velocidad de un móvil o la suma de una serie infinita. En cada caso el problema común es el cálculo de una cantidad como el límite de otras cantidades fáciles de calcular. Esta idea básica de límite separa al Cálculo de otras áreas de las matemáticas. De hecho, podríamos definir al Cálculo como la parte de las matemáticas que estudia límites.

Después de que Sir Isaac Newton inventó su versión del Cálculo, la usó para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Hoy el Cálculo se utiliza para determinar las órbitas de los satélites y naves espaciales, en la predicción de tamaños de población, en la estimación de la rapidez con la que los precios del petróleo suben o bajan, en la predicción meteorológica, en medir el ritmo cardiaco del corazón, en el cálculo de las primas de seguros de vida y en una gran variedad de otras áreas. En este libro exploraremos algunos de estos usos del Cálculo.

Con el fin de dar una idea del poder del Cálculo, terminamos este panorama preliminar con una lista de algunas de las preguntas que usted podrá responder mediante el Cálculo:

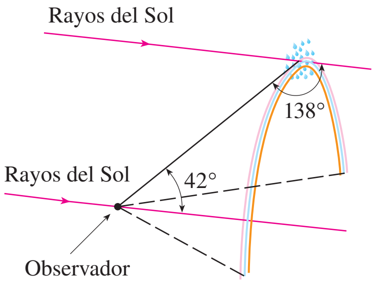


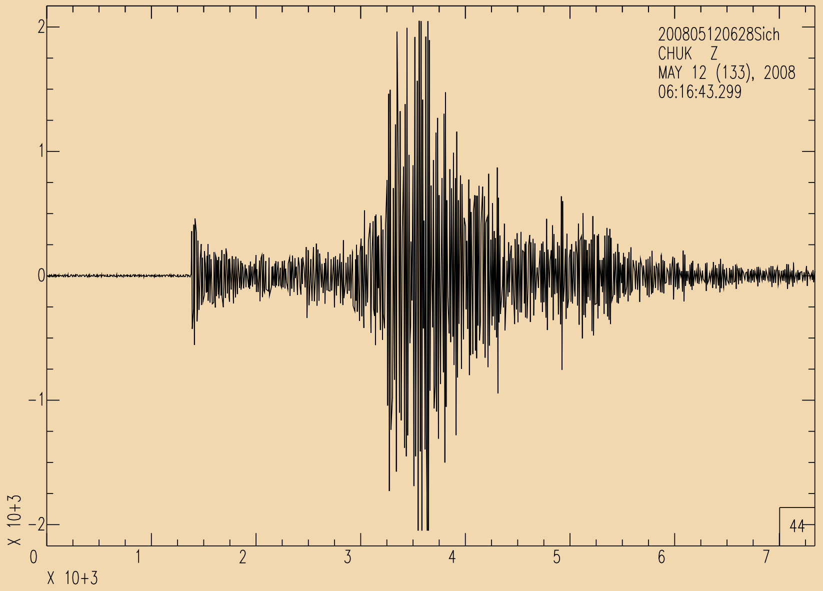
FIGURA 12

1. ¿Cómo podemos explicar el hecho, ilustrado en la figura 12, de que el ángulo de elevación desde un observador hasta el punto más alto en un arcoíris es 42°? (Consulte la página 282.)
2. ¿Cómo podemos explicar las formas de las latas en supermercados? (Consulte la página 337.)
3. ¿Dónde está el mejor lugar para sentarse en una sala de cine? (Consulte la página 456.)
4. ¿Cómo podemos diseñar una montaña rusa para un viaje suave? (Consulte la página 184.)
5. ¿A qué distancia de la pista de un aeropuerto debe un piloto iniciar el descenso? (Consulte la página 208.)
6. ¿Cómo podemos utilizar las curvas y el diseño de las formas para representar letras en una impresora láser? (Consulte la página 653.)
7. ¿Cómo podemos estimar el número de trabajadores que fueron necesarios para construir la gran pirámide de Keops en Egipto? (Consulte la página 451.)
8. ¿Dónde debe colocarse un parador en corto para atrapar una pelota de beisbol lanzada por un jardinero y lanzarla al plato (*home*)? (Consulte la página 456.)
9. Una bola lanzada verticalmente hacia arriba, ¿tarda más tiempo en llegar a su altura máxima o en volver a su posición original de lanzamiento? (Consulte la página 604.)

1 Funciones y modelos

A menudo una gráfica es la mejor manera de representar una función porque transmite mucha información en un vistazo. En la fotografía se muestra la gráfica de la aceleración del suelo, creada por el terremoto de 2008 en la provincia de Sichuan, en China. La ciudad más golpeada fue Beichuan, como muestra la imagen.

© Mark Ralston / AFP / Getty Images



Cortesía de the IRIS Consortium. www.iris.edu

Los objetos fundamentales con los que trata el Cálculo son las funciones. Este capítulo prepara el camino para el Cálculo discutiendo las ideas básicas sobre las gráficas de funciones y la manera de transformarlas y combinarlas. Destacamos que una función puede representarse de diferentes maneras: mediante una ecuación, una tabla, una gráfica o en palabras. Veremos los principales tipos de funciones que aparecen en el Cálculo y describiremos cómo se utilizan estas funciones para modelar matemáticamente fenómenos del mundo real. También analizaremos el uso de calculadoras graficadoras y programas de graficación por computadora.

1.1 Cuatro maneras de representar una función

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende de su radio r. La regla que relaciona A con r está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r hay asociado un valor de A, por lo que decimos que A es una *función* de r.

B. La población humana del mundo P depende del tiempo t. La tabla muestra las estimaciones de la población mundial $P(t)$ en el tiempo t, para algunos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor del tiempo t hay un valor correspondiente de P, por lo que decimos que P es una función de t.

Año	Población (millones)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080
2010	6 870

C. El costo C de envío de un paquete por correo depende de su peso w. Aunque no hay alguna fórmula simple que relacione a w con C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a de suelo, medida por un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. La figura 1 muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un determinado valor de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.

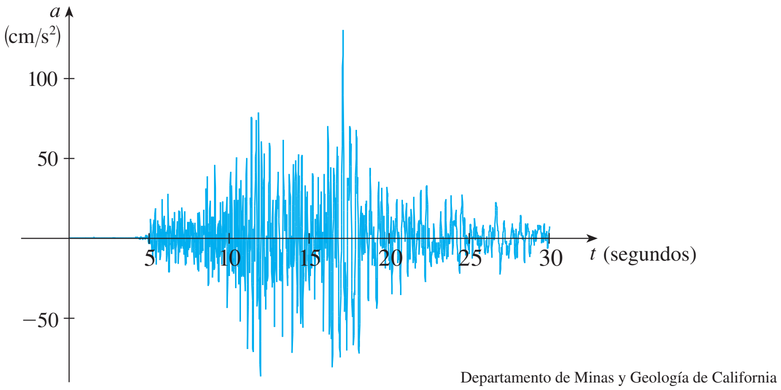


FIGURA 1
Aceleración vertical de suelo durante el terremoto de Northridge

Cada uno de estos ejemplos describe una regla según la cual, a un número dado (r, t, w o t), se le asigna otro número (A, P, C, o a). En cada caso decimos que el segundo número es una función del primero.

> Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Usualmente consideramos funciones para los cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. Al conjunto D se le denomina **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "*f de x*". El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de f se conoce como **variable dependiente**. En el ejemplo **A**, r es la variable independiente, y A es la variable dependiente.

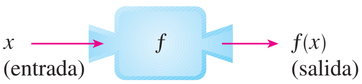


FIGURA 2
Diagrama de una función f como una máquina

Es útil pensar en una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, cuando x entra en la máquina, que se acepta como una entrada, la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

Las funciones preprogramadas en una calculadora son buenos ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, el comando raíz cuadrada en su calculadora computa esa función. Oprima la tecla etiquetada $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$) e introduzca la entrada x; si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, entonces aparecerá una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así, el comando $\sqrt{x}$ en la calculadora no es exactamente el mismo que la función matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

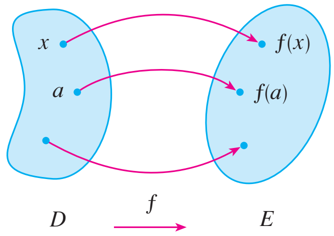


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

El método más común para la visualización de una función es con su gráfica. Si f es una función con dominio D, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f nos da una imagen visual útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en el gráfico es $y = f(x)$, podemos leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica por encima del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f permite también tener una imagen visual del dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

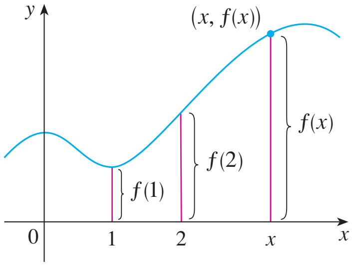


FIGURA 4

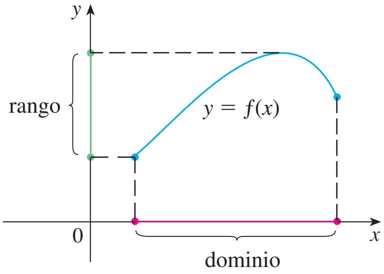


FIGURA 5

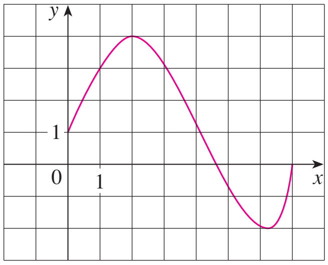


FIGURA 6

EJEMPLO 1 La gráfica de una función f se muestra en la figura 6.

a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.

b) ¿Cuál es el dominio y el rango de f?

SOLUCIÓN

a) De la figura 6 vemos que el punto $(1, 3)$ está en la gráfica de f, por lo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra por encima de $x = 1$ está 3 unidades por encima del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0.7 unidades por debajo del eje x, así que estimamos que $f(5) \approx -0.7$.

b) Vemos que $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, por lo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores de -2 a 4, así que el rango de f es

La notación por intervalos está dada en el apéndice A.

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

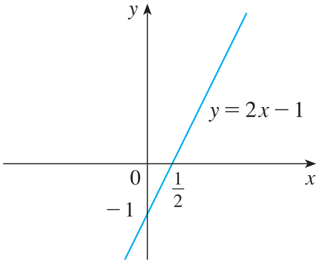


FIGURA 7

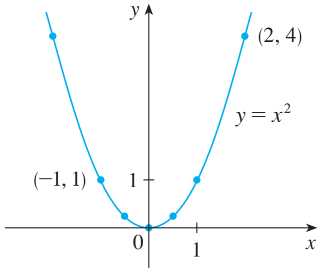


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace la gráfica y encuentre el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN

a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y representa la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección con el eje y en $y = -1$ (recuerde que la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = mx + b$. Véase el apéndice B). Esto nos permite dibujar la porción de la gráfica de f en la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, así que el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. La gráfica muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.

b) Dado que $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podemos ubicar los puntos (2, 4) y (−1, 1) junto con algunos otros puntos de la gráfica, y después unirlos para obtener la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$ y representa una parábola (véase apéndice C). El dominio de g es $\mathbb{R}$, y el rango consiste en todos los valores de $g(x)$, esto es, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x, y todo número y en estas condiciones es positivo, así que el rango de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto puede verse en la figura 8.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalúe $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

SOLUCIÓN Primero evaluamos $f(a + h)$ reemplazando x por $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 - 5(a + h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a + h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

Después sustituimos en la expresión dada y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$

La expresión

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

en el ejemplo 3 se llama **cociente de diferencias** y se presenta frecuentemente en cálculo. Como veremos en el capítulo 2, representa la razón de cambio de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$.

Representaciones de funciones

Hay cuatro posibles maneras de representar una función:

- Verbalmente (por una descripción en palabras)
- Numéricamente (por una tabla de valores)
- Visualmente (por una gráfica)
- Algebraicamente (por una fórmula explícita)

Si una función puede representarse de las cuatro maneras, con frecuencia es muy útil pasar de una representación a otra a fin de disponer de información adicional de la función. (En el ejemplo 2, empezamos con formas algebraicas y de ellas obtuvimos gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más naturalmente por una forma que por otra. Con esto en mente, reexaminaremos las cuatro situaciones que consideramos al inicio de esta sección.

A. La representación probablemente más útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores para esbozar una gráfica (la mitad de una parábola). Debido a que un círculo tiene un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, y el rango $(0, \infty)$.

t	Población (millones)
0	1 650
10	1 750
20	1 860
30	2 070
40	2 300
50	2 560
60	3 040
70	3 710
80	4 450
90	5 280
100	6 080
110	6 870

B. Se nos da una descripción de la función en palabras: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. Vamos a medir t, así que $t = 0$ se corresponde con el año 1900. La tabla de valores de la población mundial proporciona una representación adecuada de esta función. Si se grafican estos valores, obtenemos la gráfica (llamada gráfica de *dispersión*) en la figura 9. También es una representación útil porque la gráfica nos permite disponer de todos los datos a la vez. ¿Qué pasa con una fórmula? Por supuesto, es imposible concebir una fórmula explícita que proporcione la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible encontrar una expresión para una función que se *aproxime* a $P(t)$. De hecho, utilizando los métodos que se explican en la sección 1.2, conseguimos la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

La figura 10 muestra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que aproxima el comportamiento de nuestra función dada. Sin embargo, veremos que las ideas del Cálculo también pueden aplicarse a una tabla de valores; una fórmula explícita no es necesaria.

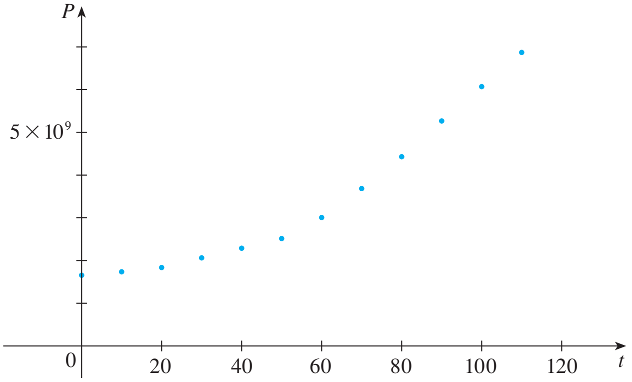


FIGURA 9

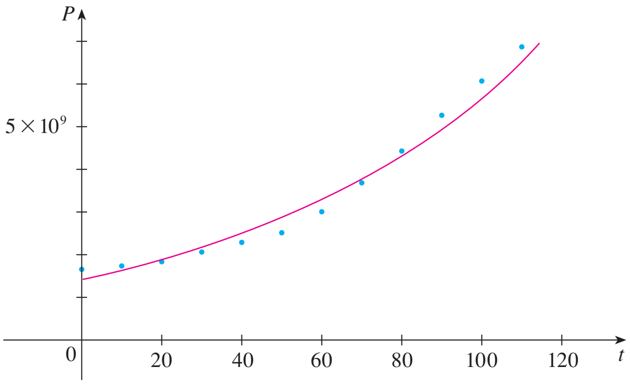


FIGURA 10

Una función definida por una tabla de valores se llama *función tabular.*

La función P es típica de aquellas que surgen cuando se intenta aplicar el Cálculo en el mundo real. Comenzamos con una descripción verbal de una función. A continuación, debemos ser capaces de elaborar una tabla de valores de la función; tal vez de lecturas del instrumento en un experimento científico. A pesar de que no tenemos un conocimiento completo de los valores de la función, veremos a lo largo del libro que todavía es posible realizar las operaciones del Cálculo con dicha función.

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leqslant 1$	0.88
$1 < w \leqslant 2$	1.05
$2 < w \leqslant 3$	1.22
$3 < w \leqslant 4$	1.39
$4 < w \leqslant 5$	1.56
⋮	⋮

C. Nuevamente la función se describe con palabras: sea $C(w)$ el costo de envío por correo de un paquete con peso w. La regla que el Servicio Postal de EU utiliza desde 2010 es la siguiente: el costo es de 88 centavos de dólar para paquetes hasta de 1 onza, más 17 centavos por cada onza adicional (o menos) hasta 13 onzas. La tabla de valores que se muestran en el margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible esbozar una gráfica (véase el ejemplo 10).

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que podría elaborarse una tabla de valores, y que incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo —las amplitudes y patrones— puede verse fácilmente en la gráfica. (Lo mismo es cierto para los patrones que se observan en los electrocardiogramas de pacientes que sufren del corazón y en polígrafos para la detección de mentiras).

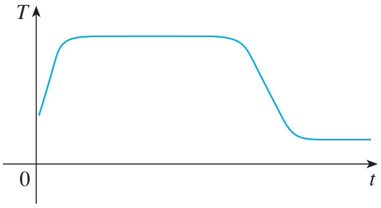


FIGURA 11

En el ejemplo siguiente, esboce la gráfica de una función definida verbalmente.

EJEMPLO 4 Al abrir un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado saliendo el agua. Dibuje un esbozo de gráfica de T como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que fue abierto el grifo.

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente es cercana a la temperatura ambiente porque el agua ha permanecido en las tuberías. Cuando empieza a salir el agua desde el tanque de agua caliente, T aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua caliente en el tanque. Cuando el tanque se drena, T disminuye hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto nos permite hacer el esbozo de T en función de t en la figura 11.

El siguiente ejemplo inicia con una descripción verbal de una función en una situación física, y hay que obtener una fórmula algebraica explícita. La capacidad para hacer esto es una habilidad útil para resolver problemas de Cálculo en los que se piden los valores máximo o mínimo de cantidades.

V EJEMPLO 5 Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de 10 m³. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales como una función del ancho de la base.

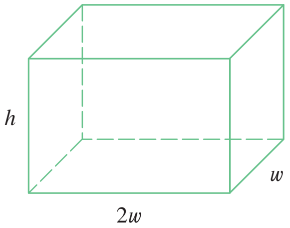


FIGURA 12

SOLUCIÓN Dibujamos un diagrama como el de la figura 12 e introducimos la notación w y $2w$ para el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h para la altura.

El área de la base es $w(2w) = 2w^2$, por lo que el costo en dólares de los materiales para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen área wh, y los otros dos tienen área $2wh$, por lo que el costo de los materiales para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. El costo total es, por tanto,

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C sólo como una función de w, necesitamos eliminar h y para hacerlo utilizamos el hecho de que el volumen es de $10\,\text{m}^3$. Por tanto,

$$w(2w)h = 10$$

esto da $$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Sustituyendo en la expresión para C, tenemos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

RP Para establecer funciones aplicadas como en el ejemplo 5, puede ser útil revisar los principios de la resolución de problemas como se explica en la página 75, particularmente el paso 1: *comprender el problema.*

Por tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como una función de w.

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ *b)* $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Convención para el dominio
Si una función viene dada por una fórmula y el dominio no se expresa explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

SOLUCIÓN

a) Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como un número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, por lo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

b) Como

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

y no se permite la división entre 0, vemos que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que también puede escribirse en notación de intervalos como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esta pregunta se contesta con la siguiente prueba.

La prueba de la vertical Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si no hay recta vertical que intercepte la curva más de una vez.

La razón de la validez de la prueba de la vertical puede verse en la figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ intercepta una curva sólo una vez, en (a, b), entonces se define exactamente un valor funcional para $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ intercepta la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), entonces la curva no puede representar una función debido a que una función no puede asignar dos valores diferentes de a.

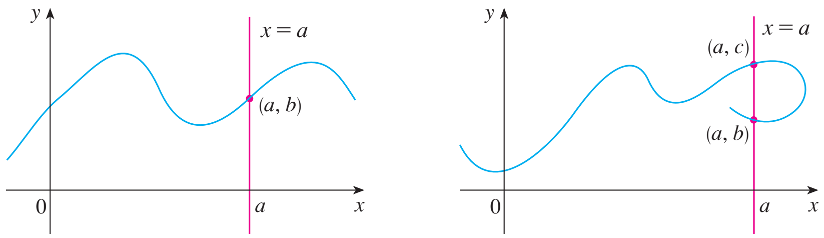


FIGURA 13

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que se muestra en la figura 14 a) no es la gráfica de una función de x porque, como puede ver, hay rectas verticales que intersectan a la parábola dos veces. La parábola, sin embargo, contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Note que la ecuación $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, así que $y = \pm\sqrt{x+2}$. Por tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ [del ejemplo 6 a)] y $g(x) = -\sqrt{x+2}$. [Véanse las figuras 14 b) y c).] Observamos que si invertimos los roles de x y y, entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define a x como una función de y (con y como la variable independiente y x como la variable dependiente), y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función h.

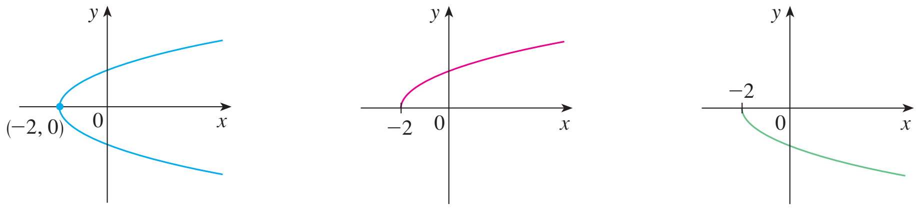


FIGURA 14 a) $x = y^2 - 2$ b) $y = \sqrt{x+2}$ c) $y = -\sqrt{x+2}$

Funciones definidas por secciones

Las funciones en los siguientes cuatro ejemplos se definen mediante diferentes fórmulas en distintos tramos de sus dominios. Estas funciones se denominan **funciones definidas por secciones**.

V EJEMPLO 7 Una función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Evalúe $f(-2)$, $f(-1)$ y $f(0)$ y grafique la función.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular la regla es la siguiente: primero ver el valor de la entrada x. Si sucede que $x \leqslant -1$, entonces el valor de $f(x)$ se encuentra con $1 - x$. Por otro lado, si $x > -1$, entonces el valor de $f(x)$ se obtiene con x^2.

$$\text{Puesto que } -2 \leqslant -1, \text{ tenemos } f(-2) = 1 - (-2) = 3$$

$$\text{Puesto que } -1 \leqslant -1, \text{ tenemos } f(-1) = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{Puesto que } 0 > -1, \text{ tenemos } f(0) = 0^2 = 0.$$

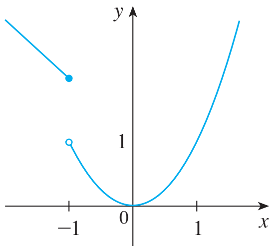


FIGURA 15

¿Cómo obtenemos la gráfica de f? Observamos que si $x \leqslant -1$, entonces $f(x) = 1 - x$, por lo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la recta vertical $x = -1$ debe coincidir con la recta $y = 1 - x$, que tiene pendiente -1 e intersección en $(0, 1)$. Si $x > -1$, entonces $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la derecha de la recta $x = -1$ debe coincidir con la gráfica de $y = x^2$, que es una parábola. Esto nos permite esbozar la gráfica en la figura 15. El punto relleno indica que $(-1, 2)$ está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que $(-1, 1)$ está excluido de la gráfica.

El siguiente ejemplo de una función definida por secciones es la función valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 en la recta de números reales. Las distancias son siempre positivas o cero, así tenemos que

Para un repaso más amplio de valores absolutos, véase el apéndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general, tenemos

$$\begin{aligned} |a| &= a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a & \text{si } a < 0 \end{aligned}$$

(Recuerde que si a es negativa, entonces $-a$ es positiva.)

EJEMPLO 8 Grafique la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN De la discusión precedente sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

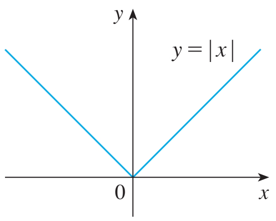


FIGURA 16

Utilizando el mismo método que en el ejemplo 7, vemos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y, y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase la figura 16).

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura 17.

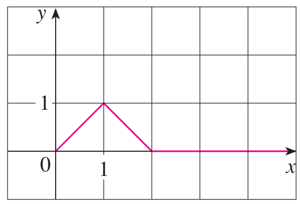


FIGURA 17

SOLUCIÓN La recta que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = 1$ e intersección con el eje y en $b = 0$, por lo que su ecuación es $y = x$. Así, por la parte de la gráfica de f que une a (0, 0) con (1, 1), tenemos

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Véase el apéndice B.

La recta que une a (1, 1) y (2, 0) tiene pendiente $m = -1$, por lo que su forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \text{ o bien } y = 2 - x$$

Así tenemos $\qquad f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 < x \leqslant 2$

También vemos que la gráfica de f coincide con el eje x para $x > 2$. Reuniendo esta información, tenemos la siguiente fórmula en tres secciones para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

EJEMPLO 10 En el ejemplo C al principio de esta sección hemos considerado el costo $C(w)$ de enviar por correo paquetes con peso w. En efecto, esto define una función por secciones porque, por la tabla de valores en la página 13, tenemos

$$C(w) = \begin{cases} 0.88 & \text{si } 0 < w \leqslant 1 \\ 1.05 & \text{si } 1 < w \leqslant 2 \\ 1.22 & \text{si } 2 < w \leqslant 3 \\ 1.39 & \text{si } 3 < w \leqslant 4 \\ \vdots & \end{cases}$$

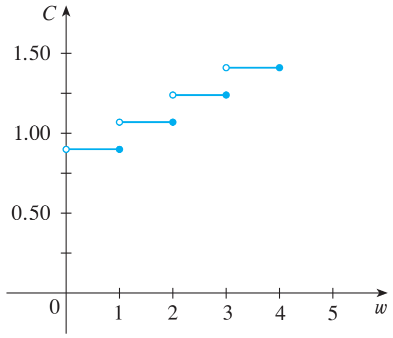


FIGURA 18

La gráfica se muestra en la figura 18. Puede verse por qué funciones similares a ésta se denominan **funciones escalón**: saltan de un valor al siguiente. Estas funciones se estudiarán en el capítulo 2.

Simetría

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica respecto al eje

y (véase la figura 19). Esto significa que si hemos dibujado la gráfica para $x \geqslant 0$, obtenemos toda la gráfica simplemente reflejándola respecto al eje y.

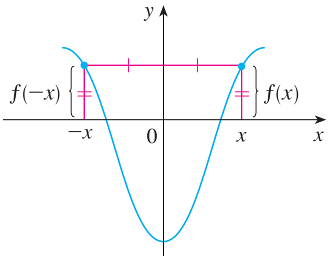


FIGURA 19 Una función par

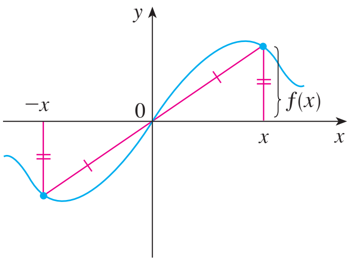


FIGURA 20 Una función impar

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para cada x en su dominio, entonces f es una **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica en relación con el origen (véase la figura 20). Si ya tenemos la gráfica de f para $x \geqslant 0$, podemos obtener toda la gráfica rotando 180º esta porción en relación con el origen.

V EJEMPLO 11 Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de las dos.

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = 1 - x^4$ c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, f es una función impar.

b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Así que g es par.

c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, concluimos que h no es par ni impar.

Las gráficas de las funciones del ejemplo 11 se muestran en la figura 21. Observe que la gráfica de h no es simétrica respecto al eje y ni en relación con el origen.

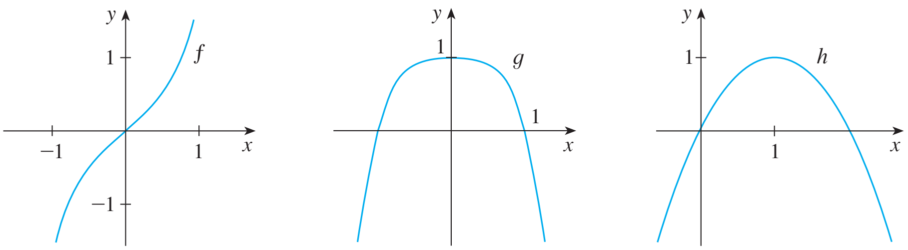


FIGURA 21 a) b) c)

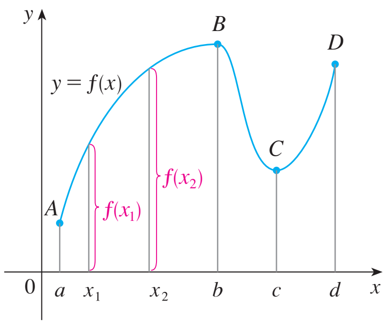


FIGURA 22

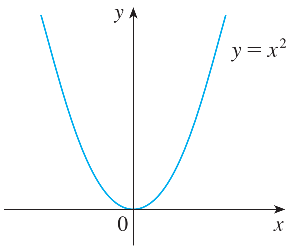


FIGURA 23

Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube desde A hasta B, desciende de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, decreciente sobre $[b, c]$ y creciente nuevamente sobre $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números entre a y b con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Utilizamos esta propiedad para definir una función creciente.

Una función f se llama *creciente* sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

En la definición de una función creciente, es importante darse cuenta de que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe cumplirse para *todo* par de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

Puede observarse en la figura 23 que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 Ejercicios

1. Si $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$ y $g(u) = u + \sqrt{2 - u}$, ¿es verdad que $f = g$?

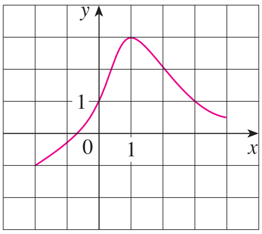
2. Si

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x$$

¿es verdad que $f = g$?

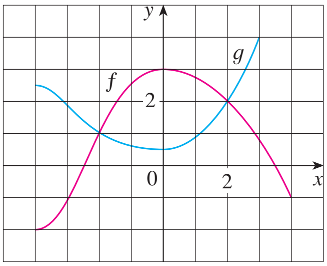
3. La gráfica de una función f está dada.

a) Establezca el valor de $f(1)$.
b) Estime el valor de $f(-1)$.
c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 1$?
d) Estime el valor de x tal que $f(x) = 0$.
e) Establezca el dominio y el rango de f.
f) ¿Sobre qué intervalo es creciente f?



4. Las gráficas de f y g están dadas.

a) Establezca los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
b) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?
c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.
d) ¿Sobre qué intervalo es decreciente f?
e) Establezca el dominio y el rango de f
f) Establezca el dominio y el rango de g.



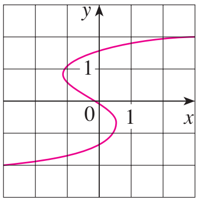
5. La gráfica de la figura 1 fue registrada por un instrumento operado por el Departamento de Minas y Geología de California en el Hospital Universitario de la Universidad de California del Sur (USC, por sus siglas en inglés) en Los Ángeles. Utilice esta gráfica para estimar el rango de la función aceleración vertical de suelo, en la USC durante el terremoto de Northridge.

6. En esta sección discutimos ejemplos de funciones cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo de envío postal es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dar otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describen verbalmente. ¿Qué puede decir sobre el dominio y el rango de cada una de sus funciones? Si es posible, esboce una gráfica de cada función.

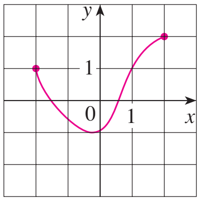
1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

7-10 Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, establezca el dominio y el rango de la función.

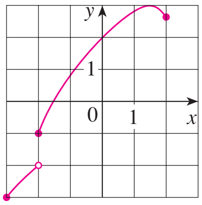
7.



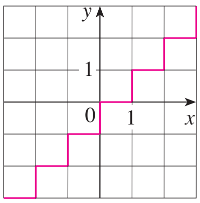
8.



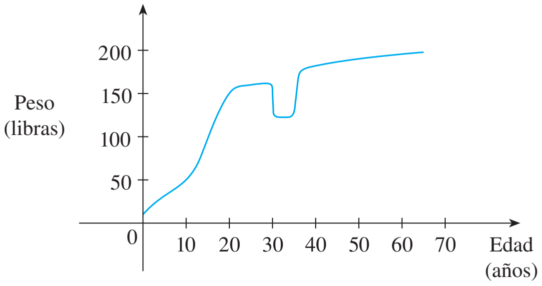
9.



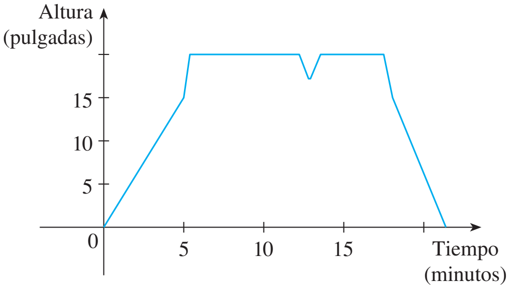
10.



11. La gráfica que se muestra da el peso de una determinada persona en función de la edad. Describa con palabras cómo el peso de esta persona varía con el tiempo. ¿Qué cree que ocurrió cuando esta persona tenía 30 años?

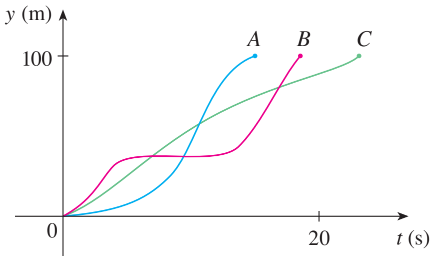


12. La gráfica muestra la altura del agua en una bañera en función del tiempo. Proporcione una descripción verbal de lo que cree que sucedió.



13. Se ponen unos cubitos de hielo en un vaso, se llena el vaso con agua fría y luego se coloca sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo. Luego esboce una gráfica de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.

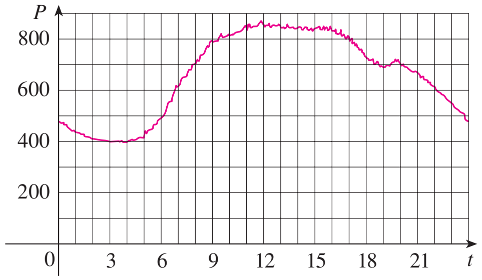
14. Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica muestra la distancia recorrida como una función del tiempo de cada corredor. Describa en palabras lo que la gráfica indica acerca de esta carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada corredor terminó la carrera?



15. La gráfica muestra el consumo de potencia para un día en septiembre en San Francisco. (P se mide en megavatios; t se registra en horas a partir de la medianoche).

a) ¿Cuál fue el consumo de potencia a las 6:00? ¿A las 18:00?

b) ¿Cuándo fue el consumo de potencia más bajo? ¿Cuándo fue el más alto? ¿Estos tiempos parecen razonables?



Pacific Gas & Electric

16. Esboce una gráfica aproximada del número de horas de luz en función de la época del año.

17. Esboce una gráfica de la temperatura exterior en función del tiempo, durante un día típico de primavera.

18. Esboce una gráfica aproximada del valor de mercado de un nuevo automóvil en función del tiempo, durante un periodo de 20 años. Suponga que el automóvil se mantiene en buen estado.

19. Esboce la gráfica de la cantidad de una determinada marca de café vendido por una tienda, en función del precio del café.

20. Coloque una tarta congelada en un horno y caliéntela durante una hora. Luego sáquela y déjela enfriar antes de comerla. Describa cómo cambia la temperatura de la tarta conforme pasa el tiempo. Luego esboce una gráfica de la temperatura de la tarta en función del tiempo.

21. El propietario de una casa poda el césped cada miércoles por la tarde. Esboce una gráfica de la altura del césped como una función del tiempo, en el transcurso de un periodo de cuatro semanas.

22. Un avión despega desde un aeropuerto y aterriza una hora más tarde en otro aeropuerto a 400 millas de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado la

terminal, $x(t)$ es la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión, esboce

a) una posible gráfica de $x(t)$.
b) una posible gráfica de $y(t)$.
c) una posible gráfica de la rapidez respecto al suelo.
d) una posible gráfica de la velocidad vertical.

23. En la tabla se muestra el número N (en millones) de usuarios de telefonía celular en EU. (Se dan estimaciones semestrales.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

a) Utilice los datos para esbozar una gráfica de N en función de t.
b) Utilice su gráfica para estimar el número de usuarios de teléfono celular a mediados de año en 2001 y en 2005.

24. Las siguientes lecturas de temperatura T (en °F) se registraron cada dos horas desde la medianoche a las 14:00 en Phoenix, el 10 de septiembre de 2008. El tiempo t se midió en horas a partir de la medianoche.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	82	75	74	75	84	90	93	94

a) Utilice las lecturas para esbozar una gráfica de T como una función de t.
b) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 9:00.

25. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encuentre $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a + 1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ y $f(a + h)$.

26. Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire necesaria para inflar el globo de un radio de r pulgadas a un radio $r + 1$ pulgadas.

27-30 Evalúe el cociente de diferencias de cada una de las siguientes funciones. Simplifique su respuesta.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2, \quad \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$

28. $f(x) = x^3, \quad \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

30. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x + 1}, \quad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

31-37 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones.

31. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$

32. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

34. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

35. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

36. $f(u) = \dfrac{u + 1}{1 + \dfrac{1}{u + 1}}$

37. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

38. Encuentre el dominio y el rango, y dibuje la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

39-50 Encuentre el dominio y grafique cada una de las siguientes funciones:

39. $f(x) = 2 - 0.4x$

40. $F(x) = x^2 - 2x + 1$

41. $f(t) = 2t + t^2$

42. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

43. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

44. $F(x) = |2x + 1|$

45. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

46. $g(x) = |x| - x$

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ -6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

51-56 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

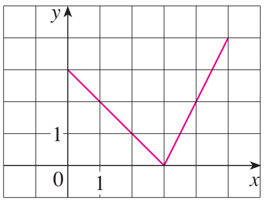
51. El segmento de recta que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$.

52. El segmento de recta que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$.

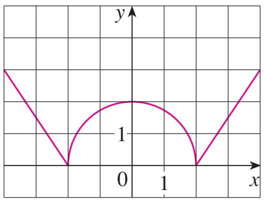
53. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$.

54. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

55.



56.



57-61 Encuentre una fórmula y su dominio para cada una de las siguientes funciones descritas.

57. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

58. Un rectángulo tiene 16 m^2 de área. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

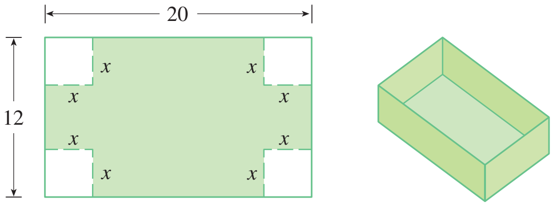
59. Exprese el área de un triángulo equilátero, como función de la longitud de un lado.

60. Exprese el área superficial de un cubo en función de su volumen.

61. Una caja rectangular abierta con 2 m^3 de volumen tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base.

62. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de la ventana en función del ancho x de la ventana.

63. Debe construirse una caja sin tapa, a partir de una hoja rectangular de cartón que tiene dimensiones de 12 por 20 pulgadas, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y plegando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja en función de x.



64. Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de 35 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cargos de 10 centavos de dólar por cada minuto adicional de uso. Escriba el costo mensual C, como una función del número x de minutos utilizados, y grafique C como una función para $0 \leqslant x \leqslant 600$.

65. En cierto estado del país, la velocidad máxima permitida en autopistas es 65 mi/h y la velocidad mínima es de 40 mi/h. La multa para los conductores que violan estos límites es \$15 por cada milla por hora por encima de la velocidad máxima o por debajo de la velocidad mínima. Exprese el monto de la multa F como una función de la velocidad de conducción x y grafique $F(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 100$.

66. Una compañía de electricidad cobra a sus clientes una tasa base de 10 dólares al mes, más 6 centavos de dólar por kilovatio-hora (kWh) por los primeros 1200 kWh y 7 centavos de dólar por kWh para todo uso sobre 1200 kWh. Exprese el costo mensual E en función de la cantidad x de electricidad utilizada. Después, grafique la función E para $0 \leqslant x \leqslant 2000$.

67. En un determinado país, el impuesto sobre la renta se calcula como sigue. No hay impuesto sobre la renta para ingresos de hasta \$10 000. Los ingresos de más de \$10 000 se gravan con una tasa del 10%, hasta un ingreso de \$20 000. Los ingresos superiores a \$20 000 se gravan en 15%.

a) Esboce la gráfica de la tasa impositiva R en función de los ingresos.

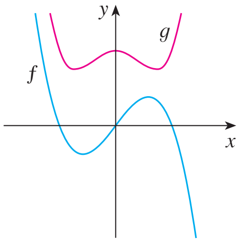
b) ¿Qué impuesto corresponde a un ingreso de \$14 000? ¿Y de \$26 000?

c) Esboce la gráfica del impuesto total T en función del ingreso I.

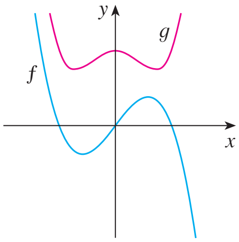
68. Las funciones del ejemplo 10 y el ejercicio 67 se denominan *funciones escalón* porque sus gráficas parecen escaleras. Sugiera dos ejemplos de funciones escalón que surgen en la vida cotidiana.

69-70 Se muestran las gráficas de f y g. Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

69.



70.



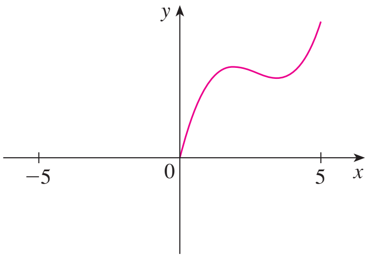
71. a) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

b) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

72. Una función f tiene dominio $[-5, 5]$ y se muestra una porción de su gráfica.

a) Complete la gráfica de f si se sabe que f es par.

b) Complete la gráfica de f si se conoce que f es impar.



73-78 Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora, utilícela para verificar visualmente su respuesta.

73. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

75. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

76. $f(x) = x|x|$

77. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

78. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

79. Si f y g son funciones pares, ¿es $f + g$ par? Si f y g son funciones impares, ¿es $f + g$ impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

80. Si f y g son dos funciones pares, ¿es el producto fg par? Si f y g son dos funciones impares, ¿es fg impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales

Un **modelo matemático** es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o una ecuación) de un fenómeno real, como el tamaño de una población, la demanda de un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de un producto en una reacción química, la esperanza de vida de una persona al nacer, o el costo de la reducción de las emisiones. El propósito del modelo es comprender el fenómeno y tal vez hacer predicciones sobre su comportamiento futuro.

La figura 1 ilustra el proceso de modelado matemático. Dado un problema del mundo real, nuestra primera tarea es formular un modelo matemático mediante la identificación y etiquetado de las variables dependientes e independientes, y haciendo supuestos que simplifiquen lo suficiente el fenómeno para que sea matemáticamente manejable. Utilizamos nuestro conocimiento de la situación física y nuestras habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En situaciones donde no hay ninguna ley física para que nos guíe, podemos necesitar recopilar datos (ya sea en una biblioteca, en internet o mediante la realización de nuestros propios experimentos) y examinar los datos en forma de una tabla para poder identificar patrones. A partir de la representación numérica de una función, podemos obtener una representación gráfica. En algunos casos, la gráfica podría hasta sugerir una forma algebraica adecuada.

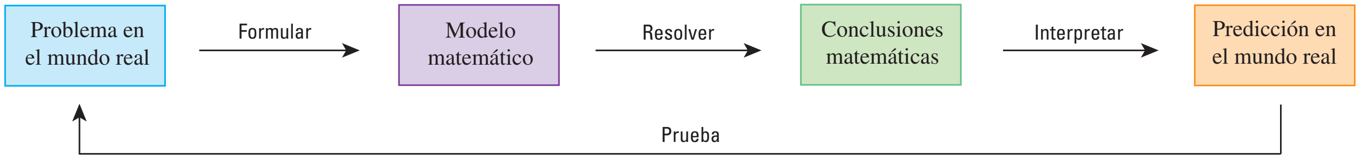


FIGURA 1 El proceso de modelado

La segunda etapa consiste en aplicar las matemáticas que conocemos (p. ej., el Cálculo que se desarrollará a lo largo de este libro) al modelo matemático que hemos formulado a fin de obtener conclusiones matemáticas. A continuación, en la tercera etapa, tomamos esas conclusiones matemáticas y las interpretamos como información sobre el fenómeno original del mundo real con el propósito de dar explicaciones o hacer predicciones. El último paso es poner a prueba nuestras predicciones comparando contra nuevos datos reales. Si las predicciones no coinciden con una buena aproximación con la realidad, necesitamos afinar nuestro modelo o formular uno nuevo y empezar otra vez el ciclo.

Un modelo matemático nunca es una representación completamente precisa de una situación física: es una idealización. Un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente para permitir hacer cálculos matemáticos, pero es razonablemente preciso para proporcionar valiosas conclusiones. Es importante percatarse de las limitaciones del modelo porque, finalmente, la Madre Naturaleza tiene la última palabra.

Hay muchos tipos diferentes de funciones que pueden utilizarse para modelar relaciones observadas en el mundo real. En lo que sigue, analizaremos el comportamiento y gráfica de estas funciones y daremos ejemplos de situaciones adecuadamente modeladas por ellas.

Modelos lineales

En el apéndice B se repasa la geometría analítica de las rectas.

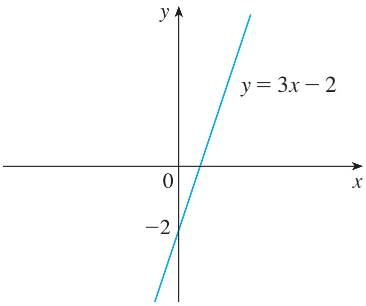
Cuando decimos que y es una **función lineal** de x, queremos decir que la gráfica de la función es una recta, de manera que podemos utilizar la forma pendiente-intersección de

la ecuación de la recta para escribir una fórmula para la función como

$$y = f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la intersección de la recta con el eje y.

Un rasgo característico de las funciones lineales es que crecen a una razón constante. Por ejemplo, la figura 2 muestra una gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ y una tabla con algunos de sus valores. Observe que cuando x aumenta por 0.1, el valor de $f(x)$ aumenta por 0.3. Así que $f(x)$ aumenta tres veces más rápido que x. De este modo, la pendiente de la gráfica $y = 3x - 2$, es decir 3, lo que puede interpretarse como la razón de cambio de y respecto a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

V EJEMPLO 1

a) Cuando el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es 20 °C, y la temperatura a 1 km de altura es de 10 °C, exprese la temperatura T (en °C) en función de la altura h (en kilómetros), suponiendo que un modelo lineal es adecuado.

b) Dibuje la gráfica de la función del inciso a). ¿Qué representa la pendiente?

c) ¿Cuál es la temperatura a 2.5 km de altura?

SOLUCIÓN

a) Ya que suponemos que T es una función lineal de h, podemos escribir

$$T = mh + b$$

Estamos teniendo en cuenta que $T = 20$ cuando $h = 0$, por lo que

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

En otras palabras, la intersección con el eje y es $b = 20$.

Dado que $T = 10$ cuando $h = 1$, tenemos que

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

La pendiente de la recta es, por tanto, $m = 10 - 20 = -10$, y la función lineal requerida es

$$T = -10h + 20$$

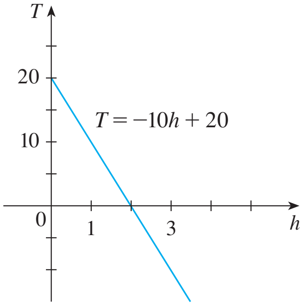


FIGURA 3

b) La gráfica se muestra en la figura 3. La pendiente es $m = -10$ °C/km y representa la razón de cambio de temperatura respecto a la altura.

c) A una altura de $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -5\text{°C}$$

Si no hay ley física o principio que nos ayude a formular un modelo, construimos un modelo empírico que se base completamente en los datos recopilados. Buscamos una curva que "encaje" en los datos, en el sentido que sugiera la tendencia básica de los puntos que representan los datos.

V EJEMPLO 2 La tabla 1 muestra el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el Observatorio Mauna Loa, desde 1980 a 2008. Utilice los datos de la tabla 1 para encontrar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.

SOLUCIÓN Utilizamos los datos de la tabla 1 para hacer la gráfica de dispersión en la figura 4, donde t representa el tiempo (en años) y C, el nivel de CO_2 (en partes por millón, ppm).

TABLA 1

Año	Nivel de CO_2 (en ppm)	Año	Nivel de CO_2 (en ppm)
1980	338.7	1996	362.4
1982	341.2	1998	366.5
1984	344.4	2000	369.4
1986	347.2	2002	373.2
1988	351.5	2004	377.5
1990	354.2	2006	381.9
1992	356.3	2008	385.6
1994	358.6		

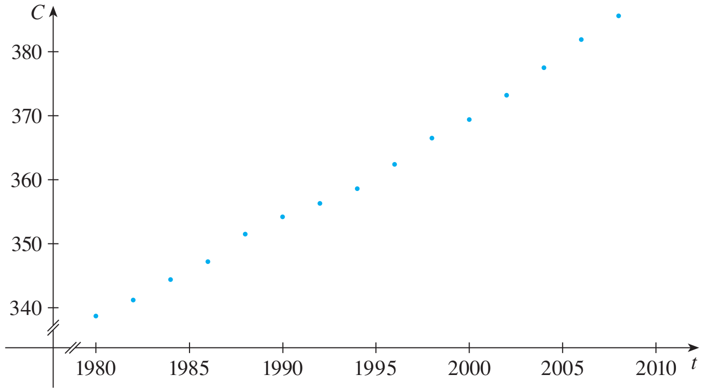


FIGURA 4 La gráfica de dispersión para el nivel promedio de CO_2

Observe que los puntos de datos parecen estar cercanos a una recta, por lo que es natural que se elija un modelo lineal en este caso. Pero hay muchas rectas posibles que se aproximan a estos puntos de datos, así que, ¿cuál debemos usar? Una posibilidad es la recta que pasa por el primero y el último puntos de datos. La pendiente de esta recta es

$$\frac{385.6 - 338.7}{2008 - 1980} = \frac{46.9}{28} = 1.675$$

y su ecuación es

$$C - 338.7 = 1.675(t - 1980)$$

o bien

1 $$C = 1.675t - 2977.8$$

La ecuación 1 da un posible modelo lineal para el nivel de dióxido de carbono y se representa gráficamente en la figura 5.

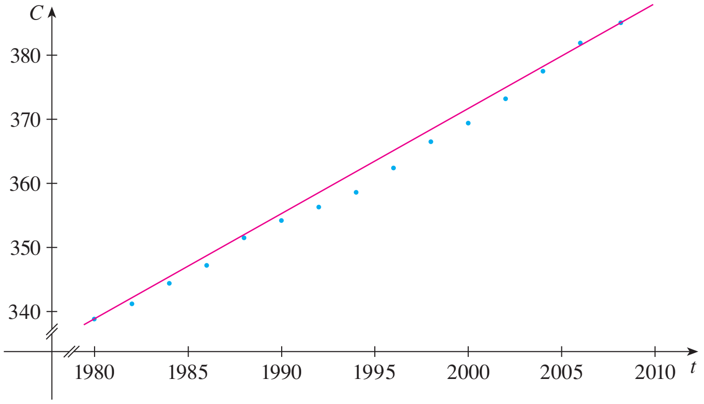


FIGURA 5
Modelo lineal a través del primero y el último puntos de información

Una computadora o una calculadora graficadora encuentran la recta de regresión por el método de **mínimos cuadrados**, que consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos de datos y la recta. Los detalles se explican en la sección 14.7.

Observe que nuestro modelo da valores por encima de la mayoría de los niveles reales de CO_2. Un mejor modelo lineal se obtiene por un procedimiento estadístico llamado *regresión lineal*. Si utilizamos una calculadora graficadora, introducimos los datos de la tabla 1 en el editor de datos y elegimos el comando de regresión lineal (con Maple utilizamos el comando fit[leastsquare] en el paquete de estadística; con Mathematica utilizamos el comando Fit). La máquina da la pendiente y la ordenada al origen de la recta de regresión

$$m = 1.65429 \qquad b = -2938.07$$

Por lo que nuestro modelo de mínimos cuadrados para el nivel de CO_2 es

$$C = 1.65429t - 2938.07 \tag{2}$$

En la figura 6 graficamos la recta de regresión, así como los puntos de datos. Comparando con la figura 5, vemos que da un mejor ajuste que nuestro anterior modelo lineal.

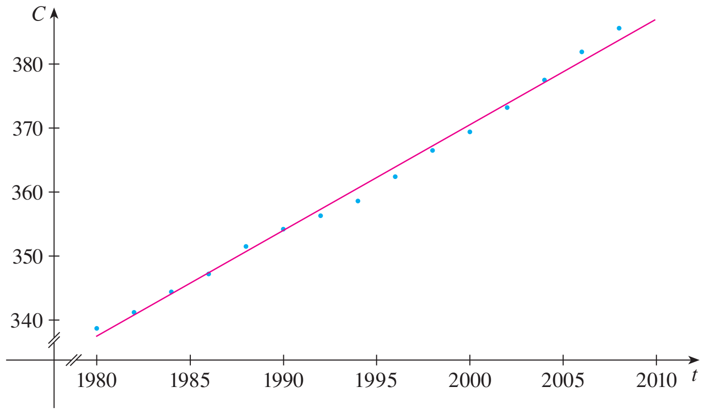


FIGURA 6
Recta de regresión

V EJEMPLO 3 Utilice el modelo lineal dado por la ecuación 2 para estimar el nivel promedio de CO_2 para 1987 y predecir el nivel para el año 2015. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo el nivel de CO_2 superará 420 partes por millón?

SOLUCIÓN Mediante la ecuación 2 con $t = 1987$, estimamos que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue

$$C(1987) = (1.65429)(1987) - 2938.07 \approx 349.00$$

Éste es un ejemplo de *interpolación* porque hemos estimado un valor entre los valores observados. (De hecho, el Observatorio Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue de 348.93 ppm, por lo que nuestra estimación es bastante precisa.)

Con $t = 2015$, obtenemos

$$C(2015) = (1.65429)(2015) - 2938.07 \approx 395.32$$

Por lo que auguramos que el nivel promedio de CO_2 en el año 2015 será 395.3 ppm. Este es un ejemplo de *extrapolación* porque hemos predicho un valor fuera de la región de observaciones. En consecuencia, estamos mucho menos seguros acerca de la precisión de nuestra predicción. Utilizando la ecuación 2, vemos que el nivel de CO_2 supera las 420 ppm cuando

$$1.65429t - 2938.07 > 420$$

Resolviendo esta desigualdad, obtenemos

$$t > \frac{3358.07}{1.65429} \approx 2029.92$$

Por tanto, predecimos que el nivel de CO_2 superará 420 ppm para el año 2030. Esta predicción es riesgosa porque se trata de un tiempo bastante alejado de nuestras observaciones. De hecho, podemos ver en la figura 6 que la tendencia ha sido de un rápido aumento para los niveles de CO_2 en los últimos años, por lo que el nivel podría superar los 420 ppm antes de 2030.

Polinomiales

Una función P se llama **polinomial** si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas los **coeficientes** de la polinomial. El dominio de cualquier polinomial es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** de la polinomial es n. Por ejemplo, la función

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

es una polinomial de grado 6.

Una polinomial de grado 1 es de la forma $P(x) = mx + b$, por lo que es una función lineal. Una polinomial de grado 2 es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ y se llama **función cuadrática**. Su gráfica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola $y = ax^2$, como se verá en la siguiente sección. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. (Véase la figura 7.)

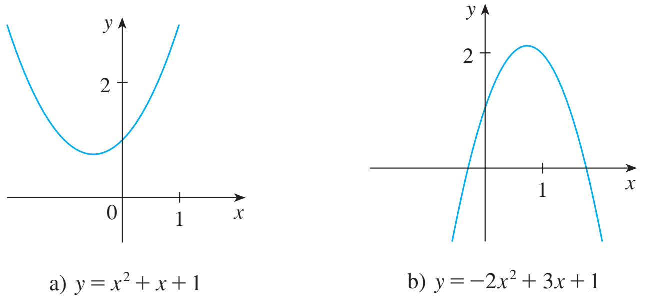


FIGURA 7
Las gráficas de una función cuadrática son parábolas

Una polinomial de grado 3 es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

y se llama **función cúbica**. La figura 8 muestra la gráfica de una función cúbica en el inciso a) y las gráficas de polinomiales de grados 4 y 5 en los incisos b) y c). Veremos más adelante por qué las gráficas tienen esas formas.

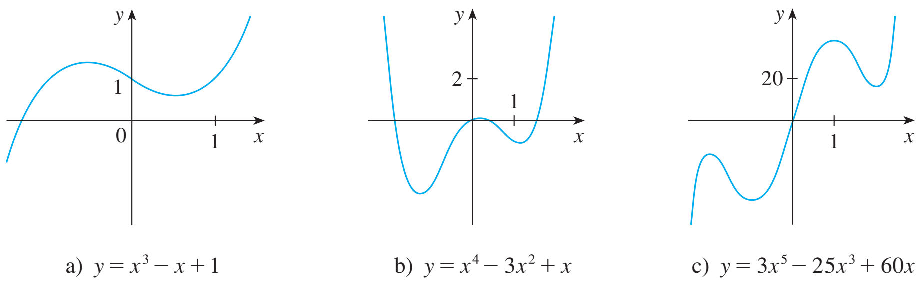


FIGURA 8

Las polinomiales se utilizan comúnmente para modelar diversas cantidades que se presentan en las ciencias naturales y sociales. Por ejemplo, en la sección 3.7 explicaremos por qué los economistas usan a menudo una polinomial $P(x)$ para representar el costo de producir x unidades de una mercancía. En el siguiente ejemplo, utilizamos una función cuadrática para modelar la caída de una pelota.

TABLA 2

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EJEMPLO 4 Se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN, a 450 m por encima del suelo. Las sucesivas alturas h de la pelota por encima del suelo están registradas a intervalos de 1 segundo, en la tabla 2. Encuentre un modelo para ajustar los datos y utilice ese modelo para predecir el momento en que la pelota golpeará el suelo.

SOLUCIÓN En la figura 9 se traza una gráfica de dispersión con la información disponible y se observa que un modelo ideal no es adecuado. Pero parece ser que los puntos de datos podrían acomodarse a una parábola, por lo que intentamos un modelo cuadrático. Utilizando una calculadora graficadora o computadora (que utiliza el método de los mínimos cuadrados), obtenemos el siguiente modelo cuadrático:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2 \tag{3}$$

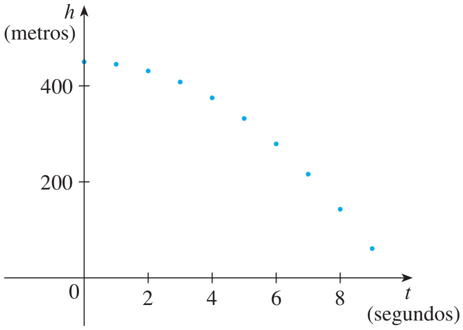


FIGURA 9
Gráfica de dispersión para la caída de una pelota

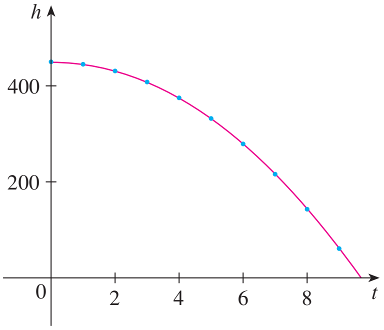


FIGURA 10
Modelo cuadrático para la caída de una pelota

En la figura 10 dibujamos la gráfica de la ecuación 3 junto con los puntos de datos y vemos que el modelo cuadrático es muy buen ajuste.

La pelota golpea el suelo cuando $h = 0$, por lo que resolvemos la ecuación cuadrática

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

La ecuación cuadrática da

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

La raíz positiva es $t \approx 9.67$, por lo que pronosticamos que la pelota golpeará el suelo después de aproximadamente 9.7 segundos.

Funciones potencia

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama **función potencia**. Consideramos varios casos.

i) $a = n$, donde n es un número entero positivo

Las gráficas de $f(x) = x^n$ para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 se muestran en la figura 11. (Estas son polinomiales con un sólo término.) Ya sabemos la forma de la gráfica de $y = x$ (una recta que pasa por el origen con pendiente 1) y $y = x^2$ [una parábola, véase el ejemplo 2b) en la sección 1.1].

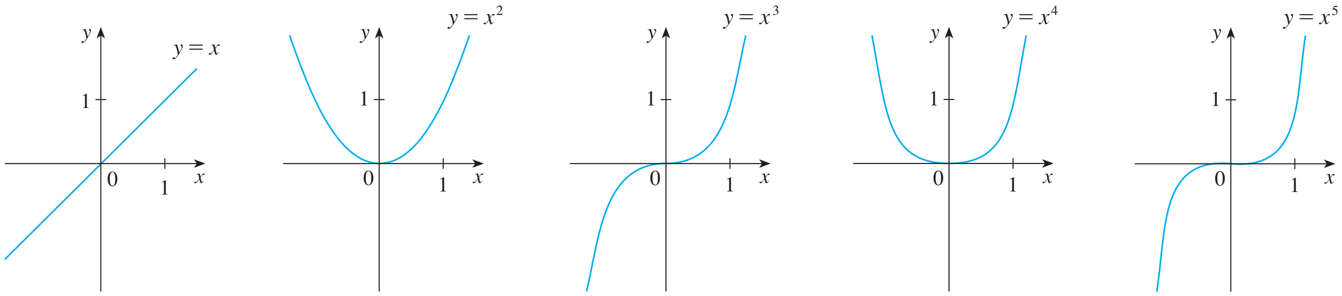


FIGURA 11 Gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. Si n es par, entonces $f(x) = x^n$ es una función par, y su gráfica es similar a la parábola $y = x^2$. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ es una función impar, y su gráfica es similar a la de $y = x^3$. Observe en la figura 12, sin embargo, que cuando n aumenta, la gráfica de $y = x^n$ se aplana más cerca de 0 y es más pronunciada cuando $|x| \geqslant 1$. (Si x es pequeña, entonces x^2 es más pequeña, x^3 es aún más pequeña, x^4 es todavía más pequeña aún, y así sucesivamente.)

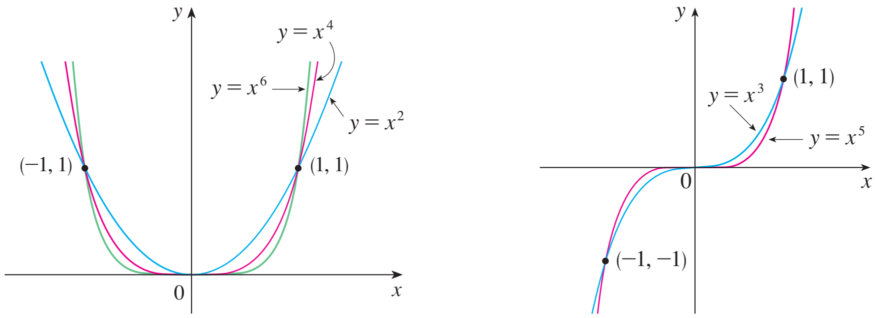


FIGURA 12
Familia de funciones potencia

ii) $a = 1/n$, donde n es un número entero positivo

La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **función raíz**. Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con dominio en $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. [Véase la figura 13a)]. Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$ tenemos la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ con dominio en $\mathbb{R}$ (recuerde que todo número real tiene raíz cúbica) y cuya gráfica se muestra en la figura 13b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar ($n > 3$) es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.

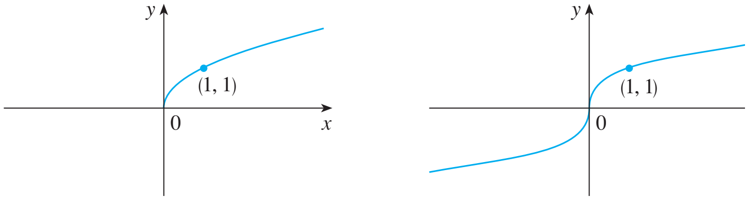


FIGURA 13
Gráficas de funciones raíz

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

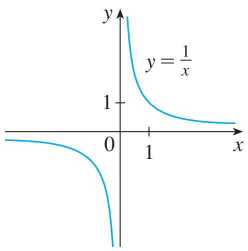


FIGURA 14
La función recíproca

iii) $a = -1$

La gráfica de la **función recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ se muestra en la figura 14. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$ o $xy = 1$, y es una hipérbola con los ejes de coordenadas como sus asíntotas. Esta función surge en física y química en relación con la ley de Boyle, que dice que, cuando la temperatura es constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

$$V = \frac{C}{P}$$

donde C es una constante. Así, la gráfica de V en función de P (véase la figura 15) tiene la misma forma general que la mitad derecha de la figura 14.

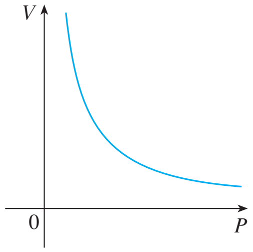


FIGURA 15
El volumen como una función de la presión a temperatura constante

Las funciones potencia también se utilizan para modelar relaciones especie-área (ejercicios 26-27), la iluminación como una función de la distancia a una fuente de luz (ejercicio 25) y el periodo de revolución de un planeta en función de su distancia al Sol (ejercicio 28).

Funciones racionales

Una **función racional** f es un cociente de dos funciones polinomiales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomiales. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo simple de una función racional es $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$; esta es la función recíproca graficada en la figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. La gráfica se muestra en la figura 16.

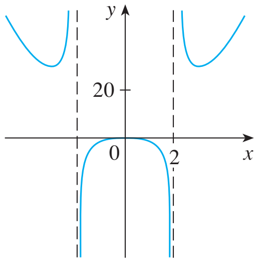


FIGURA 16
$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funciones algebraicas

Una función f se llama *función algebraica* si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con las polinomiales. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica. Aquí hay dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Cuando esbocemos funciones algebraicas en el capítulo 4, veremos que sus gráficas pueden tener una variedad de formas. La figura 17 ilustra algunas de las posibilidades.

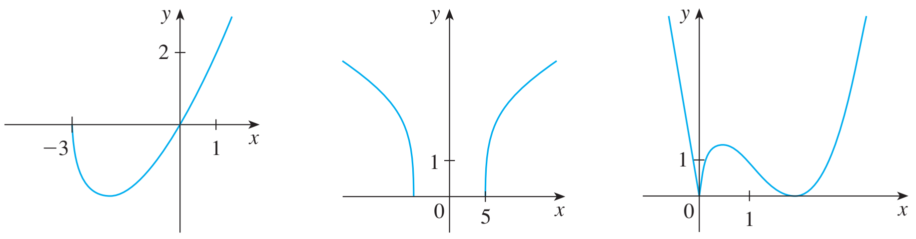


FIGURA 17 a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

Un ejemplo de una función algebraica se produce en la teoría de la relatividad. La masa de una partícula con velocidad v

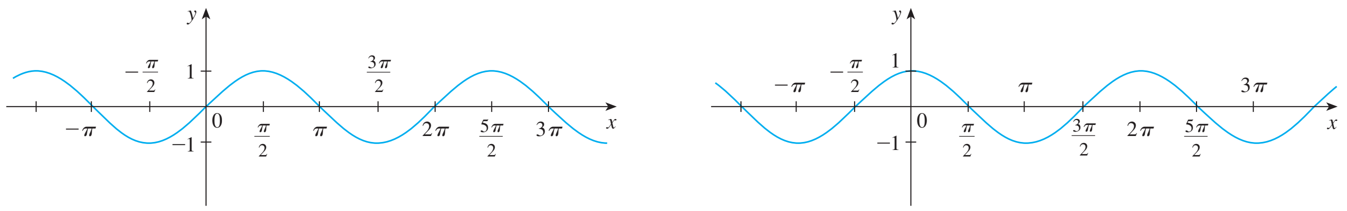
$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0 \times 10^5$ km/s es la velocidad de la luz en el vacío.

Funciones trigonométricas

Las páginas de referencia se encuentran en la parte final del libro.

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en la página de referencia 2 y también en el apéndice D. En Cálculo, por convención, siempre se utilizan medidas en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando utilizamos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, se sobreentiende que sen x significa el seno de un ángulo cuya medida en radianes es x. Así, las gráficas de las funciones seno y coseno son como se muestra en la figura 18.



a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por tanto, para todos los valores de x, tenemos

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

o bien, en términos de valor absoluto,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

También, los ceros de la función seno se producen en los múltiplos enteros de π; es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{cuando} \qquad x = n\pi \qquad \text{donde} \qquad n \text{ es un entero}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas con periodo 2π. Esto significa que, para todos los valores de x,

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

El carácter periódico de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos, como las olas del mar, resortes en vibración y las ondas de sonido. Por ejemplo, en el ejemplo 4 en la sección 1.3 veremos que un modelo razonable para el número de horas de luz solar en Filadelfia t días de después del 1 de enero viene dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

La función tangente está relacionada con las funciones seno y coseno por la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

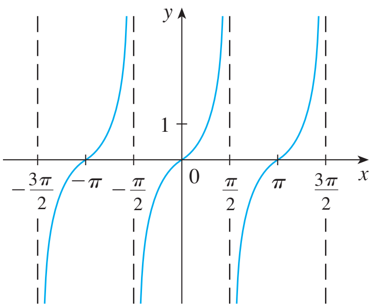


FIGURA 19
$y = \tan x$

y su gráfica se muestra en la figura 19. Está indefinida siempre que $\cos x = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ Su rango es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son los recíprocos de las funciones seno, coseno y tangente. Sus gráficas aparecen en el apéndice D.

Funciones exponenciales

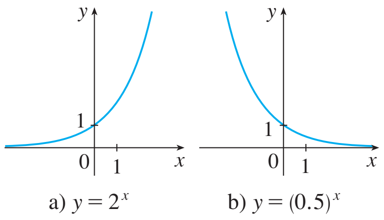


FIGURA 20

Las **funciones exponenciales** son funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0, 5)^x$ se muestran en la figura 20. En ambos casos el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.

Las funciones exponenciales serán estudiadas en detalle en la sección 1.5, y veremos que son útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como el crecimiento de una población (si $a > 1$) y la desintegración radiactiva (si $a < 1$).

Funciones logarítmicas

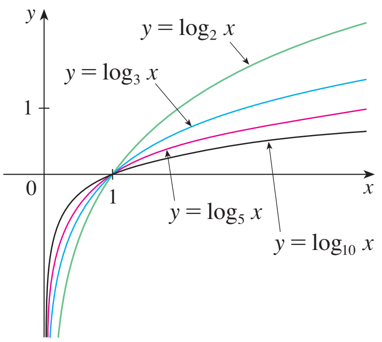


FIGURA 21

Las **funciones logarítmicas** $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales, que estudiaremos en la sección 1.6. La figura 21 muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$, el rango es $(-\infty, \infty)$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$.

EJEMPLO 5 Clasifique las siguientes funciones como uno de los tipos de funciones que hemos discutido.

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = x^5$

c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$

d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUCIÓN

a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

b) $g(x) = x^5$ es una función potencia. (La x es la base.) Podría considerarse como una función polinomial de grado 5.

c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es una función polinomial de grado 4.

1.2 Ejercicios

1-2 Clasifique cada función como una función potencia, función raíz, polinomial (establezca su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. a) $f(x) = \log_2 x$ b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$ d) $u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$

e) $v(t) = 5^t$ f) $w(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

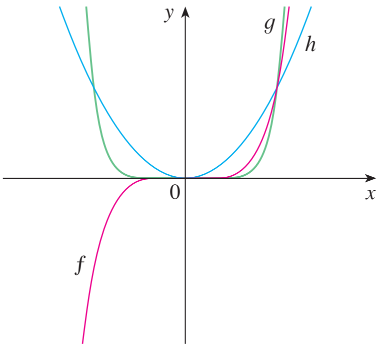
2. a) $y = \pi^x$ b) $y = x^\pi$

c) $y = x^2(2 - x^3)$ d) $y = \tan t - \cos t$

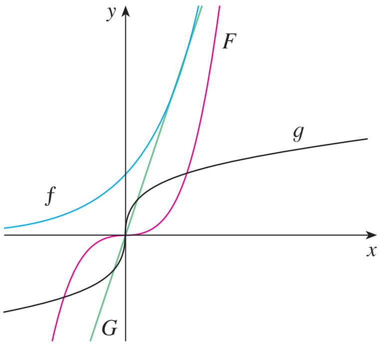
e) $y = \dfrac{s}{1 + s}$ f) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

3-4 Relacione cada una de las siguientes ecuaciones con su gráfica. Explique el porqué de su elección. (No utilice computadora o calculadora graficadora.)

3. a) $y = x^2$ b) $y = x^5$ c) $y = x^8$



4. a) $y = 3x$ b) $y = 3^x$
c) $y = x^3$ d) $y = \sqrt[3]{x}$

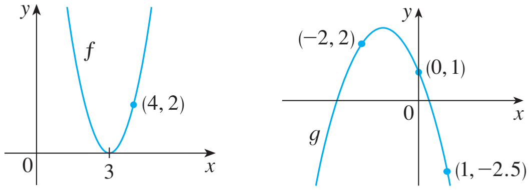


5. a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y esboce varios miembros de la familia.
b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y esboce varios miembros de la familia.
c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

6. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Esboce varios miembros de la familia.

7. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = c - x$? Esboce varios miembros de la familia.

8. Encuentre expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran.



9. Encuentre una expresión para una función cúbica f si $f(1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

10. Estudios recientes indican que la temperatura promedio de la superficie de la Tierra ha estado aumentando. Algunos científicos han modelado la temperatura con la función lineal $T = 0.02t + 8.50$, donde T es la temperatura en °C y t representa años desde 1900.
a) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje T?
b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura promedio de la superficie global en 2100.

11. Si D (en mg) es la dosis de un medicamento recomendada para adultos, entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, el farmacéutico utiliza la ecuación $c = 0.0417D(a + 1)$. Supongamos que la dosis para un adulto es de 200 mg.
a) Encuentre la pendiente de la gráfica de c. ¿Qué representa?
b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

12. El administrador de un bazar de fin de semana sabe por experiencia que si cobra x dólares por el alquiler de un espacio en el bazar, entonces el número y de espacios que puede alquilar viene dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.
a) Trace la gráfica de esta función lineal. (Recuerde que la renta por el espacio y el número de espacios alquilados no pueden ser cantidades negativas.)
b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje y la intersección con el eje x de la gráfica?

13. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.
a) Trace la gráfica de esta función.
b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección con el eje F y qué representa?

14. Jason sale de Detroit a las 14:00 y conduce a rapidez constante hacia el oeste a lo largo de la carretera I-96. Pasa por Ann Arbor, a 40 mi de Detroit, a las 14:50.
a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso a).
c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

15. Los biólogos han observado que la tasa de chirridos que emiten los grillos de una determinada especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos por minuto a 70°F y 173 chirridos por minuto a 80°F.
a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura T, en función del número N de chirridos por minuto.
b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Qué representa?
c) Si los grillos están chirreando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

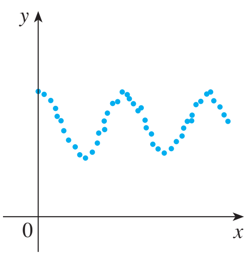
16. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta \$2200 fabricar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un solo día.
a) Exprese el costo en función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. A continuación trace la gráfica.
b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
c) ¿Cuál es la intersección en y de la gráfica y qué representa?

17. En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la presión del aire por encima del agua, 15 lb/pulg^2. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies de descenso.
a) Exprese la presión del agua en función de la profundidad bajo la superficie del océano.
b) ¿A qué profundidad la presión es de 100 lb/pulg^2?

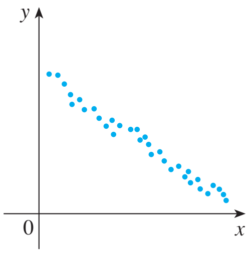
18. El costo mensual de conducir un coche depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo le costó \$380 conducir 480 millas y en junio le costó \$460 conducir 800 millas.
a) Exprese el costo mensual C como una función de la distancia recorrida d, suponiendo que una relación lineal da un modelo adecuado.
b) Utilice el inciso a) para predecir el costo de conducir 1 500 millas por mes.
c) Dibuje la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?
d) ¿Qué representa la intersección en C?
e) ¿Por qué una función lineal es un modelo adecuado en esta situación?

19-20 Para cada una de las siguientes gráficas de dispersión, ¿qué tipo de función elegiría como un modelo para los datos? Explique sus elecciones.

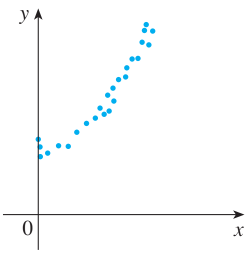
19. a)



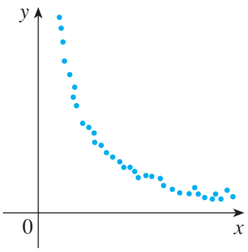
b)



20. a)



b)



21. La tabla muestra la tasa de úlcera péptica (de por vida) (por cada 100 habitantes) en relación con el ingreso de varias familiares según lo informado por la Encuesta Nacional de Entrevista de Salud.

Ingreso	Tasa de úlcera (por cada 100 habitantes)
\$4000	14.1
\$6000	13.0
\$8000	13.4
\$12000	12.5
\$16000	12.0
\$20000	12.4
\$30000	10.5
\$45000	9.4
\$60000	8.2

a) Elabore una gráfica de dispersión con estos datos y decida si es apropiado un modelo lineal.
b) Encuentre y grafique un modelo lineal utilizando el primero y el último puntos de datos.
c) Encuentre y grafique la recta de regresión por mínimos cuadrados.
d) Utilice el modelo lineal del inciso c) para estimar la tasa de úlcera para un ingreso de \$25000.
e) Según el modelo, ¿qué tan probable es que alguien que percibe un ingreso de \$80000 sufra de úlcera péptica?
f) ¿Cree que sería razonable aplicar el modelo a alguien con un ingreso de \$200000?

22. Los biólogos han observado que la tasa de chirridos de grillos de una determinada especie, parece estar relacionada con la temperatura. La tabla muestra la cantidad de chirridos para distintas temperaturas.

Temperatura (°F)	Tasa de chirridos (chirridos/min)	Temperatura (°F)	Tasa de chirridos (chirridos/min)
50	20	75	140
55	46	80	173
60	79	85	198
65	91	90	211
70	113		

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.
b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
c) Utilice el modelo lineal del inciso b) para estimar la tasa chirridos a 100°F.

23. La tabla da las alturas ganadoras en las competencias olímpicas de salto con pértiga masculinas hasta el año 2004.

Año	Altura (m)	Año	Altura (m)
1896	3.30	1960	4.70
1900	3.30	1964	5.10
1904	3.50	1968	5.40
1908	3.71	1972	5.64
1912	3.95	1976	5.64
1920	4.09	1980	5.78
1924	3.95	1984	5.75
1928	4.20	1988	5.90
1932	4.31	1992	5.87
1936	4.35	1996	5.92
1948	4.30	2000	5.90
1952	4.55	2004	5.95
1956	4.56		

a) Elabore una gráfica de dispersión y decida si es apropiado un modelo lineal.
b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
c) Utilice el modelo lineal para predecir la altura del salto ganador con pértiga en los Juegos Olímpicos de 2008 y compárelo con el salto ganador real de 5.96 metros.
d) ¿Es razonable utilizar el modelo para predecir la altura ganadora en los Juegos Olímpicos de 2100?

24. La tabla muestra el porcentaje de la población de Argentina que ha vivido en las zonas rurales de 1955 al 2000. Encuentre un modelo para los datos y utilícelo para estimar el porcentaje rural en 1988 y 2002.

Año	Porcentaje rural	Año	Porcentaje rural
1955	30.4	1980	17.1
1960	26.4	1985	15.0
1965	23.6	1990	13.0
1970	21.1	1995	11.7
1975	19.0	2000	10.5

25. Muchas de las cantidades físicas están relacionadas mediante *leyes de los cuadrados inversos*, es decir, por las funciones potencia de la forma $f(x) = kx^{-2}$. En particular, la iluminación de un objeto por una fuente de luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Suponga que al anochecer está en una habitación con una lámpara y que está intentando leer un libro. La luz es demasiado tenue, por lo que mueve la lámpara a la mitad de la distancia. ¿Cuánto más ilumina la luz al libro?

26. Tiene sentido afirmar que cuanto mayor sea el área de una región, es mayor el número de especies que habitan la región. Muchos ecólogos han modelado la relación de especies de la zona con una función potencia y, en particular, el número de especies S de murciélagos que habitan en cuevas en México ha estado relacionado con el área superficial A de las cuevas por la ecuación $S = 0.7A^{0.3}$.
a) La cueva llamada *Misión imposible*, situada cerca de Puebla, México, tiene una superficie de $A = 60\,\text{m}^2$. ¿Cuántas especies de murciélagos esperaría encontrar en esa cueva?
b) Si descubre que cuatro especies de murciélagos viven en una cueva, estime el área de la cueva.

27. La tabla muestra el número N de especies de reptiles y anfibios que habitan en las islas del Caribe y el área A de la isla en millas cuadradas.

Isla	A	N
Saba	4	5
Monserrat	40	9
Puerto Rico	3 459	40
Jamaica	4 411	39
Española	29 418	84
Cuba	44 218	76

a) Utilice una función potencia para modelar N como una función de A.
b) La isla caribeña de Dominica tiene un área $291\,\text{m}^2$. ¿Cuántas especies de reptiles y anfibios esperaría encontrar en Dominica?

28. La tabla muestra las distancias d (promedio) del Sol (tomando la unidad de medida como la distancia entre la Tierra y el Sol) y sus periodos T (tiempo de revolución en años).

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784

a) Ajuste un modelo potencia para los datos.
b) La tercera ley de movimiento planetario de Kepler afirma que "el cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol". ¿Su modelo corrobora la tercera ley de Kepler?

1.3 Nuevas funciones a partir de funciones viejas

En esta sección empezamos con las funciones básicas que discutimos en la sección 1.2 para obtener nuevas funciones por medio del desplazamiento, estiramiento y reflexión de sus gráficas. También mostramos cómo combinar pares de funciones utilizando operaciones aritméticas estándar y composición.

Transformaciones de funciones

Mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto nos dará la posibilidad de esbozar rápidamente a mano las gráficas de muchas funciones. También nos permitirá expresar ecuaciones para las gráficas dadas. Consideremos primero las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada verticalmente hacia arriba una distancia de c unidades (ya que cada coordenada y se incrementa por el mismo número c). Por otro lado, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Así, la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$, desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$

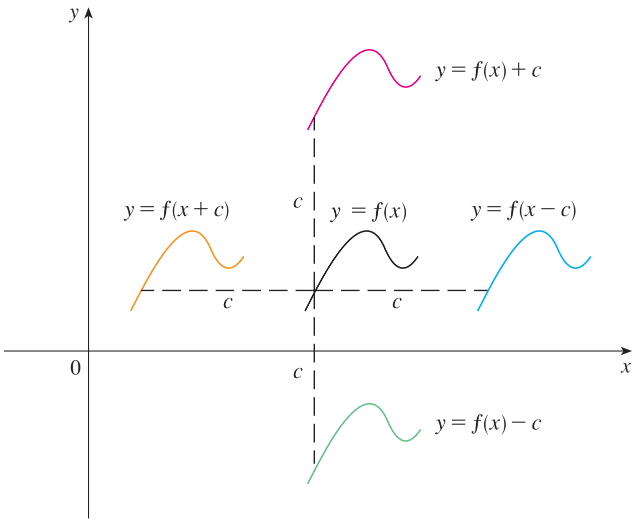


FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f

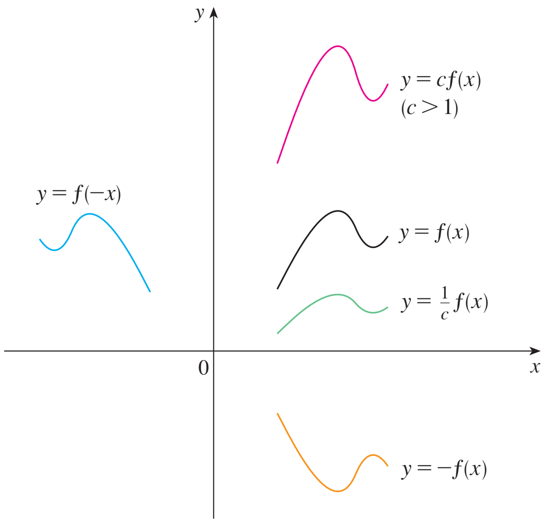


FIGURA 2
Estiramiento y reflexión de la gráfica de f

Ahora consideremos las transformaciones por **estiramiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ alargada verticalmente por un factor de c (porque cada coordenada y, se multiplica por el número c). La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada en relación con el eje x porque el punto (x, y)

se reemplaza por el punto $(x, -y)$. (Véase la figura 2 y el siguiente cuadro, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

Alargamientos y reflexiones vertical y horizontal Supongamos que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, alargar verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = (1/c)\,f(x)$, comprimir verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = f(cx)$, comprimir horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = f(x/c)$, alargar horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = -f(x)$, reflejar la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje x
$y = f(-x)$, reflejar la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje y

La figura 3 ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2 \cos x$ multiplicamos la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga verticalmente por un factor de 2.

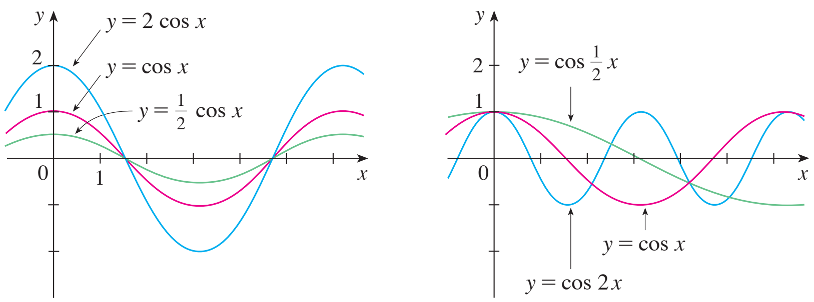


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use transformaciones para graficar $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN La gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, obtenida de la figura 13a) en la sección 1.2, se muestra en la figura 4a). En otras partes de la figura se ha trazado $y = \sqrt{x} - 2$ desplazándola 2 unidades hacia abajo, $y = \sqrt{x - 2}$ por desplazamiento de 2 unidades a la derecha, $y = -\sqrt{x}$ reflejando sobre el eje x, $y = 2\sqrt{x}$ estirando verticalmente por un factor de 2 y $y = \sqrt{-x}$ reflejando sobre el eje y.

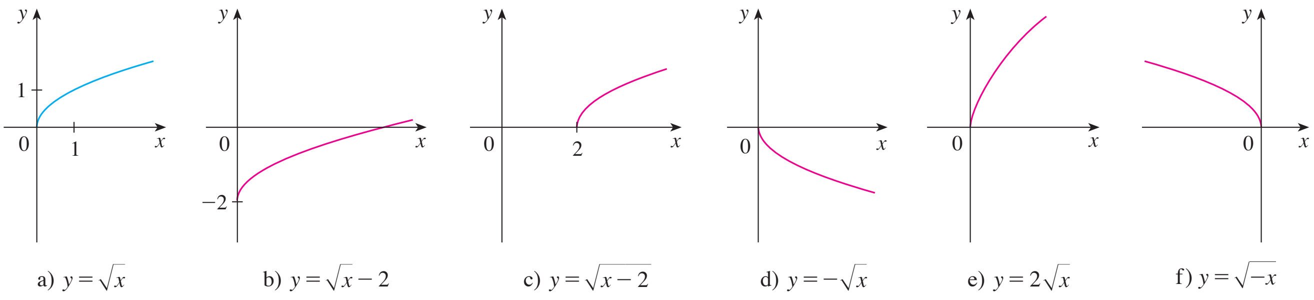


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Completando el cuadrado, escribimos la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto significa que obtenemos la gráfica deseada iniciando con la parábola $y = x^2$ y desplazándola 3 unidades a la izquierda y, a continuación, 1 unidad hacia arriba (véase la figura 5).

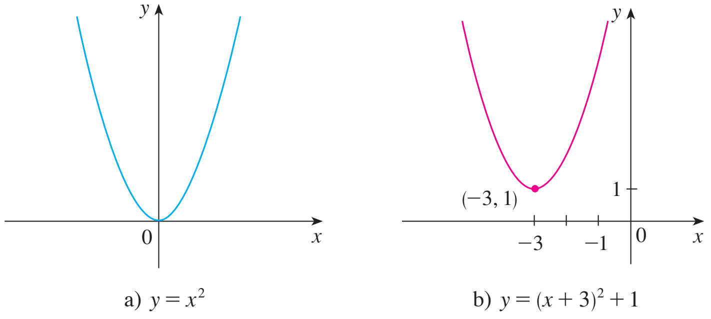


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Trace las gráficas de las siguientes funciones.
a) $y = \text{sen}\ 2x$ b) $y = 1 - \text{sen}\ x$

SOLUCIÓN
a) Obtenemos la gráfica de $y = \text{sen}\ 2x$ comprimiendo horizontalmente a $y = \text{sen}\ x$ por un factor de 2. (Véanse las figuras 6 y 7). Por tanto, considerando que el periodo de $y = \text{sen}\ x$ es 2π, el periodo de $y = \text{sen}\ 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

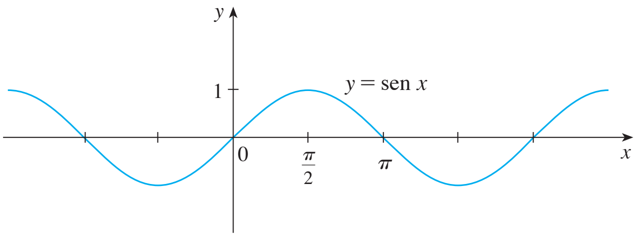


FIGURA 6

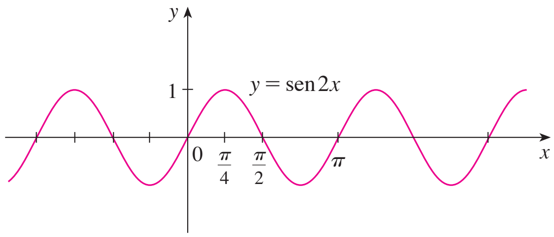


FIGURA 7

b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \text{sen}\ x$, empezamos de nuevo con $y = \text{sen}\ x$. Reflejamos sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = -\text{sen}\ x$ y, a continuación, desplazamos 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \text{sen}\ x$ (véase la figura 8).

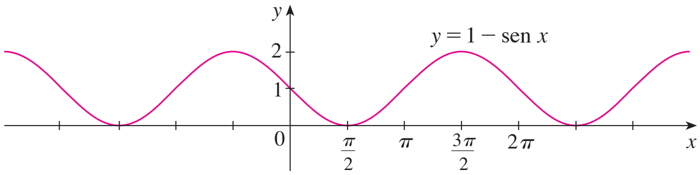


FIGURA 8

EJEMPLO 4 La figura 9 muestra gráficas del número de horas de luz natural como funciones de la época del año en varias latitudes. Dado que Filadelfia está situada a unos 40°N de latitud, encuentre una función que modele la duración de la luz de día en Filadelfia.

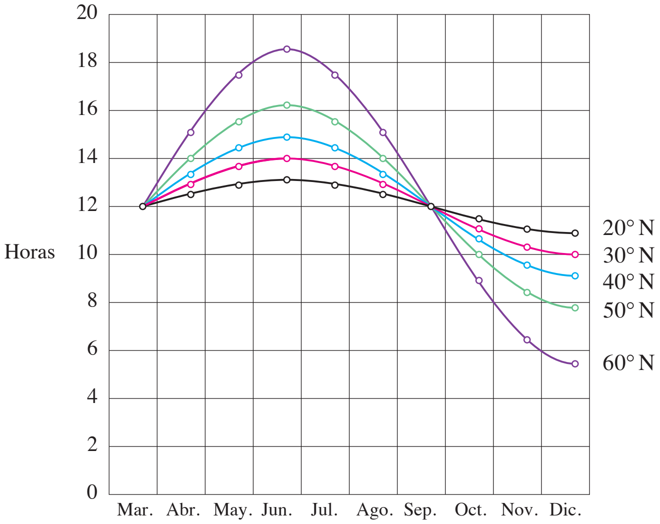


FIGURA 9
Gráfica de la duración de luz de día del 21 de marzo al 21 de diciembre en diversas latitudes
Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nueva York, 1935), pág. 40.

SOLUCIÓN Observe que cada curva se parece a una función seno desplazada y alargada. Mirando la curva azul vemos que, en la latitud de Filadelfia, la luz diurna dura unas 14.8 horas el 21 de junio y 9.2 horas el 21 de diciembre, por lo que la amplitud de la curva (el factor por el cual tenemos que alargar verticalmente la curva seno) es $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

¿Por qué factor necesitamos alargar horizontalmente la curva seno si medimos el tiempo t en días? Como hay aproximadamente 365 días en un año, el periodo de nuestro modelo debe ser 365. Pero el periodo de $y = \text{sen}\, t$ es 2π, por lo que el factor de alargamiento horizontal es $c = 2\pi/365$.

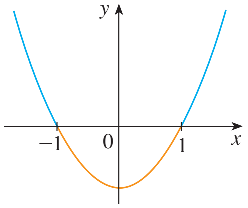
También notamos que la curva comienza su ciclo el 21 de marzo, el día 80 del año, así que tenemos que desplazar la curva 80 unidades a la derecha. Además, debemos desplazarla 12 unidades hacia arriba. Por tanto, modelamos la duración del día en Filadelfia el t-ésimo día del año por la función

$$L(t) = 12 + 2.8\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

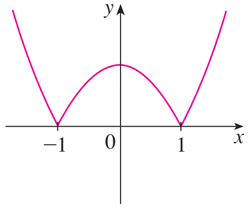
Otra transformación de cierto interés se obtiene tomando el *valor absoluto* de una función. Si $y = |f(x)|$ entonces, de acuerdo con la definición de valor absoluto, $y = f(x)$ cuando $f(x) \geqslant 0$ y $y = -f(x)$ cuando $f(x) < 0$. Esto nos dice cómo obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$: la parte de la gráfica que se encuentra por encima del eje x sigue siendo la misma; la parte que se encuentra debajo del eje x se refleja sobre este eje.

V EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN En primer lugar, graficamos la parábola $y = x^2 - 1$ en la figura 10a), desplazando verticalmente 1 unidad hacia abajo la parábola $y = x^2$. Vemos que la gráfica se encuentra por debajo del eje x cuando: $-1 < x < 1$, por lo que reflejamos esa parte de la gráfica sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ en la figura 10b).



a) $y = x^2 - 1$



b) $y = |x^2 - 1|$

FIGURA 10

Combinación de funciones

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g en forma similar a la suma, resta, multiplicación y división de números reales. La suma y diferencia de funciones se definen mediante:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el dominio de g es B, el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque $f(x)$ y $g(x)$ tienen que estar definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, por lo que el dominio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$.

Del mismo modo, se definen el producto y cociente de funciones por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es $A \cap B$, pero no podemos dividir por 0, así que el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, entonces el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$, o bien $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Hay otra forma de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Por ejemplo, supongamos que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y es una función de u y u es, a su vez, una función de x, se concluye que, finalmente, y es una función de x. Podemos calcular esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

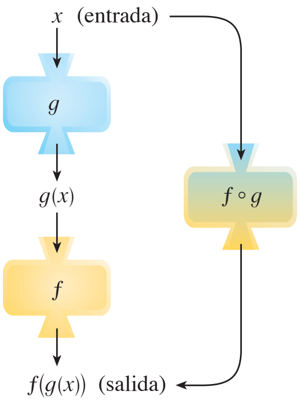


FIGURA 11
La máquina $f \circ g$ se compone de la máquina g (primero) y la máquina f (después)

Este procedimiento se denomina *composición* porque la nueva función se *compone* de las dos funciones dadas f y g.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, empezamos con un número x en el dominio de g y encontramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos calcular el valor de $f(g(x))$. Observe que la salida de una función se usa como entrada para la próxima función. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida mediante la sustitución de g en f y se llama la *composición* (o *compuesta*) de f y g, y se denota por $f \circ g$ ("f círculo g").

Definición Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la **composición** de f y g) se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La figura 11 muestra $f \circ g$ en términos de máquinas.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre la composición de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

NOTA En el ejemplo 6 puede verse que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y, a continuación, se aplica f. En el ejemplo 6, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y, *después*, eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *primero* eleva al cuadrado y, *después*, resta 3.

V EJEMPLO 7 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre cada una de las siguientes funciones y su dominio.

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Si $0 \leqslant a \leqslant b$, entonces $a^2 \leqslant b^2$.

Para que $\sqrt{x}$ esté definida debe cumplirse con que $x \geqslant 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debe cumplirse con que $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, esto es, $\sqrt{x} \leqslant 2$ o $x \leqslant 4$. Así que $0 \leqslant x \leqslant 4$, por lo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geqslant 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. La primera desigualdad significa $x \leqslant 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$, o $2 - x \leqslant 4$ o $x \geqslant -2$. Así, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, por lo que el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la composición $f \circ g \circ h$ se encuentra aplicado primero h, después g y, por último, f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 8 Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$

Hasta ahora ha utilizado la composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en Cálculo es útil a menudo ser capaz de *descomponer* una función compleja en otras más simples, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la fórmula para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, finalmente, eleve al cuadrado. Así, tenemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

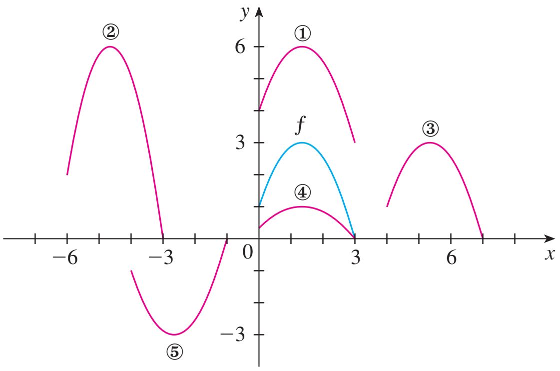
Entonces
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$

1.3 Ejercicios

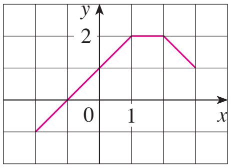
1. Suponga que la gráfica de *f* está dada. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica *f* como sigue:
a) Desplazada 3 unidades hacia arriba.
b) Desplazada 3 unidades hacia abajo.
c) Desplazada 3 unidades hacia la derecha.
d) Desplazada 3 unidades hacia la izquierda.
e) Reflejada respecto al eje *x*.
f) Reflejada respecto a *y*.
g) Alargada verticalmente por un factor de 3.
h) Contraída verticalmente por un factor de 3.

2. Explique cómo se obtiene cada gráfica a partir de la gráfica de $y = f(x)$.
a) $y = f(x) + 8$ b) $y = f(x + 8)$
c) $y = 8f(x)$ d) $y = f(8x)$
e) $y = -f(x) - 1$ f) $y = 8f\left(\frac{1}{8}x\right)$

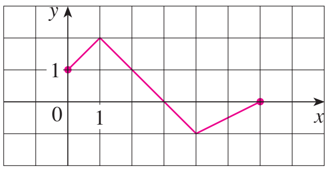
3. La gráfica de $y = f(x)$ está dada. Relacione cada ecuación con su gráfica y argumente sus elecciones.
a) $y = f(x - 4)$ b) $y = f(x) + 3$
c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ d) $y = -f(x + 4)$
e) $y = 2f(x + 6)$



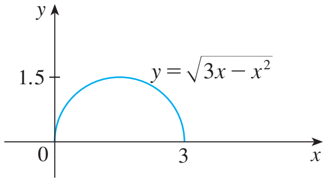
4. La gráfica de *f* está dada. Dibuje las gráficas de las siguientes funciones.
a) $y = f(x) - 2$ b) $y = f(x - 2)$
c) $y = -2f(x)$ d) $y = f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$



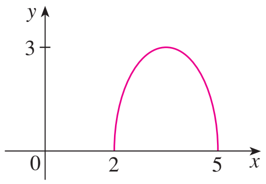
5. La gráfica de *f* está dada. Utilícela para graficar las siguientes funciones.
a) $y = f(2x)$ b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
c) $y = f(-x)$ d) $y = -f(-x)$



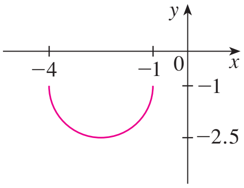
6-7 La gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$ está dada. Utilice transformaciones para crear una función cuya gráfica es como se muestra.



6.



7.



8. a) ¿Cómo es la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ en relación con la gráfica de $y = \text{sen } x$? Utilice su respuesta y la figura 6 para graficar $y = 2 \text{ sen } x$.
b) ¿Cómo es la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ en relación con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Utilice su respuesta y la figura 4a) para graficar $y = 1 + \sqrt{x}$.

9-24 Grafique la función a mano, sin trazar puntos, sino empezando con la gráfica de una de las funciones esenciales de la sección 1.2 y después aplicando las transformaciones apropiadas.

9. $y = \dfrac{1}{x + 2}$ **10.** $y = (x - 1)^3$

11. $y = -\sqrt[3]{x}$ **12.** $y = x^2 + 6x + 4$

13. $y = \sqrt{x - 2} - 1$ **14.** $y = 4 \text{ sen } 3x$

15. $y = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **16.** $y = \dfrac{2}{x} - 2$

17. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ **18.** $y = 1 - 2\sqrt{x + 3}$

19. $y = 1 - 2x - x^2$ **20.** $y = |x| - 2$

21. $y = |x - 2|$ **22.** $y = \dfrac{1}{4}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

23. $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$ **24.** $y = |\cos \pi x|$

25. La ciudad de Nueva Orleáns se encuentra en la latitud 30°N. Utilice la figura 9 para encontrar una función que modele el número de horas de luz diurna en Nueva Orleáns como una función de la época del año. Para comprobar la exactitud de su modelo, utilice el hecho de que el 31 de marzo el Sol sale a las 5:51 y se pone a las 18:18 en esta ciudad.

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

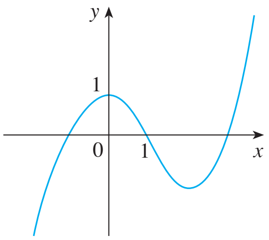
26. Una estrella variable es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye alternativamente. Para la estrella variable más visible, Delta Cephei, el tiempo transcurrido entre periodos de brillo máximo es de 5.4 días, el brillo promedio (o magnitud) de la estrella es 4.0, y su brillo varía en una magnitud de ± 0.35. Encuentre una función que modele el brillo de Delta Cephei, en términos del tiempo.

27. a) ¿Cómo es la gráfica de $y = f(|x|)$ en relación con la gráfica de f?

b) Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen}|x|$.

c) Trace la gráfica de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Utilice la gráfica de f para trazar la de $y = 1/f(x)$. ¿Qué características de f son las más importantes en el trazado de $y = 1/f(x)$? Explique cómo se utilizan.



29-30 Encuentre a) $f + g$, b) $f - g$, c) fg y d) f/g y establezca sus dominios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31-36 Encuentre las funciones a) $f \circ g$, b) $g \circ f$, c) $f \circ f$, y d) $g \circ g$ y sus dominios.

31. $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

37-40 Encuentre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = x^2$

38. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = \sqrt{x}$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41-46 Exprese la función en la forma $f \circ g$

41. $F(x) = (2x + x^2)^4$

42. $F(x) = \cos^2 x$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

45. $v(t) = \sec(t^2)\tan(t^2)$

46. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

47-49 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

47. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

50. Utilice la tabla para evaluar cada una de las siguientes expresiones:

a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(f(1))$

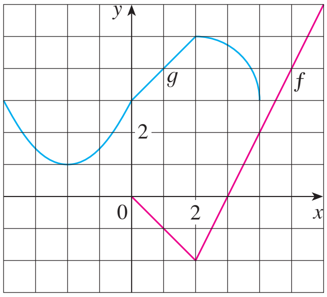
d) $g(g(1))$ e) $(g \circ f)(3)$ f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

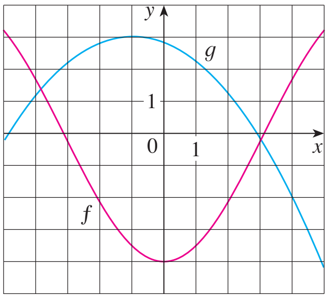
51. Utilice las gráficas dadas de f y g para evaluar cada una de las siguientes expresiones, o explique por qué no están definidas:

a) $f(g(2))$ b) $g(f(0))$ c) $(f \circ g)(0)$

d) $(g \circ f)(6)$ e) $(g \circ g)(-2)$ f) $(f \circ f)(4)$



52. Utilice las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Utilice estas estimaciones para hacer un esbozo de $f \circ g$.



53. Una piedra se deja caer en un lago, creando una onda circular que viaja hacia fuera a una velocidad de 60 cm/s.
a) Exprese el radio r del círculo en función del tiempo t (en segundos).
b) Si A es el área de este círculo como una función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprétela.

54. Un globo esférico está siendo inflado de manera que su radio aumenta a razón de 2 cm/s.
a) Exprese el radio r del balón en función del tiempo t (en segundos).
b) Si V es el volumen del globo en función del radio, encuentre $V \circ r$ e interprétela.

55. Un barco se está moviendo con una velocidad de 30 km/h paralelamente a una costa recta. El barco está a 6 km de la costa y pasa por un faro al mediodía.
a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco en función de la distancia d, que el barco ha recorrido desde el mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.
b) Exprese d como una función de t, el tiempo transcurrido desde el mediodía; es decir, encuentre g de modo que $d = g(t)$.
c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

56. Un avión está volando con una velocidad de 350 km/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el tiempo $t = 0$.
a) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado, en función de t.
b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar en función de d.
c) Utilice la composición para expresar s como una función de t.

57. La **función de Heaviside** H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

y se utiliza en el estudio de circuitos eléctricos para representar aumentos repentinos de la corriente eléctrica, o de voltaje, cuando el interruptor se activa de manera instantánea.
a) Trace la gráfica de la función de Heaviside.
b) Dibuje la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 0$ y se aplican instantáneamente 120 voltios al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$.
c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 5$ segundos y se aplican instantáneamente 240 voltios al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$. (Tenga en cuenta que a partir de $t = 5$ corresponde a una traslación.)

58. La función de Heaviside que se define en el ejercicio 57 también puede utilizarse para definir la **función rampa** $y = ctH(t)$, que representa un aumento gradual del voltaje o de corriente en un circuito.
a) Trace la gráfica de la función rampa $y = tH(t)$.
b) Dibuje la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 0$, y el voltaje se aumenta gradualmente a 120 voltios durante un intervalo de tiempo de 60 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.
c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 7$ segundos y el voltaje se incrementa gradualmente a 100 voltios durante un periodo de 25 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

59. Sean f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$. ¿Es $f \circ g$ también una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?

60. Si usted invierte en dólares a 4% de interés compuesto anualmente, entonces la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es $A(x) = 1.04x$. Encuentre $A \circ A$, $A \circ A \circ A$, y $A \circ A \circ A \circ A$. ¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para la composición de n copias de A.

61. a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense qué operaciones tendrá que realizar en la fórmula para g a fin de determinar la fórmula para h.)
b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.

62. Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$, encuentre una función g tal que $g \circ f = h$.

63. Supongamos que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función par?

64. Supongamos que g es una función impar y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función impar? ¿Qué pasa si f es impar? ¿Qué pasa si f es par?

1.4 Calculadoras graficadoras y computadoras

En esta sección se supone que tiene acceso a una calculadora graficadora o una computadora con software de gráficos. Veremos que el uso de un dispositivo de cómputo nos permite graficar funciones más complicadas y resolver problemas más complejos de lo que sería posible de otra manera. También señalamos algunos de los problemas que pueden presentarse con estas máquinas.

Las calculadoras graficadoras y las computadoras pueden dar gráficas muy precisas de las funciones. Pero veremos en el capítulo 4 que sólo a través del uso del Cálculo podemos estar seguros de que hemos descubierto todos los aspectos interesantes de una gráfica.

Una calculadora graficadora o una computadora muestran una parte de la gráfica de una función en una **ventana rectangular de visualización** o **pantalla de visualización**, a la que nos referimos como un **rectángulo de vista**. La pantalla predeterminada ofrece a

menudo una imagen incompleta o engañosa, por lo que es importante elegir el rectángulo de vista con cuidado. Si optamos por los valores de x que van desde un valor mínimo de $Xmín = a$ hasta un valor máximo de $Xmáx = b$ y que los valores de y varíen desde un mínimo de $Ymín = c$ hasta un máximo de $Ymáx = d$, entonces la parte visible de la gráfica se encuentra en el rectángulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

que se muestra en la figura 1. Nos referimos a este rectángulo como el *rectángulo de vista* de $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

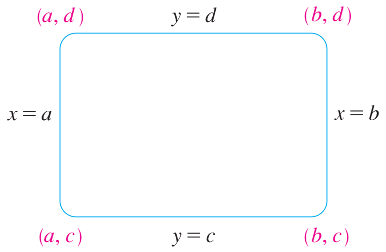


FIGURA 1
Rectángulo de vista $[a, b]$ por $[c, d]$

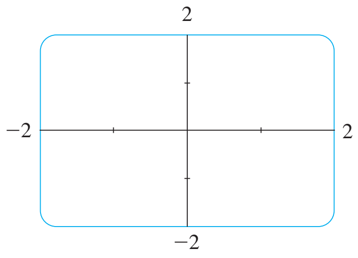
La máquina dibuja la gráfica de una función f como usted lo haría. Traza puntos de la forma $(x, f(x))$ para un cierto número de valores igualmente espaciados de x entre a y b. Si un valor de x no está en el dominio de f, o si $f(x)$ se encuentra fuera del rectángulo de vista, se mueve al siguiente valor de x. La máquina conecta cada punto con el anterior punto dibujado, para formar una representación de la gráfica de f.

EJEMPLO 1 Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en cada uno de los siguientes rectángulos de vista

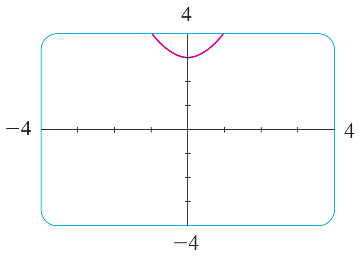
a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1\,000]$

SOLUCIÓN Para el inciso a) seleccionamos el rango ajustando $Xmín = -2$, $Xmáx = 2$, $Ymín = -2$, y $Ymáx = 2$. El gráfico resultante se muestra en la figura 2a). ¡La pantalla está en blanco! Un momento de reflexión da una explicación: observe que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, de modo que $x^2 + 3 \geqslant 3$ para todo x. Así, el rango de la función $f(x) = x^2 + 3$ es $[3, \infty)$. Esto significa que la gráfica de f se encuentra totalmente fuera del rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

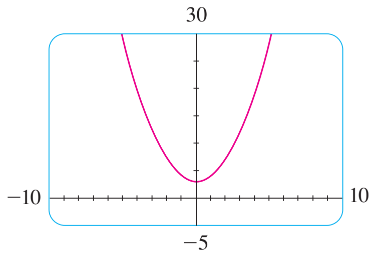
Las gráficas para los rectángulos de vista en los incisos b), c) y d) también se muestran en la figura 2. Observe que obtenemos una imagen más completa de los incisos c) y d), pero en el inciso d) no está claro que la intersección en y es de 3.



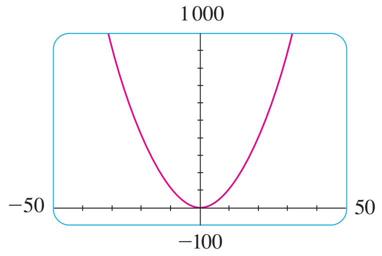
a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$



b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$



c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$



d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1\,000]$

FIGURA 2 Gráficas de $f(x) = x^2 + 3$

En el ejemplo 1 vemos que la elección de un rectángulo de vista puede hacer una gran diferencia en la apariencia de una gráfica. A menudo es necesario cambiar a un rectángulo de vista más amplio para obtener una imagen más completa, una visión más global, de la gráfica. En el siguiente ejemplo podemos ver que el conocimiento del dominio y el rango de una función a veces nos da suficiente información para seleccionar un buen rectángulo de vista.

EJEMPLO 2 Determine un rectángulo de vista apropiado para la función $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ y utilícelo para graficar f.

SOLUCIÓN La expresión para $f(x)$ está definida cuando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

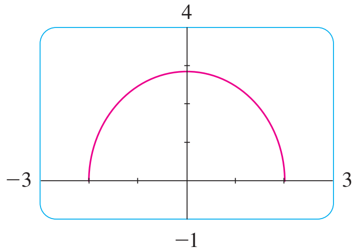


FIGURA 3
$f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$

Por tanto, el dominio de f es el intervalo $[-2, 2]$. También,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

por lo que el rango de f es el intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Elegimos el rectángulo de vista de manera que el intervalo para x sea algo mayor que el dominio, y el intervalo para y sea algo mayor que el rango. Tomando el rectángulo de vista como $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 3.

EJEMPLO 3 Grafique la función $y = x^3 - 150x$.

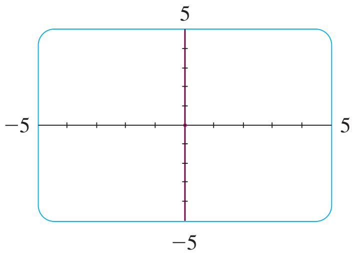


FIGURA 4

SOLUCIÓN Aquí, el dominio es $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales. Eso no nos ayuda a elegir un rectángulo de vista. Vamos a experimentar: si partimos de la pantalla $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obtenemos la gráfica de la figura 4, que aparece en blanco, aunque en realidad la gráfica es tan vertical que se funde con el eje y.

Si cambiamos el rectángulo de vista a $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, se obtiene la imagen que se muestra en la figura 5a). La gráfica parece consistir en líneas verticales, pero sabemos que no puede ser correcta. Si miramos con atención, mientras que el gráfico se está dibujando, vemos que la gráfica deja la pantalla y vuelve a aparecer durante el proceso de representación. Esto indica que tenemos que ver más en la dirección vertical, por lo que hay que cambiar el rectángulo de vista a $[-20, 20]$ por $[-500, 500]$. La gráfica resultante se muestra en la figura 5b), donde se ve que todavía no acaba de revelar todas las características principales de la función, así que tratamos con $[-20, 20]$ por $[-1\,000, 1\,000]$ en la figura 5c). Ahora estamos más seguros de que hemos llegado a un rectángulo de vista más adecuado. En el capítulo 4 veremos que la gráfica en la figura 5c) en efecto, revela todas las principales características de la función.

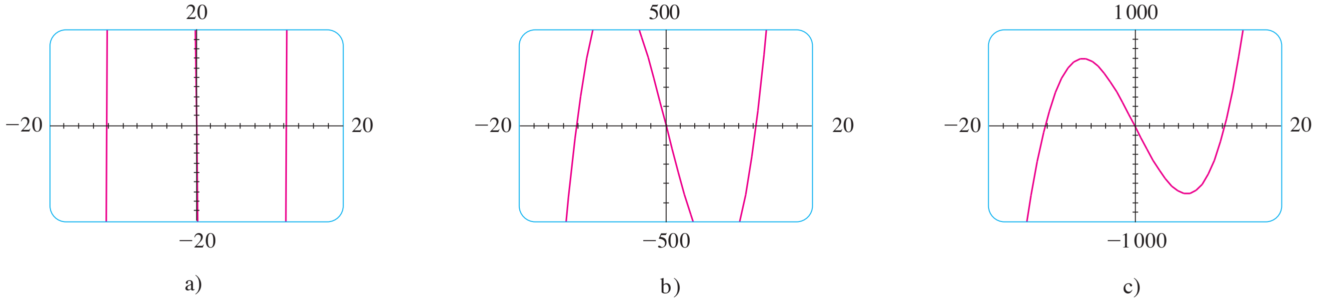


FIGURA 5 Gráficas de $y = x^3 - 150x$

V EJEMPLO 4 Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en un rectángulo de vista apropiado.

SOLUCIÓN La figura 6a) muestra la gráfica producida por una calculadora graficadora sobre una pantalla de $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista, la gráfica parece ser

razonable. Pero si cambiamos el rectángulo de vista a los que se muestran en los siguientes incisos de la figura 6, las gráficas son muy diferentes. Algo extraño está sucediendo.

El aspecto de las gráficas en la figura 6 depende de la máquina utilizada. Las gráficas que se obtienen con su dispositivo de graficación podrían no parecerse a estas figuras, pero también son muy inexactas.

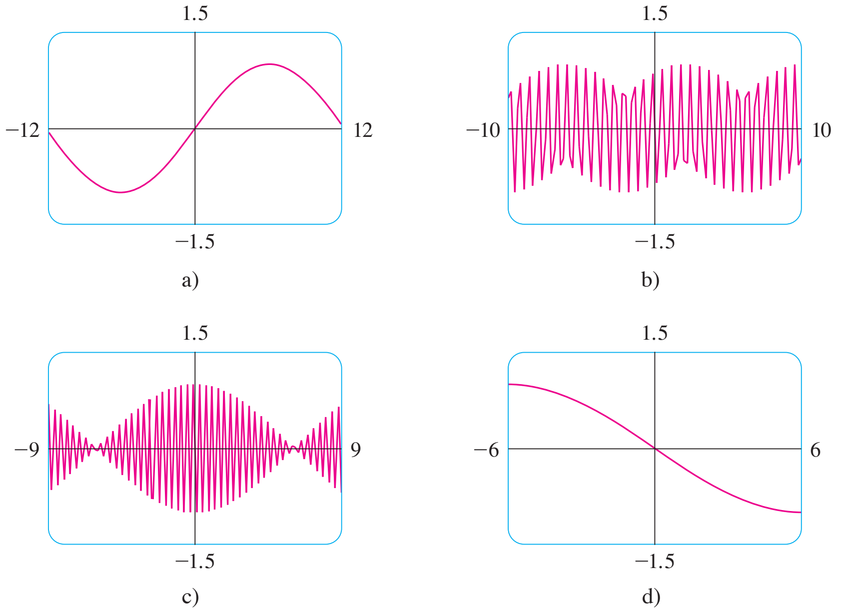


FIGURA 6
Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en cuatro rectángulos de vista

A fin de explicar las grandes diferencias en la apariencia de estas gráficas y de encontrar un rectángulo de vista adecuado, tenemos que encontrar el periodo de la función $y = \text{sen } 50x$. Sabemos que la función $y = \text{sen } x$ tiene periodo 2π y que la gráfica de $y = \text{sen } 50x$ está comprimida horizontalmente por un factor de 50, por lo que el periodo de $y = \text{sen } 50x$ debe ser

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

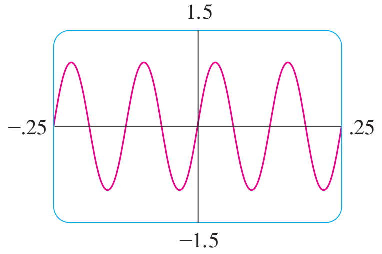


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen } 50x$

Esto sugiere que sólo debemos ocuparnos de los pequeños valores de x a fin de mostrar sólo algunas oscilaciones de la gráfica. Si optamos por el rectángulo de vista $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 7.

Ahora vemos lo que salió mal en la figura 6. Las oscilaciones de $y = \text{sen } 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora representa los puntos y los une, se pierde la mayoría de los puntos máximos y mínimos y, por tanto, da una impresión engañosa de la gráfica.

Hemos visto que el uso de un rectángulo de vista inadecuado puede dar una falsa impresión de la gráfica de una función. En los ejemplos 1 y 3 se resolvió el problema cambiando a un rectángulo de vista más amplio. En el ejemplo 4 tuvimos que hacer el rectángulo de vista más pequeño. En el siguiente ejemplo vemos una función para la que no existe un rectángulo de vista sencillo que revele la verdadera forma de la gráfica.

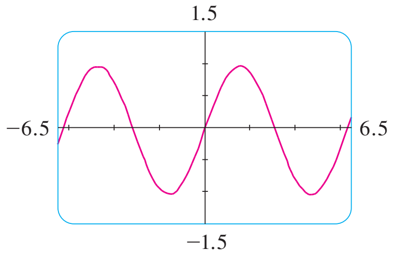


FIGURA 8

V EJEMPLO 5 Grafique la función $f(x) = \text{sen } x + \frac{1}{100}\cos 100x$.

SOLUCIÓN La figura 8 muestra la gráfica f producida por una calculadora graficadora con rectángulo de vista de $[-6.5, 6.5]$ por $[-1.5, 1.5]$. Se parece mucho a la gráfica de $y = \text{sen } x$, pero con algunas protuberancias. Si nos acercamos al rectángulo de vista

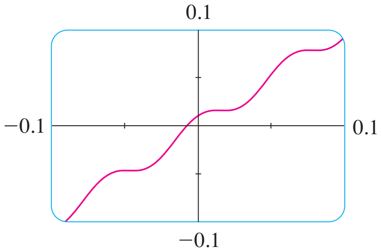


FIGURA 9

$[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$, podemos ver mucho más claramente la forma de estas protuberancia en la figura 9. La razón de este comportamiento es que el segundo término, $\frac{1}{100}\cos 100x$, es muy pequeño en comparación con el primer término, sen x. Así que en realidad necesitamos dos gráficas para ver la verdadera naturaleza de esta función.

EJEMPLO 6 Dibuje la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

SOLUCIÓN La figura 10a) muestra la gráfica generada por una calculadora graficadora con un rectángulo de vista de $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. En la conexión de puntos sucesivos de la gráfica, la calculadora produce un segmento de recta con inclinación de la parte superior a la parte inferior de la pantalla. Este segmento de recta no es realmente parte de la gráfica. Observe que el dominio de la función $y = 1/(1 - x)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$. Podemos eliminar la extraña recta casi vertical experimentando con un cambio de escala. Cuando cambiamos al rectángulo de vista más pequeño $[-4.7, 4.7]$ por $[-4.7, 4.7]$, para esta calculadora en particular, obtenemos la mucho mejor gráfica de la figura 10b).

Otra forma de evitar la extraña recta es cambiar el modo de representación gráfica de la calculadora, para que los puntos no estén conectados.

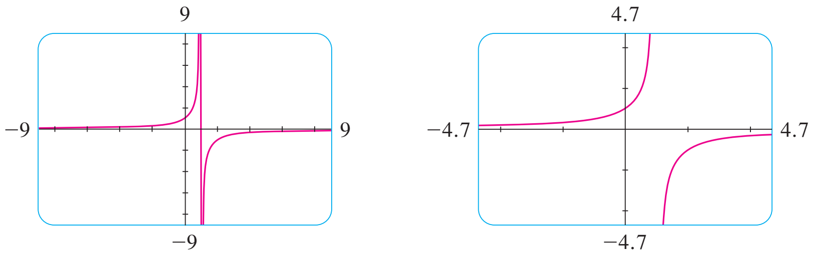


FIGURA 10

EJEMPLO 7 Grafique la función $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUCIÓN Algunos dispositivos de graficación muestran la gráfica que se muestra en la figura 11, mientras que otras producen una gráfica como la de la figura 12. Sabemos de la sección 1.2 (figura 13) que la gráfica de la figura 12 es correcta, así que, ¿qué sucedió en la figura 11? La explicación es que algunas máquinas calculan la raíz cúbica de x mediante un logaritmo, que no está definido si x es negativo, por lo que sólo se produce la mitad derecha de la gráfica.

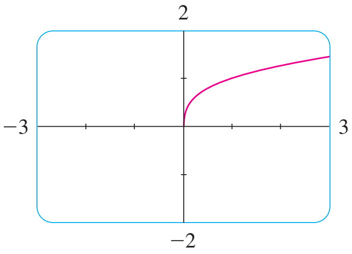


FIGURA 11

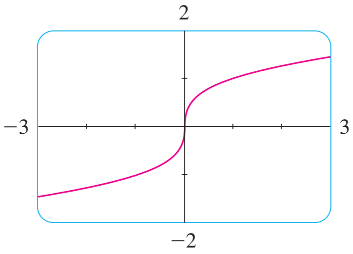


FIGURA 12

Puede obtener la gráfica correcta con Maple si primero escribe

```
with(RealDomain);
```

Usted debe experimentar con su propia máquina para ver cuál de estas dos gráficas se produce. Si se obtiene la gráfica de la figura 11, puede obtener la imagen correcta al trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

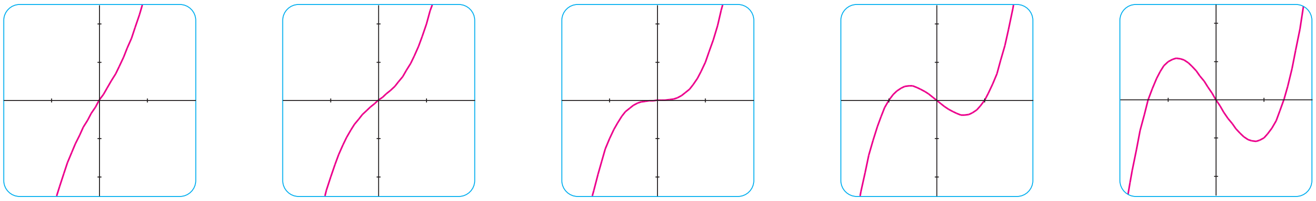
Note que esta función es igual a $\sqrt[3]{x}$ (excepto cuando $x = 0$).

Para entender cómo la expresión de una función se relaciona con su gráfica, es útil graficar una **familia de funciones**, es decir, un conjunto de funciones cuyas ecuaciones están relacionadas. En el siguiente ejemplo graficamos miembros de una familia de polinomios cúbicos.

V EJEMPLO 8 Grafique la función $y = x^3 + cx$ para varios valores del número c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c varía?

TEC en Visual 1.4 puede usted ver una animación de la figura 13.

SOLUCIÓN La figura 13 muestra las gráficas de $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ y -2. Vemos que, para valores positivos de c, la gráfica crece de izquierda a derecha, sin puntos máximos o mínimos (picos o valles). Cuando $c = 0$, la curva es plana en el origen. Cuando c es negativa, la curva tiene un punto máximo y un punto mínimo. Cuando c disminuye, el punto máximo se hace más alto, y el mínimo, más bajo.

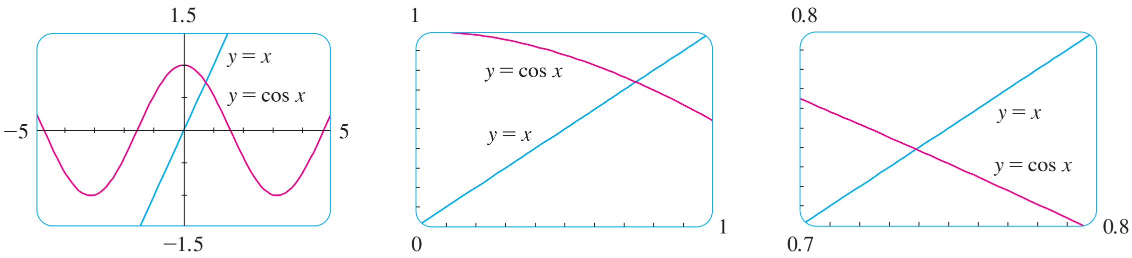


a) $y = x^3 + 2x$ b) $y = x^3 + x$ c) $y = x^3$ d) $y = x^3 - x$ e) $y = x^3 - 2x$

FIGURA 13
Varios miembros de la familia de funciones $y = x^3 + cx$, graficadas en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2.5, 2.5]$

EJEMPLO 9 Encuentre la solución de la ecuación $\cos x = x$ con una aproximación de dos decimales.

SOLUCIÓN Las soluciones de la ecuación $\cos x = x$ son las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = \cos x$, $y = x$. De la figura 14a) vemos que sólo hay una solución y se encuentra que entre 0 y 1. Acercando el rectángulo de vista a $[0, 1]$ por $[0, 1]$, podemos ver en la figura 14b) que la raíz se encuentra entre 0.7 y 0.8. Así que nos acercamos más con el rectángulo de vista $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ en la figura 14c). Al mover el cursor hasta el punto de intersección de las dos curvas, o mediante la inspección y el hecho de que la escala en el eje x es de 0.01, vemos que la solución de la ecuación es de 0.74. (Muchas calculadoras tienen una característica intersección incorporada.)



a) $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$ escala: $x = 1$
b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$ escala: $x = 0.1$
c) $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ escala: $x = 0.01$

FIGURA 14
Localización de las raíces de $\cos x = x$

1.4 Ejercicios

1. Utilice una calculadora graficadora o equipo de cómputo para determinar cuáles de los rectángulos de vista dados produce la gráfica más adecuada de la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$.
a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$ b) $[0, 10]$ por $[0, 2]$
c) $[0, 10]$ por $[0, 10]$

2. Utilice una calculadora graficadora o equipo de cómputo para determinar cuáles de los rectángulos de vista dados produce la gráfica más adecuada de la función $f(x) = x^4 - 16x^2 + 20$.
a) $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$ b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
c) $[-50, 50]$ por $[-50, 50]$ d) $[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

3-14 Determine un rectángulo de vista apropiado para las funciones dadas y utilícelo para trazar la gráfica:

3. $f(x) = x^2 - 36x + 32$
4. $f(x) = x^3 + 15x^2 + 65x$
5. $f(x) = \sqrt{50 - 0.2x}$
6. $f(x) = \sqrt{15x - x^2}$
7. $f(x) = x^3 - 225x$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$
9. $f(x) = \text{sen}^2\,(1\,000x)$
10. $f(x) = \cos\,(0.001x)$
11. $f(x) = \text{sen}\,\sqrt{x}$
12. $f(x) = \sec\,(20\pi x)$
13. $y = 10\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,100x$
14. $y = x^2 + 0.02\,\text{sen}\,50x$

15. a) Ensaye para encontrar un rectángulo de vista apropiado para $f(x) = (x - 10)^3\, 2^{-x}$.
b) ¿Necesita más de un rectángulo de vista? ¿Por qué?

16. Grafique la función $f(x) = x^2\sqrt{30 - x}$ en un rectángulo de vista apropiado. ¿Qué parte de la gráfica parece perderse?

17. Grafique la elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ graficando las funciones cuyos gráficas son las mitades superior e inferior de la elipse.

18. Grafique la hipérbola $y^2 - 9x^2 = 1$ graficando las funciones cuyos gráficos son las ramas superior e inferior de la hipérbola.

19-20 ¿Las gráficas se intersectan en el rectángulo de vista dado? Si lo hacen, ¿cuántos puntos de intersección hay?

19. $y = 3x^2 - 6x + 1$, $y = 0.23x - 2.25$; $[-1, 3]$ por $[-2.5, 1.5]$

20. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

21-23 Encuentre todas las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones con una aproximación de dos decimales.

21. $x^4 - x = 1$
22. $\sqrt{x} = x^3 - 1$
23. $\tan x = \sqrt{1 - x^2}$

24. Vimos en el ejemplo 9 que la ecuación $\cos x = x$ tiene exactamente una solución.
a) Utilice una gráfica para mostrar que la ecuación $\cos x = 0.3x$ tiene tres soluciones y encuentre sus valores con una aproximación de dos decimales.
b) Encuentre un valor aproximado de m tal que la ecuación $\cos x = mx$ tenga exactamente dos soluciones.

25. Utilice gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = 10x^2$ y $g(x) = x^3/10$ es finalmente más grande (es decir, cuando x es muy grande).

26. Utilice gráficas para determinar cuál de la funciones $f(x) = x^4 - 100x^3$ y $g(x) = x^3$ es finalmente más grande.

27. ¿Para qué valores de x es cierto que $|\tan x - x| < 0.01$ y $-\pi/2 < x < \pi/2$?

28. Grafique los polinomios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ y $Q(x) = 3x^5$ en la misma pantalla, utilizando primero el rectángulo de vista de $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y, a continuación, cambiándolo a $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$. ¿Qué observa en estas gráficas?

29. En este ejercicio consideramos la familia de funciones raíz $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo.
a) Grafique las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[6]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de vista $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.
b) Grafique las funciones $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Véase el ejemplo 7.)
c) Grafique las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.
d) ¿Qué conclusiones puede usted obtener de estas gráficas?

30. En este ejercicio consideramos la familia de funciones $f(x) = 1/x^n$, donde n es un entero positivo.
a) Grafique las funciones $y = 1/x$, $y = 1/x^3$ en la misma pantalla utilizando el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.
b) Grafique las funciones $y = 1/x^2$ y $y = 1/x^4$ en la misma pantalla utilizando el mismo rectángulo de vista que en el inciso a).
c) Grafique todas las funciones de los incisos a) y b) en la misma pantalla utilizando el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.
d) ¿Qué conclusiones puede obtener de estas gráficas?

31. Grafique la función $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando cambia c?

32. Grafique la función $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ para varios valores de c. Describa cómo afectan la gráfica los cambios en c.

Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

33. Grafique la función $y = x^n 2^{-x}$, $x \geqslant 0$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. ¿Cómo cambia la gráfica cuando n aumenta?

34. Las curvas con ecuaciones

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

se llaman **curvas nariz de bala**. Grafique algunas de estas curvas para saber por qué. ¿Qué pasa cuando c aumenta?

35. ¿Qué pasa con la gráfica de la ecuación $y^2 = cx^3 + x^2$ cuando c varía?

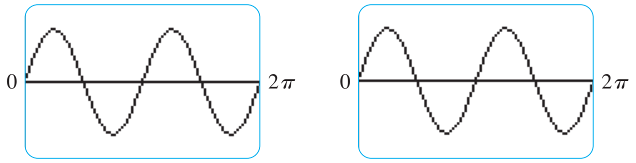
36. Este ejercicio explora el efecto de la función g en el interior de una función compuesta $y = f(g(x))$.

a) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ utilizando el rectángulo de vista [0, 400] por [−1.5, 1.5]. ¿De qué manera esta gráfica difiere de la gráfica de la función seno?

b) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$, utilizando el rectángulo de vista [−5, 5] por [−1.5, 1.5] ¿De qué manera esta gráfica difiere de la gráfica de la función seno?

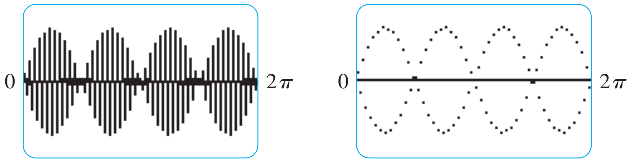
37. La figura muestra las gráficas de $y = \operatorname{sen} 96x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ como se muestra en la calculadora graficadora TI-83. La primera gráfica es inexacta. Explique por qué las dos gráficas parecen idénticas.

[*Sugerencia:* la ventana de graficación de la TI-83 es de 95 pixeles de ancho. ¿Qué puntos específicos grafica la calculadora?]



$y = \operatorname{sen} 96x$ $\qquad$ $y = \operatorname{sen} 2x$

38. La primera gráfica que aparece en la figura es la de $y = \operatorname{sen} 45x$ como la muestra una TI-83. Es inexacta y, por eso, para ayudar a explicar su aspecto en la segunda gráfica, se traza la curva de nuevo con el modo de puntos. ¿Cuál de las dos curvas senoidales parece estar graficando? Muestre que cada punto sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} 45x$ que eligió graficar la TI-83 está, de hecho, sobre una de estas curvas. (La TI-83 grafica en ventanas de 95 píxeles de ancho.)



1.5 Funciones exponenciales

La función $f(x) = 2^x$ se llama una *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No debe confundirse con la $g(x)$ de la función potencia $g(x) = x^2$, en la que la variable está en la base.

En el apéndice G hay un enfoque alternativo a las funciones exponenciales y logarítmicas mediante cálculo Integral.

En general, una **función exponencial** es una de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva. Recordemos el significado de esto.

Si $x = n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Si $x = 0$, entonces $a^0 = 1$, y si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son números enteros y $q > 0$, entonces

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Pero, ¿cuál es el significado de a^x si x es un número irracional? Por ejemplo, ¿qué significa $2^{\sqrt{3}}$ o 5^π?

Para ayudarnos a responder esta pregunta, examinemos la gráfica de la función $y = 2^x$, donde x es racional. Una representación de esta gráfica se muestra en la figura 1. Queremos ampliar el dominio de $y = 2^x$ para incluir tanto los números racionales como los irracionales.

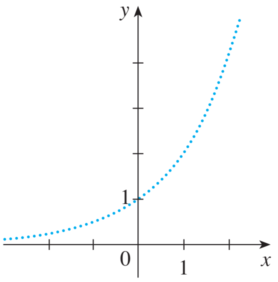


FIGURA 1
Representación de $y = 2^x$, con x racional

Hay huecos en la gráfica de la figura 1 correspondientes a valores irracionales de x. Queremos llenarlos mediante la definición de $f(x) = 2^x$, donde $x \in \mathbb{R}$, por lo que f es una función creciente. En particular, puesto que el número irracional $\sqrt{3}$ satisface

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

debemos tener

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

y sabemos qué significan $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$, ya que 1.7 y 1.8 son números racionales. Del mismo modo, si usamos mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, obtenemos mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
1.73 < \sqrt{3} < 1.74 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
1.732 < \sqrt{3} < 1.733 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\
1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\
1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad &\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Una demostración de este hecho se da en J. Marsden y A. Weinstein, *Cálculo Ilimitado* (Menlo Park, California, 1981). Para una versión en línea, consulte caltechbook.library.caltech.edu/197/

Puede demostrarse que hay exactamente un número que es mayor que todos los números

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

y menor que todos los números

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

A este número lo definimos como $2^{\sqrt{3}}$ y, utilizando este procedimiento de aproximación, podemos obtenerlo con una aproximación de seis decimales:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

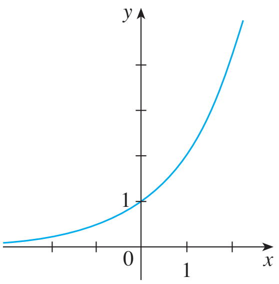


FIGURA 2
$y = 2^x$, para x real

De la misma manera, podemos definir 2^x (o a^x, si $a > 0$) donde x es cualquier número irracional. En la figura 2 se muestra cómo todos los huecos en la figura 1 han sido llenados para completar la gráfica de la función $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$.

Las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = a^x$ se muestran en la figura 3 para varios valores de la base a. Tenga en cuenta que todas estas gráficas pasan por el mismo punto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Note también que cuando la base a se hace más grande, la función exponencial crece más rápidamente (para $x > 0$).

Si $0 < a < 1$, entonces a^x se aproxima a 0 cuando x es muy grande. Si $a > 1$, entonces a^x se aproxima a 0 cuando x disminuye al tomar valores negativos. En ambos casos el eje x es una asíntota horizontal. Estas cuestiones se tratan en la sección 2.6.

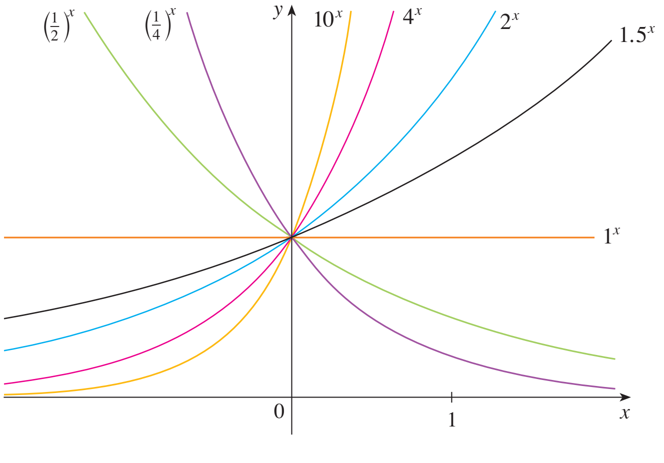


FIGURA 3

Puede verse en la figura 3 que existen básicamente tres tipos de funciones exponenciales $y = a^x$. Si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece; si $a = 1$, es una constante, y si $a > 1$, crece. Estos tres casos se ilustran en la figura 4. Observe que si $a \neq 1$, entonces la función exponencial $y = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Note también que, dado que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$ es justamente la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ sobre el eje y.

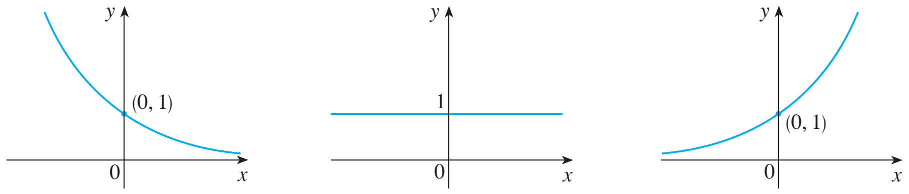


FIGURA 4 a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ b) $y = 1^x$ c) $y = a^x$, $a > 1$

Una de las razones de la importancia de la función exponencial se encuentra en las siguientes propiedades. Si x y y son números racionales, entonces estas leyes son bien conocidas del álgebra elemental. Puede demostrarse que seguirá siendo así para números reales x y y arbitrarios.

www.stewartcalculus.com
Para un repaso de las leyes de exponentes, haga clic en *Review of Algebra*.

Leyes de los exponentes Si a y b son números positivos, y los números x y y son reales cualesquiera, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 Grafique la función $y = 3 - 2^x$ y determine su dominio y rango.

Para un repaso de la reflexión y desplazamiento de gráficas, consulte la sección 1.3.

SOLUCIÓN Primero reflejamos la gráfica de $y = 2^x$ [se muestran en las figuras 2 y 5a)] sobre el eje x para obtener la gráfica de $y = -2^x$ en la figura 5b). Después desplazamos 3 unidades hacia arriba la gráfica de $y = -2^x$ para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ en la figura 5c). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-\infty, 3)$.

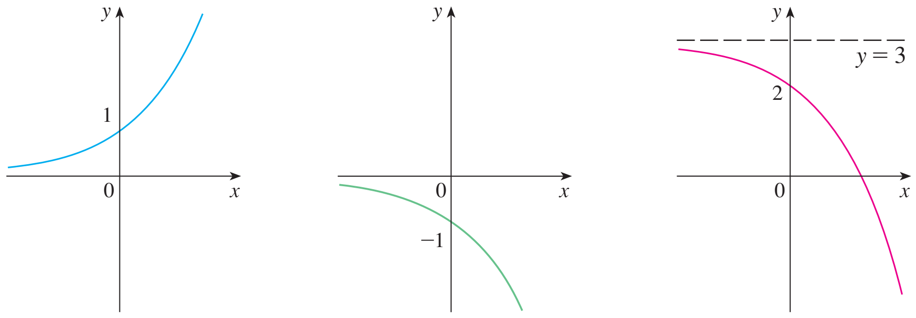


FIGURA 5 a) $y = 2^x$ b) $y = -2^x$ c) $y = 3 - 2^x$

V EJEMPLO 2 Utilice un dispositivo de graficación para comparar la función exponencial $f(x) = 2^x$ con la de la función potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

SOLUCIÓN La figura 6 muestra ambas funciones representadas gráficamente en el rectángulo de vista $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que las gráficas se intersectan tres veces, pero para $x > 4$ la gráfica de $f(x) = 2^x$ permanece por encima de la gráfica de $g(x) = x^2$. La figura 7 da una visión más global y muestra que para grandes valores de x, la función exponencial $y = 2^x$ crece mucho más rápidamente que la función potencia $y = x^2$.

En el ejemplo 2 se muestra que $y = 2^x$ aumenta más rápidamente que $y = x^2$. Para demostrar lo rápido que $f(x) = 2^x$ aumenta, vamos a realizar el siguiente experimento mental. Supongamos que empezamos con un trozo de papel de una milésima de pulgada de espesor y lo doblamos por la mitad 50 veces. Cada vez que dobla el papel por la mitad, el grosor del papel se duplica, por lo que el grosor del papel resultante sería $2^{50}/1\,000$ pulgadas. ¿De qué grosor cree usted que es? ¡Más de 17 millones de millas!

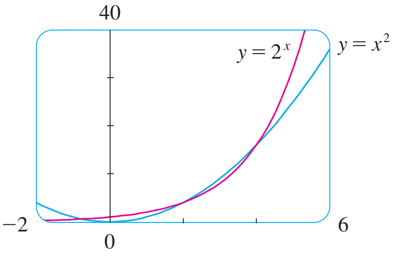


FIGURA 6

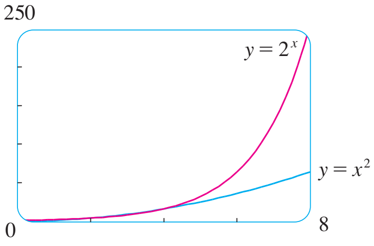


FIGURA 7

Aplicaciones de las funciones exponenciales

La función exponencial ocurre con mucha frecuencia en los modelos matemáticos de las ciencias naturales y sociales. Aquí le indicamos brevemente cómo surge en la descripción del crecimiento de una población. En capítulos posteriores seguiremos estas y otras aplicaciones en mayor detalle.

En primer lugar, consideramos una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Supongamos que por muestreo de la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1\,000$, entonces tenemos

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1\,000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1\,000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1\,000$$

De este patrón, parece ser que, en general:

$$p(t) = 2^t \times 1\,000 = (1\,000)2^t$$

Esta función de la población es un múltiplo constante de la función exponencial $y = 2^t$, por lo que muestra el rápido crecimiento que hemos observado en las figuras 2 y 7. En condiciones ideales (espacio ilimitado, nutrición y la ausencia de enfermedad), este crecimiento exponencial es típico de lo que realmente ocurre en la naturaleza.

¿Qué pasa con la población humana? La tabla 1 muestra los datos de la población del mundo en el siglo XX, y en la figura 8 se muestra la gráfica de dispersión correspondiente.

TABLA 1

t	Población (millones)
0	1 650
10	1 750
20	1 860
30	2 070
40	2 300
50	2 560
60	3 040
70	3 710
80	4 450
90	5 280
100	6 080
110	6 870

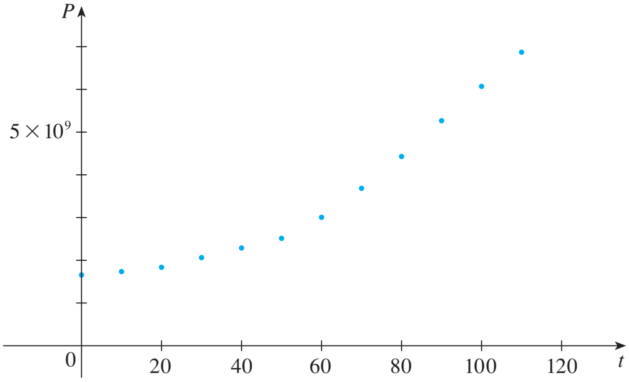


FIGURA 8 Gráfica de dispersión para el crecimiento de la población mundial

El patrón de los puntos de datos en la figura 8 sugiere un crecimiento exponencial, por eso usamos una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para aplicar el método de mínimos cuadrados y obtener el modelo exponencial

$$P = (1436.53) \cdot (1.01395)^t$$

donde $t = 0$ corresponde a 1900. La figura 9 muestra la gráfica de esta función exponencial junto con los puntos de datos originales. Vemos que la curva exponencial ajusta razonablemente bien en el conjunto de datos. El periodo de crecimiento relativamente lento de la población se explica por las dos Guerras Mundiales y la Gran Depresión de la década de 1930.

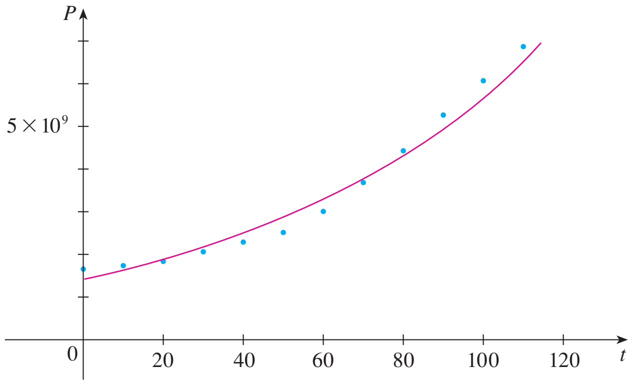


FIGURA 9
Modelo exponencial para el crecimiento de población

El número *e*

De todas las posibles bases para una función exponencial, hay una que es más conveniente para los fines del Cálculo. La elección de una base a está influida por la forma en que la gráfica de $y = a^x$ cruza el eje y. Las figuras 10 y 11 muestran las rectas tangentes a las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto (0, 1). (Se definirán las rectas tangentes de manera precisa en la sección 2.7. Para los presentes fines, puede considerarse que la recta tangente a una gráfica exponencial en un punto es la recta que toca la gráfica sólo en ese punto.) Si medimos las pendientes de estas rectas tangentes en (0, 1), encontramos que $m \approx 0.7$ para $y = 2^x$ y $m \approx 1.1$ para $y = 3^x$.

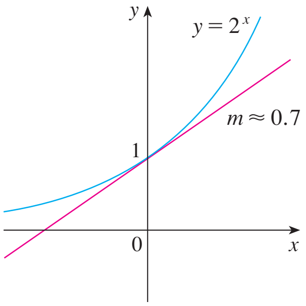


FIGURA 10

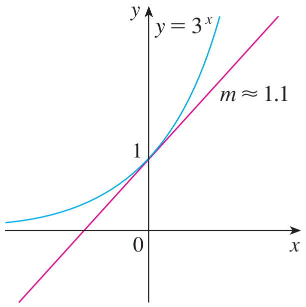


FIGURA 11

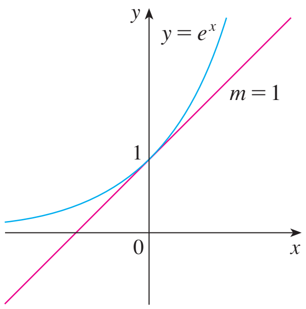


FIGURA 12
La función exponencial natural interseca al eje y con una pendiente igual a 1

Resulta que, como veremos en el capítulo 3, algunas de las fórmulas del Cálculo quedarán muy simplificadas si elegimos la base a para la que la pendiente de la tangente de recta a $y = a^x$ en (0, 1) es *exactamente* 1. (Véase la figura 12.) De hecho, *existe* tal número y se denota con la letra e. (Esta notación fue elegida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.) En vista de las figuras 10 y 11, no causa ninguna sorpresa que el número e se encuentre entre 2 y 3 y que la gráfica de $y = e^x$ se halle entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Véase la figura 13.) En el capítulo 3 veremos que el valor de e, con una aproximación de cinco decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

A la función $f(x) = e^x$ la llamamos **función exponencial natural**.

TEC Module 1.5 le permite graficar funciones exponenciales con diversas bases y sus rectas tangentes para calcular más de cerca el valor de a para la cual la recta tangente tiene pendiente 1.

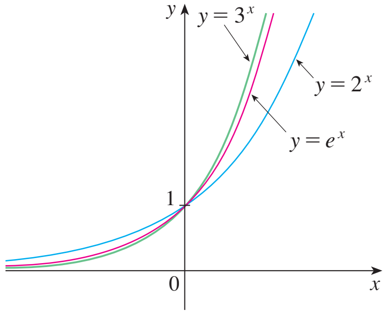
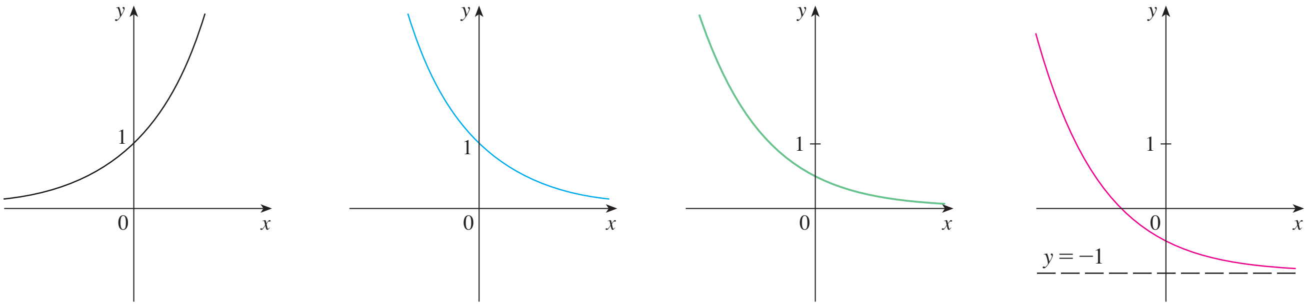


FIGURA 13

V EJEMPLO 3 Grafique la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y establezca el dominio y el rango.

SOLUCIÓN Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ de las figuras 12 y 14a) y la reflejamos sobre el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ en la figura 14b). (Observe que la gráfica interseca el eje y con una pendiente de -1.) A continuación, se comprime la gráfica verticalmente por un factor de dos para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en la figura 14c). Por último, se desplazará la gráfica hacia abajo una unidad para obtener la gráfica deseada en la figura 14d). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-1, \infty)$.



a) $y = e^x$ b) $y = e^{-x}$ c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 14

¿Hasta qué valor de x a la derecha cree usted que tendríamos que ir para que la altura de la gráfica de $y = e^x$ sea superior a un millón? En el ejemplo siguiente se muestra el rápido crecimiento de esta función proporcionando una respuesta que podría sorprenderle.

EJEMPLO 4 Utilice un dispositivo de graficación para encontrar los valores de x para los cuales $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUCIÓN En la figura 15 vemos la gráfica de la función $y = e^x$ y la recta horizontal $y = 1\,000\,000$. Vemos que estas curvas se intersectan cuando $x \approx 13.8$. Por tanto, $e^x > 10^6$ cuando $x > 13.8$. Tal vez le sorprenda que los valores de la función exponencial ya han superado un millón cuando x es sólo 14.

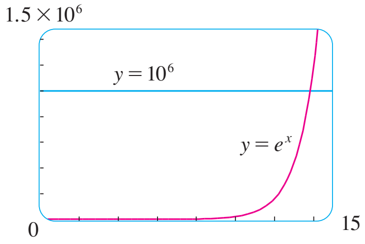


FIGURA 15

1.5 Ejercicios

1-4 Utilice las leyes de los exponentes para simplificar cada una de las siguientes expresiones:

1. a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2. a) $8^{4/3}$ b) $x(3x^2)^3$

3. a) $b^8(2b)^4$ b) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

4. a) $\dfrac{x^{2n}\cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

5. a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $a > 0$.
a) ¿Cuál es el dominio de esta función?
c) Si $a \neq 1$, ¿cuál es el rango de esta función?
d) Dibuje la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada uno de los siguientes casos.

i) $a > 1$ ii) $a = 1$ iii) $0 < a < 1$

6. a) ¿Cómo se define el número e?
b) ¿Cuál es un valor aproximado de e?
c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

7-10 Grafique cada una de las siguientes funciones en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

7. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

8. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

9. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

10. $y = 0.9^x$, $y = 0.6^x$, $y = 0.3^x$, $y = 0.1^x$

11-16 Haga un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No utilice calculadora. Sólo utilice las gráficas en las figuras 3 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

11. $y = 10^{x+2}$

12. $y = (0.5)^x - 2$

13. $y = -2^{-x}$

14. $y = e^{|x|}$

15. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

16. $y = 2(1 - e^x)$

17. A partir de la gráfica de $y = e^x$, escriba la ecuación de la gráfica que resulta de
a) desplazarla 2 unidades hacia abajo
b) desplazarla 2 unidades a la derecha
c) reflejarla sobre el eje x
d) reflejarla sobre el eje y
e) reflejarla sobre el eje x y luego sobre el eje y

18. Comenzando con la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica resultante al
a) reflejarla sobre la recta $y = 4$
b) reflejarla sobre la recta $x = 2$

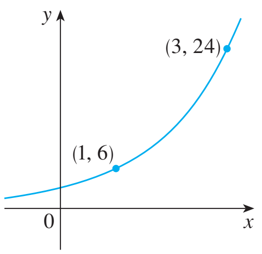
19-20 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones

19. a) $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$ b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{e^{\cos x}}$

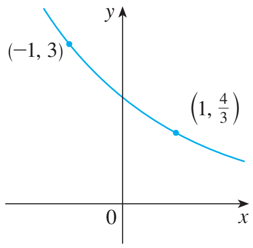
20. a) $g(t) = \operatorname{sen}(e^{-t})$ b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

21-22 Encuentre la función exponencial $f(x) = Ca^x$ correspondiente a cada una de las siguientes gráficas:

21.



22.



23. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

24. Supongamos que se le ofrece trabajo por un mes. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago prefiere?
I. Un millón de dólares al final del mes.
II. Un centavo en el primer día del mes, dos centavos en el segundo día, cuatro centavos en el tercer día y, en general, 2^{n-1} centavos al n-ésimo día.

25. Supongamos que las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ se dibujan en una cuadrícula de coordenadas con 1 pulgada como unidad de medida. Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica de f es de 48 pies, pero la altura de la gráfica de g es aproximadamente 265 millas.

26. Compare las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5^x$ graficando ambas funciones en varios rectángulos de vista. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas con aproximación a un decimal. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

27. Compare las funciones $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = e^x$ graficando f y g en varios rectángulos de vista. ¿Cuándo la gráfica de g finalmente supera a la gráfica de f?

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

28. Utilice una gráfica para estimar los valores de x tales que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

29. Bajo condiciones ideales se sabe con certeza que una población de bacterias se duplica cada tres horas. Supongamos que inicialmente hay 100 bacterias.
a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
c) Estime el tamaño de la población después de 20 horas.
d) Grafique la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a 50 000.

30. Un cultivo bacteriano se inicia con 500 bacterias y duplica su tamaño cada media hora.
a) ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?
b) ¿Cuántas hay después de t horas?
c) ¿Cuántas hay después de 40 minutos?
d) Grafique la función de la población y estime el tiempo para que la población llegue a 100 000.

31. Utilice una calculadora graficadora con comando para regresión exponencial para modelar la población del mundo con los datos, desde 1950 hasta 2010, dados en la tabla 1 en la página 54. Utilice el modelo para estimar la población en 1993 y para predecir la población en el año 2020.

32. La tabla muestra la población de EU, en millones, en los años 1900-2010. Utilice una calculadora graficadora con comando de regresión exponencial para modelar la población de EU desde 1900. Utilice el modelo para estimar la población en 1925 y predecir la población en el año 2020.

Año	Población	Año	Población
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150	2010	310

33. Si graficamos la función

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

veremos que f parece ser una función impar; demuéstrelo.

34. Grafique varios miembros de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando b varía? ¿Cómo cambia cuando a varía?

1.6 Funciones inversas y logaritmos

La tabla 1 muestra los datos de un experimento en el que un cultivo de bacterias inició con 100 de ellas en un medio limitado de nutrientes; el tamaño de población de bacterias se registró a intervalos de una hora. El número N de bacterias es una función del tiempo t: $N = f(t)$.

Supongamos, sin embargo, que el biólogo cambia su punto de vista y se interesa en el tiempo requerido para que la población alcance distintos niveles. En otras palabras, piensa en t como una función de N. Esta función se llama *función inversa* de f, denotada por f^{-1} y se lee "f inversa". Así, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo requerido para que el nivel de la población llegue a N. Los valores de f^{-1} pueden encontrarse mediante la lectura de la tabla 1 de derecha a izquierda o consultando la tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$ ya que $f(6) = 550$.

TABLA 1 N como función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población en el tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLA 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo para llegar a N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

No todas las funciones poseen inversa. Vamos a comparar las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la figura 1. Observe que f nunca tiene el mismo valor dos veces (cualquier par de entradas en A tienen diferentes salidas), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma salida, 4). En símbolos,

$$g(2) = g(3),$$

pero $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2.$$

Las funciones que comparten esta propiedad con f se denominan funciones *uno a uno*.

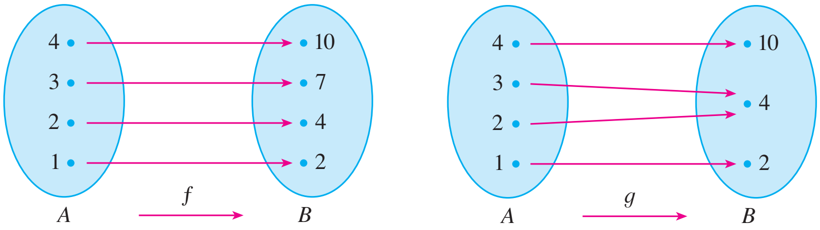


FIGURA 1
f es uno a uno; g no lo es

En el lenguaje de entradas y salidas, esta definición señala que f es *uno a uno* si a cada salida le corresponde sólo una entrada.

1 Definición Una función f se llama *uno a uno* si nunca toma el mismo valor dos veces; esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2.$$

Si una recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos en la figura 2 que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno, por tanto, con el siguiente método geométrico podemos determinar si una función es uno a uno.

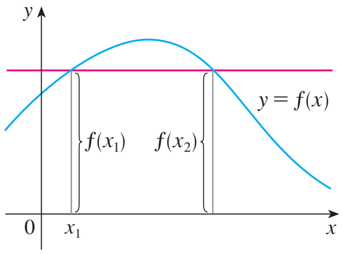


FIGURA 2
Esta función no es uno a uno, ya que $f(x_1) = f(x_2)$

Prueba de la recta horizontal Una función es uno a uno si y sólo si no existe una recta horizontal que interseque su gráfica más de una vez.

V EJEMPLO 1 ¿Es la función $f(x) = x^3$ uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la figura 3 se observa que no existe recta horizontal que interseque a la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, f es uno a uno.

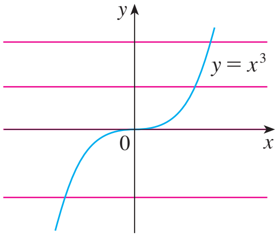


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es uno a uno

V EJEMPLO 2 ¿Es uno a uno la función $g(x) = x^2$?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno, ya que, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1),$$

por lo que 1 y -1 tienen la misma salida.

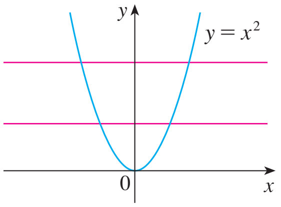


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ no es uno a uno

SOLUCIÓN 2 De la figura 4 se observa que existen rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es uno a uno.

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente aquellas que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

2 Definición Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces, la **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

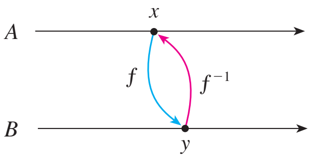


FIGURA 5

La definición dice que si f hace corresponder x con y, entonces f^{-1} hace corresponder de regreso y con x. (Si f no es uno a uno, entonces f^{-1} no está definida de manera única). El diagrama de flechas en la figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Note que

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ ya que si $y = x^3$, entonces

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

CUIDADO No cometa el error de pensar en -1 en f^{-1} como un exponente. Es decir,

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no} \text{ significa } \frac{1}{f(x)}$$

En todo caso, $1/f(x)$ es el recíproco y debería escribirse como $[f(x)]^{-1}$.

V EJEMPLO 3 Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1}, tenemos

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{ya que} \quad f(3) = 7$$
$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{ya que} \quad f(1) = 5$$
$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{ya que} \quad f(8) = -10$$

El diagrama en la figura 6 aclara cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

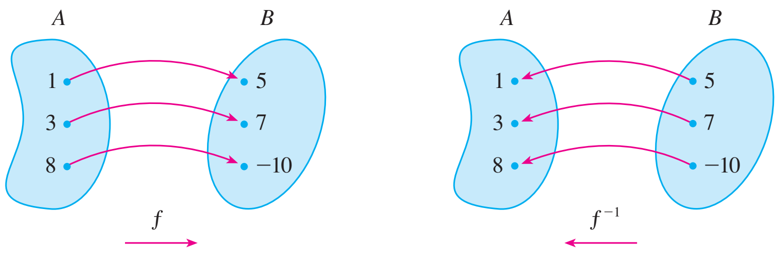


FIGURA 6
La función inversa invierte las salidas y las entradas

La letra x es tradicionalmente utilizada como la variable independiente, así que cuando nos concentramos en f^{-1} en vez de f, usualmente cambiamos los roles de x y y en la definición 2, y escribimos

3
$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Al sustituir por y en la definición 2 y sustituyendo por x en 3, obtenemos las siguientes **ecuaciones de cancelación**

4
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } B$$

La primera ecuación cancelada indica que si comenzamos con x, aplicando f y, a continuación, aplicamos f^{-1}, llegamos de regreso a x, donde empezamos (consulte el diagrama de máquinas en la figura 7). Así, f^{-1} deshace a f. La segunda ecuación señala que f deshace lo que hace f^{-1}.

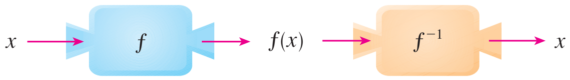


FIGURA 7

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y, por tanto, las ecuaciones de cancelación son

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones dicen simplemente que la función *elevar al cubo* y la función *raíz cúbica* se anulan mutuamente cuando se aplican una después de la otra.

Ahora veamos cómo calcular funciones inversas. Si tenemos una función $y = f(x)$ y somos capaces de resolver esta ecuación para x en términos de y, entonces, de acuerdo con la definición 2, debemos obtener $x = f^{-1}(y)$. Si queremos llamar a la variable independiente x, intercambiamos x por y y llegamos a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 Cómo encontrar la función inversa de una función f uno a uno

Paso 1 Escribir $y = f(x)$.

Paso 2 Resolver esta ecuación para x en términos de y (si es posible).

Paso 3 Para expresar f^{-1} en función de x, intercambiamos x por y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

V EJEMPLO 4 Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN De acuerdo con $\boxed{5}$ empezamos escribiendo

$$y = x^3 + 2$$

Después, despejamos x

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Finalmente, intercambiamos x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Ahora, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

En el ejemplo 4, note cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "elevar al cubo y después sumar 2"; f^{-1} es la regla "restar dos y después tomar la raíz cúbica".

El principio de intercambio de x e y para encontrar la función inversa también nos da el método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Ya que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Así, el punto (b, a) a partir del punto (a, b) se obtiene reflejando el segundo sobre la recta $y = x$. (Véase la figura 8.)

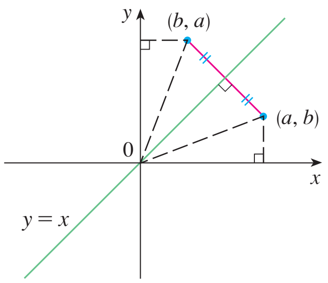


FIGURA 8

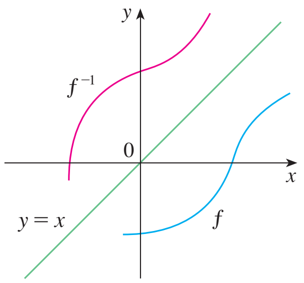


FIGURA 9

Así, como se ejemplifica en la figura 9:

> La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f sobre la recta $y = x$.

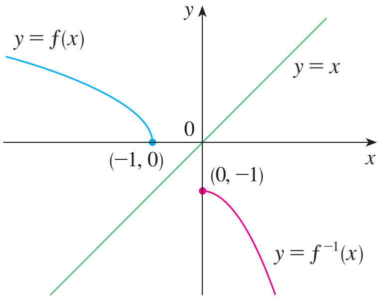


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Dibuje las gráficas de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ y su función inversa utilizando el mismo eje de coordenadas.

SOLUCIÓN Primero trazamos la curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (la mitad superior de la parábola $y^2 = -1 - x$ o $x = -y^2 - 1$) y, a continuación, reflejamos sobre la recta $y = x$ para obtener la gráfica de f^{-1}. (Véase la figura 10.) Para comprobar nuestra gráfica, observe que la expresión para f^{-1} es $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $x \geqslant 0$. Por lo que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = -x^2 - 1$, y esto parece razonable a partir de la figura 10.

Funciones logarítmicas

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función exponencial $f(x) = a^x$ siempre es creciente o decreciente, así que es uno a uno por la prueba de la recta horizontal. Por tanto, tiene una función inversa f^{-1} que se llama la **función logarítmica con base *a*** y se denota por $\log_a$. Si utilizamos

la formulación de una función inversa dada por [3],

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x,$$

entonces tenemos

6
$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Así, si $x > 0$, entonces $\log_a x$ es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener x. Por ejemplo, el $\log_{10} 0.001 = -3$, ya que $10^{-3} = 0.001$.

Las ecuaciones de cancelación [4], cuando se aplican a la funciones $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se convierten en

7
$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \quad \text{para toda } x > 0$$

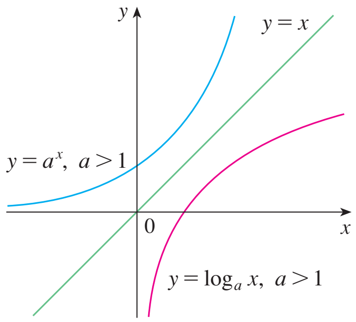


FIGURA 11

La función logarítmica $\log_a$ tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$. Su gráfica es la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ sobre la recta $y = x$.

La figura 11 muestra el caso en que $a > 1$. (Las funciones logarítmicas más importantes tienen una base $a > 1$.) El hecho de que $y = a^x$ sea una función de rápido crecimiento para $x > 0$ se refleja en el hecho de que $y = \log_a x$ es una función de lento crecimiento para $x > 1$.

La figura 12 muestra las gráficas de $y = \log_a x$ con varios valores de la base $a > 1$. Puesto que $\log_a 1 = 0$, las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

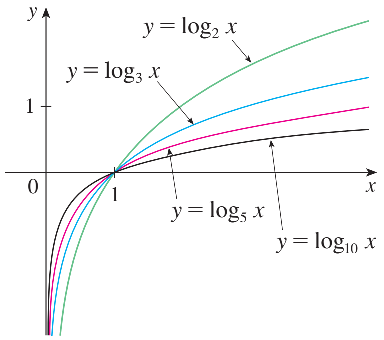


FIGURA 12

Las siguientes propiedades de las funciones logarítmicas se derivan de las correspondientes propiedades de las funciones exponenciales dadas en la sección 1.5.

Leyes de los logaritmos Si x e y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (donde r es cualquier número real)

EJEMPLO 6 Use las leyes de los logaritmos para evaluar $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUCIÓN Con la ley 2, tenemos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$.

Logaritmos naturales

La notación de los logaritmos
En la mayoría de los libros de texto de cálculo y las ciencias, así como en las calculadoras, se usa la notación $\ln x$ para el logaritmo natural de x, y $\log x$ para el "logaritmo común", $\log_{10} x$. Sin embargo, en la literatura matemática y científica más avanzada, así como en los lenguajes de programación de computadoras, la notación $\log x$ denota por lo general el logaritmo natural.

De todas las posibles bases a de los logaritmos, veremos en el capítulo 3 que la más conveniente es el número e, que se definió en la sección 1.5. Al logaritmo con base e se le llama **logaritmo natural** y tiene una notación especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Si ponemos $a = e$ y sustituimos $\log_e$ con "ln" en 6 y 7, entonces las propiedades que definen la función logaritmo natural se convierten en

8 $$\ln x = y \iff e^y = x$$

9 $$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

En particular, si ponemos $x = 1$, obtenemos

$$\ln e = 1$$

EJEMPLO 7 Encuentre x si $\ln x = 5$.

SOLUCIÓN 1 De 8 vemos que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Por tanto, $x = e^5$.

(Si tiene problemas para trabajar con la notación "ln", simplemente reemplácela por $\log_e$. Entonces la ecuación se convierte en $\log_e x = 5$; así que, por la definición de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUCIÓN 2 Comience con la ecuación

$$\ln x = 5$$

y aplique la función exponencial a ambos lados de la ecuación:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Sin embargo, la segunda ecuación de cancelación 9 indica que $e^{\ln x} = x$. Por tanto, $x = e^5$.

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$.

SOLUCIÓN Tomamos logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación y usamos [9]:

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$

$$5 - 3x = \ln 10$$

$$3x = 5 - \ln 10$$

$$x = \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

Ya que el logaritmo natural se encuentra en las calculadoras científicas, podemos aproximar la solución; para cuatro decimales tenemos: $x \approx 0.8891$.

V **EJEMPLO 9** Exprese $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ con un solo logaritmo.

SOLUCIÓN Con las leyes 3 y 1 de los logaritmos, tenemos

$$\ln a + \tfrac{1}{2}\ln b = \ln a + \ln b^{1/2}$$

$$= \ln a + \ln\sqrt{b}$$

$$= \ln\left(a\sqrt{b}\right)$$

La siguiente fórmula muestra que los logaritmos de cualquier base pueden expresarse en términos de los logaritmos naturales.

[10] **Fórmula para el cambio de base** Para cualquier número positivo a $(a \neq 1)$, tenemos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Entonces, a partir de [6], tenemos $a^y = x$. Tomando logaritmos naturales de ambos lados de esta ecuación, obtenemos $y \ln a = \ln x$. Por tanto,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Las calculadoras científicas tienen un comando para los logaritmos naturales, por lo que la fórmula 10 nos permite utilizar una calculadora para calcular un logaritmo de cualquier base (como se muestra en el siguiente ejemplo). Del mismo modo, la fórmula 10 nos permite graficar cualquier función logarítmica en una calculadora graficadora o computadora (véanse los ejercicios 43 y 44).

EJEMPLO 10 Evalúe $\log_8 5$ con una precisión de seis decimales.

SOLUCIÓN La fórmula 10 da

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$

Gráfica y crecimiento del logaritmo natural

Las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función logaritmo natural, se muestran en la figura 13. Debido a que la curva $y = e^x$ cruza el eje y con una pendiente de 1, se deduce que la curva reflejada $y = \ln x$ cruza el eje x con una pendiente de 1.

Al igual que todas las demás funciones logarítmicas con base mayor que 1, el logaritmo natural es una función creciente definida en $(0, \infty)$, y el eje y es un asíntota vertical. (Esto significa que los valores de $\ln x$ son números negativos muy grandes cuando x tiende a 0.)

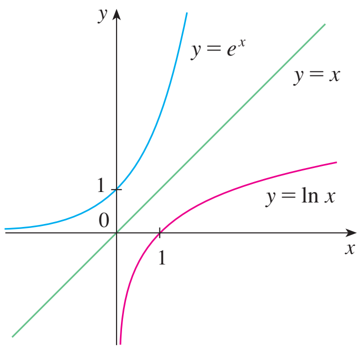


FIGURA 13
La gráfica de $y = \ln x$ es la reflexión de la gráfica $y = e^x$ sobre la recta $y = x$

EJEMPLO 11 Dibuje la gráfica de la función $y = \ln (x - 2) - 1$.

SOLUCIÓN Empezamos con la gráfica de $y = \ln x$ como se indica en la figura 13. Usando las transformaciones de la sección 1.3, la corremos 2 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $y = \ln (x - 2)$ y luego la desplazamos una unidad hacia abajo para obtener la gráfica de $y = \ln (x - 2) - 1$. (Véase la figura 14.)

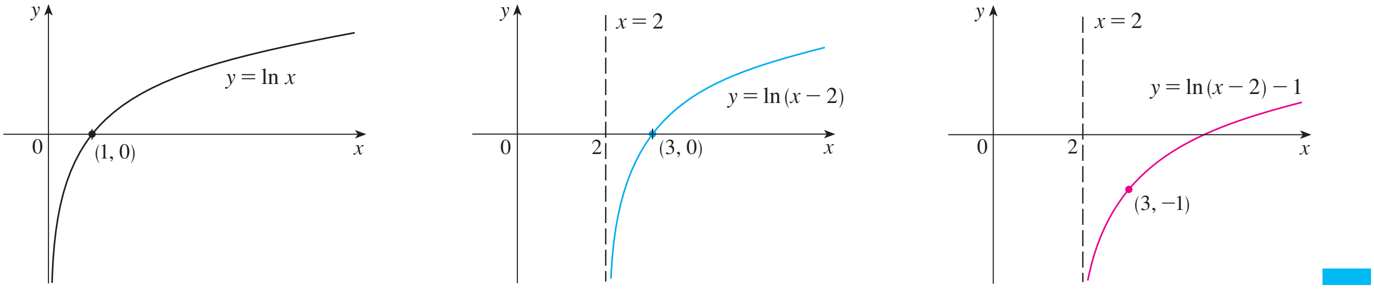


FIGURA 14

A pesar de que $\ln x$ es una función creciente, su crecimiento es muy lento cuando $x > 1$. De hecho, $\ln x$ crece más lentamente que cualquier potencia positiva de x. Para ilustrar este hecho, se comparan los valores aproximados de las funciones $y = \ln x$ y $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ en la siguiente tabla y las gráficas en las figuras 15 y 16. Usted puede ver que en un principio las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ crecen a un ritmo comparable, pero finalmente la función raíz supera con creces al logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1 000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

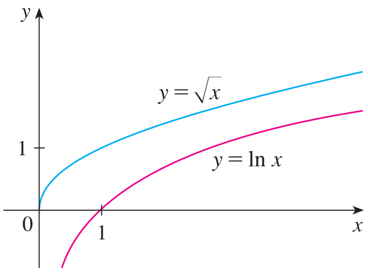


FIGURA 15

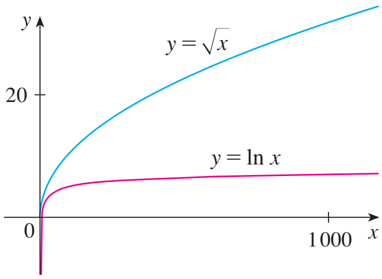


FIGURA 16

Funciones trigonométricas inversas

Cuando tratamos de encontrar las funciones trigonométricas inversas, tenemos una pequeña dificultad: debido a que las funciones trigonométricas no son uno a uno, no tienen funciones inversas. La dificultad se supera mediante la restricción de los dominios de estas funciones para que sean uno a uno.

Puede verse en la figura 17 que la función seno, $y = \operatorname{sen} x$, no es uno a uno (utilice la prueba de la recta horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, es uno a uno (figura 18). La función inversa de la función seno restringida f existe y se denota por sen^{-1} o arcsen. Se llama **función seno inverso** o **función arco seno**.

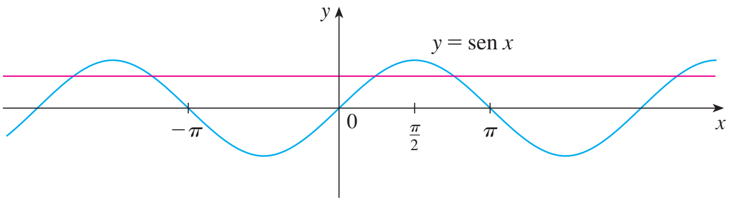


FIGURA 17

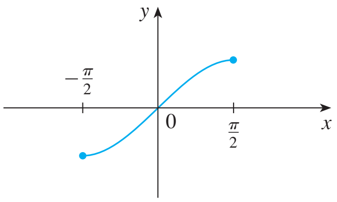


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Dado que la definición de una función inversa indica que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

tenemos

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Por tanto, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

EJEMPLO 12 Evalúe a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y b) $\tan\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$.

SOLUCIÓN

a) Tenemos que

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

porque el $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

b) Sea $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$, por lo que el $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$. Entonces, podemos dibujar un triángulo rectángulo con un ángulo θ como en la figura 19 y deducir por el teorema de Pitágoras que el tercer lado del triángulo tiene una longitud de $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Esto nos permite leer que

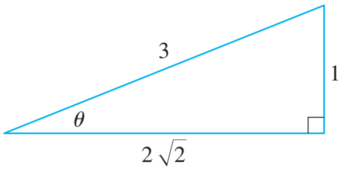


FIGURA 19

$$\tan\left(\operatorname{arcsen}\tfrac{1}{3}\right) = \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Las ecuaciones de cancelación para las funciones inversas resultan ser, en este caso,

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \quad \text{para} -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x \quad \text{para} -1 \leqslant x \leqslant 1$$

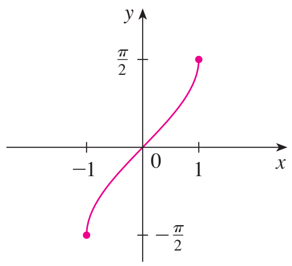


FIGURA 20
$y = \text{sen}^{-1} x = \text{arcsen } x$

La función inversa del seno, sen^{-1}, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$, y su gráfica, que se muestra en la figura 20, se obtiene a partir de la función seno restringido (figura 18), mediante la reflexión sobre la recta $y = x$.

La **función coseno inverso** se maneja en forma similar. La función coseno restringida $f(x) = \cos x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, es uno a uno (figura 21) y, por tanto, tiene una función inversa denotada por $\cos^{-1}$ o arccos.

$$\cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

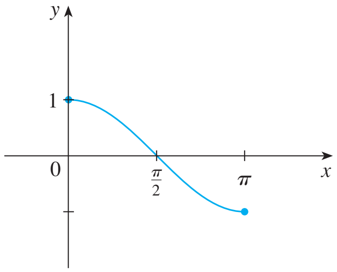


FIGURA 21
$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

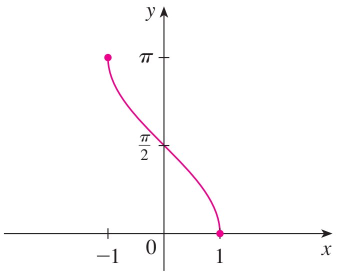


FIGURA 22
$y = \cos^{-1} x = \text{arccos } x$

Las ecuaciones de cancelación son

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

La función coseno inverso, $\cos^{-1}$, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$. Su gráfica se muestra en la figura 22.

La función tangente puede hacerse uno a uno mediante la restricción de que el intervalo sea $(-\pi/2, \pi/2)$. Así, la **función tangente inversa** se define como la inversa de la función $f(x) = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Véase la figura 23), y se denota por $\tan^{-1}$ o arctan.

$$\tan^{-1} x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

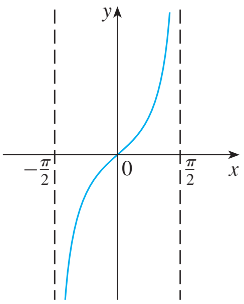


FIGURA 23
$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 13 Simplifique la expresión $\cos(\tan^{-1} x)$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \tan^{-1} x$. Tenemos que, $\tan y = x$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Queremos encontrar $\cos y$, pero, ya que $\tan y$ es conocida, es más fácil encontrar primero $\sec y$:

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad (\text{ya que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2)$$

Así
$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

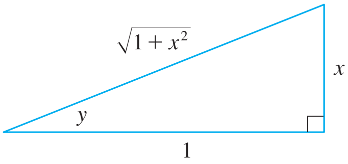


FIGURA 24

SOLUCIÓN 2 En lugar de utilizar las identidades trigonométricas como en la solución 1, es quizá más fácil usar un diagrama. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$, y podemos leer en la figura 24 (que ilustra el caso $y > 0$) que

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

La función tangente inversa, $\tan^{-1} = \arctan$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$. Su gráfica se muestra en la figura 25.

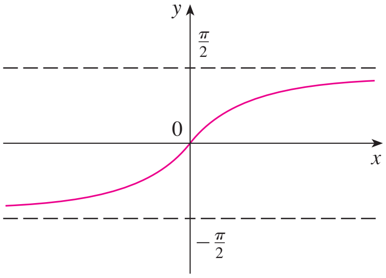


FIGURA 25
$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

Sabemos que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan. Dado que la gráfica de $\tan^{-1}$ se obtiene reflejando la gráfica de la función tangente restringida, sobre la recta $y = x$, se deduce que las rectas $y = \pi/2$ y $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de $\tan^{-1}$.

El resto de las funciones trigonométricas inversas no se utilizan con tanta frecuencia y se resumen aquí.

11 $y = \csc^{-1} x \ (|x| \geqslant 1) \iff \csc y = x$ y $y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2$

$y = \sec^{-1} x \ (|x| \geqslant 1) \iff \sec y = x$ y $y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2$

$y = \cot^{-1} x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \cot y = x$ y $y \in (0, \pi)$

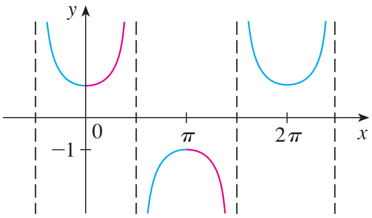


FIGURA 26
$y = \sec x$

La elección de los intervalos para y en las definiciones de $\csc^{-1}$ y $\sec^{-1}$ no es aceptada universalmente. Por ejemplo, algunos autores utilizan $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ en la definición de $\sec^{-1}$. (Puede verse en la gráfica de la función secante en la figura 26 que tanto esta opción como la que se encuentra en 11 funcionan.)

1.6 Ejercicios

1. a) ¿Qué es una función uno a uno?
b) ¿Cómo puede decirse, a partir de la gráfica de una función, que es uno a uno?

2. a) Supongamos que f es una función uno a uno con dominio A y rango B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el rango de f^{-1}?
b) Si se le da una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}?
c) Si se le da la gráfica para f, ¿cómo encuentra la gráfica de f^{-1}?

3-14 Una función viene dada por una tabla de valores, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si es uno a uno.

3.

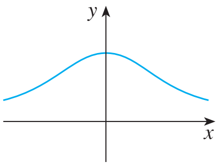
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

4.

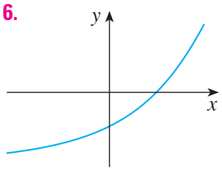
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0	1.9	2.8	3.5	3.1	2.9

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

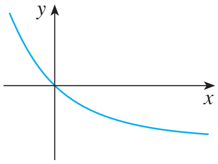
5.



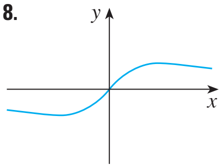
6.



7.



8.



9. $f(x) = x^2 - 2x$

10. $f(x) = 10 - 3x$

11. $g(x) = 1/x$

12. $g(x) = \cos x$

13. $f(t)$ es la altura de un balón de fútbol t segundos después de la patada inicial.

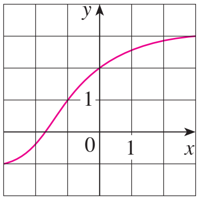
14. f(t) es su estatura a la edad t.

15. Suponga que f es una función uno a uno.
a) Si $f(6) = 17$, ¿qué es $f^{-1}(17)$?
b) Si $f^{-1}(3) = 2$, ¿qué es $f(2)$?

16. Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, encuentre $f^{-1}(3)$ y $f(f^{-1}(2))$.

17. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, encuentre $g^{-1}(4)$.

18. La gráfica de f está dada.
a) ¿Por qué es f uno a uno?
b) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f^{-1}?
c) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(2)$?
d) Estime el valor de $f^{-1}(0)$.



19. La fórmula $C = 5/9\,(F - 32)$, donde $F \geqslant -459.67$, expresa la temperatura Celsius C, en función de la temperatura Fahrenheit F. Halle una fórmula para la función inversa e interprétela. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

20. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz en el vacío. Encuentre la función inversa de f y explique su significado.

21-26 Halle una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

22. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$

24. $y = x^2 - x, \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

25. $y = \ln(x + 3)$

26. $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

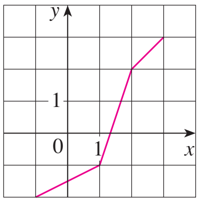
27-28 Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y utilícela para graficar f^{-1}, f y la recta $y = x$ en la misma pantalla. Para compro-bar su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones sobre la recta.

27. $f(x) = x^4 + 1,\ x \geqslant 0$

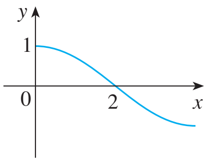
28. $f(x) = 2 - e^x$

29-30 Use la gráfica dada de f, para trazar la gráfica de f^{-1}.

29.



30.



31. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1$.
a) Encuentre f^{-1}. ¿Cómo se relaciona con f?
b) Identifique la gráfica de f y explique su respuesta al inciso a).

32. Sea $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
a) Encuentre g^{-1}. ¿Cómo se relaciona con la g?
b) Grafique g. ¿Cómo explica usted su respuesta al inciso a)?

33. a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_a x$?
b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
c) ¿Cuál es el rango de esta función?
d) Dibuje la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.

34. a) ¿Cuál es el logaritmo natural?
b) ¿Cuál es el logaritmo común?
c) Trace las gráficas de la función logaritmo natural y la función exponencial natural en un mismo conjunto de ejes.

35-38 Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

35. a) $\log_5 125$ b) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

36. a) $\ln(1/e)$ b) $\log_{10}\sqrt{10}$

37. a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

38. a) $e^{-2\ln 5}$ b) $\ln\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

39-41 Exprese cada una de las siguientes cantidades dadas como un solo logaritmo.

39. $\ln 5 + 5\ln 3$

40. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2\ln c$

41. $\frac{1}{3}\ln(x + 2)^3 + \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

42. Use la fórmula 10 para evaluar cada logaritmo con precisión de 6 decimales.
a) $\log_{12} 10$ b) $\log_2 8.4$

43-44 Use la fórmula 10 para graficar cada una de las siguientes funciones dadas, en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

43. $y = \log_{1.5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

45. Suponga que la gráfica de $y = \log_2 x$ se dibuja sobre una cuadrícula de coordenadas, donde la unidad de medida es de una pulgada. ¿Cuántas millas a la derecha del origen tenemos que movernos antes de que la altura de la curva alcance 3 pies?

46. Compare las funciones $f(x) = x^{0.1}$ y $g(x) = \ln x$ graficando ambas, f y g, en varios rectángulos de vista. ¿Cuándo la gráfica de f supera finalmente a la gráfica de g?

47-48 Haga un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones. No utilice calculadora. Sólo tiene que usar las gráficas de las figuras 12 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

47. a) $y = \log_{10}(x + 5)$ b) $y = -\ln x$

48. a) $y = \ln(-x)$ b) $y = \ln|x|$

49-50 a) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?

b) ¿Cuál es la intersección en x de la gráfica?

c) Trace la gráfica de f.

49. $f(x) = \ln x + 2$

50. $f(x) = \ln(x - 1) - 1$

51-54 Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para x.

51. a) $e^{7-4x} = 6$ b) $\ln(3x - 10) = 2$

52. a) $\ln(x^2 - 1) = 3$ b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

53. a) $2^{x-5} = 3$ b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. a) $\ln(\ln x) = 1$ b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, $a \neq b$

55-56 Resuelva cada una de las siguientes desigualdades para x.

55. a) $\ln x < 0$ b) $e^x > 5$

56. a) $1 < e^{3x-1} < 2$ b) $1 - 2\ln x < 3$

57. a) Encuentre el dominio de $f(x) = \ln(e^x - 3)$.
b) Halle f^{-1} y su dominio.

58. a) ¿Cuáles son los valores de $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$?
b) Use su calculadora para evaluar $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$. ¿Qué observa? ¿Puede explicar por qué la calculadora tiene problemas?

SAC **59.** Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es uno a uno. A continuación, utilice un sistema de álgebra computarizado para encontrar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (El SAC produce tres posibles expresiones. Explique por qué dos de ellas son irrelevantes en este contexto.)

SAC **60.** a) Si $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geq 0$, utilice un sistema de álgebra computarizado para encontrar una expresión para $g^{-1}(x)$.
b) Utilice la expresión del inciso a) para graficar $y = g(x)$, $y = x$ y $y = g^{-1}(x)$, en la misma pantalla.

61. Si una población de bacterias comienza con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, entonces el número de bacterias después de t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$. (Véase el ejercicio 29 en la sección 1.5.)
a) Halle la inversa de esta función y explique su significado.
b) ¿Cuándo la población alcanzará 50 000 bacterias?

62. Cuando el flash de una cámara se apaga, las baterías comienzan a recargar de inmediato el condensador del flash, que almacena una carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La capacidad de carga máxima es Q_0, y t se mide en segundos.)
a) Halle la inversa de esta función y explique su significado.
b) ¿Cuánto tiempo se tarda en recargar el condensador a 90% de la capacidad si $a = 2$?

63-68 Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

63. a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$ b) $\cos^{-1}(-1)$

64. a) $\tan^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)$ b) $\sec^{-1} 2$

65. a) $\arctan 1$ b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$

66. a) $\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

67. a) $\tan(\arctan 10)$ b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

68. a) $\tan(\sec^{-1} 4)$ b) $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

69. Pruebe que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

70-72 Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

70. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x)$

71. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

72. $\cos(2\tan^{-1} x)$

73-74 Grafique las funciones dadas, en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

73. $y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; $y = \operatorname{sen}^{-1} x$; $y = x$

74. $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$; $y = \tan^{-1} x$; $y = x$

75. Encuentre el dominio y el rango de la función

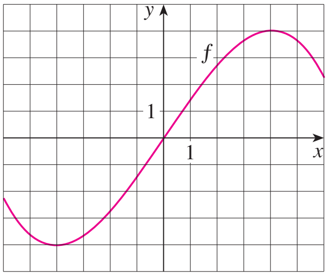
$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

76. a) Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ y explique la apariencia de la gráfica.
b) Grafique la función $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. ¿Cómo se explica la apariencia de esta gráfica?

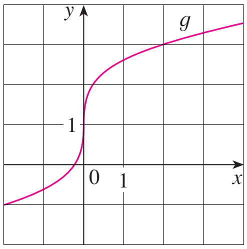
77. a) Si desplazamos la curva a la izquierda, ¿qué sucede con su reflexión sobre la recta $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$, donde f es una función uno a uno.
b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

Ejercicios

1. Sea f la función cuya gráfica está dada.
a) Estime el valor de $f(2)$.
b) Estime los valores de x tales que $f(x) = 3$.
c) Establezca el dominio de f.
d) Establezca el rango de f.
e) ¿Sobre qué intervalo es creciente f?
f) ¿Es f uno a uno? Explique.
g) ¿Es f par, impar, o ninguno de los dos? Explique.



2. La gráfica de g está dada.
a) Obtenga el valor de $g(2)$.
b) ¿Por qué g es uno a uno?
c) Estime el valor de $g^{-1}(2)$.
d) Estime el dominio de g^{-1}.
e) Dibuje la gráfica de g^{-1}.



3. Si $f(x) = x^2 - 2x + 3$, evalúe el cociente de diferencias

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

4. Dibuje una gráfica aproximada de la producción de un cultivo en función de la cantidad de fertilizante utilizado.

5-8 Encuentre el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$

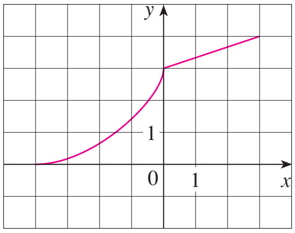
6. $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$

8. $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Suponga que la gráfica de f está dada. Describa cómo las gráficas de las funciones siguientes pueden obtenerse a partir de la gráfica de f.
a) $y = f(x) + 8$
b) $y = f(x + 8)$
c) $y = 1 + 2f(x)$
d) $y = f(x - 2) - 2$
e) $y = -f(x)$
f) $y = f^{-1}(x)$

10. La gráfica de f está dada. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.
a) $y = f(x - 8)$
b) $y = -f(x)$
c) $y = 2 - f(x)$
d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
e) $y = f^{-1}(x)$
f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11-16 Utilice transformaciones para dibujar la gráfica de la función.

11. $y = -\text{sen } 2x$

12. $y = 3 \ln(x - 2)$

13. $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$

14. $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

16. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determine si f es par, impar o ninguna de las dos.
a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
b) $f(x) = x^3 - x^7$
c) $f(x) = e^{-x^2}$
d) $f(x) = 1 + \text{sen } x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica consiste en el segmento de recta desde el punto $(-2, 2)$ hasta el punto $(-1, 0)$, junto con la mitad superior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones a) $f \circ g$, b) $g \circ f$, c) $f \circ f$, d) $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como una composición de tres funciones.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

21. La esperanza de vida mejoró notablemente en el siglo XX. La tabla muestra la esperanza de vida al nacer (en años) de los varones nacidos en EU. Use un diagrama de dispersión para elegir un tipo adecuado de modelo. Use su modelo para predecir el tiempo de vida de un varón nacido en el año 2010.

Año de nacimiento	Esperanza de vida	Año de nacimiento	Esperanza de vida
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

22. Un pequeño fabricante de electrodomésticos descubre que cuesta 9 000 dólares producir 1 000 tostadoras a la semana y 12 000 dólares producir 1 500 tostadoras a la semana.

a) Exprese el costo en función del número de tostadoras producidas, suponiendo que es lineal. Después, trace la gráfica.

b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

c) ¿Cuál es la intersección de la gráfica con el eje y y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, encuentre $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

25. Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

a) $e^{2\ln 3}$ b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

c) $\tan\left(\text{arcsen}\,\frac{1}{2}\right)$ d) $\text{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resuelva cada cada una de las siguientes ecuaciones para x.

a) $e^x = 5$ b) $\ln x = 2$

c) $e^{e^x} = 2$ d) $\tan^{-1} x = 1$

27. La población de ciertas especies en un ambiente limitado con una población inicial de 100 y capacidad para 1 000 es

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años.

a) Grafique esta función y estime cuánto tiempo le toma a la población llegar a 900.

b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

c) Utilice la función inversa para encontrar el tiempo necesario para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso a).

28. Grafique las tres funciones $y = x^a$, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ en la misma pantalla para dos o tres valores de $a > 1$. Para valores grandes de x, ¿cuál de estas funciones tiene los valores más grandes y cuál los valores más pequeños?

Principios para la resolución de problemas

No hay reglas sólidas o inmediatas que aseguren el éxito en la resolución de problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales en el proceso de resolución de problemas y de dar algunos principios que pueden ser útiles en la resolución de algunos de ellos. Estos pasos y principios no hacen otra cosa que explicitar el sentido común y se han adaptado del libro de George Polya *How To Solve It*.

1 COMPRENDA EL PROBLEMA

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que lo comprende claramente. Plantéese las siguientes preguntas:

¿Cuál es la incógnita?

¿Cuáles son las cantidades que se conocen?

¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas, es útil

dibujar un diagrama

y ubicar en el diagrama las cantidades dadas y las requeridas.

Por lo general, es necesario

introducir una notación adecuada

En la elección de los símbolos para las incógnitas, a menudo usamos letras como a, b, c, m, n, x o y, aunque en algunos casos es mejor usar las iniciales de las cantidades involucradas como símbolos sugerentes; por ejemplo, V para el volumen o t para tiempo.

2 PIENSE EN UN PLAN

Es importante encontrar una conexión entre la información dada y la desconocida, lo que le permitirá calcular las incógnitas. A menudo es útil preguntarse a sí mismo de manera explícita: "¿Cómo relaciono lo conocido con lo desconocido?" Si usted no ve una conexión inmediata, las siguientes ideas pueden serle útiles en la concepción de un plan.

Intente reconocer algo conocido Relacione la situación dada con los conocimientos previos. Observe lo desconocido y trate de recordar un problema más conocido que cuente con una incógnita similar.

Intente reconocer patrones Algunos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón que está ocurriendo. El patrón puede ser geométrica, numérica o algebraica. Si usted puede ver la regularidad o repetición en un problema, podría ser capaz de conjeturar el patrón y probarlo.

Utilice analogías Trate de pensar en un problema análogo, es decir, un problema similar, un problema relacionado, pero que sea más fácil de resolver que el problema original. Si usted puede resolver el problema similar, pero más sencillo, entonces podría dar con las claves que necesita para resolver el problema original, que es más difícil. Por ejemplo, si un problema involucra cantidades muy grandes, podría intentar primero resolver un problema similar con cifras más pequeñas. O si el problema está inmerso en la geometría en tres dimensiones, puede buscarse un problema geométrico similar en dos dimensiones. O si el problema inicial es de carácter general, puede empezar con un caso particular.

Introduzca algo extra A veces puede ser necesario introducir algo nuevo, un apoyo auxiliar para ayudar a hacer la conexión entre lo dado y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva línea trazada en el diagrama. En un problema más algebraico, podría ser una nueva incógnita relacionada con la original.

Establezca casos A veces puede tener que dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno de los casos. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia al tratar con valores absolutos.

Trabaje hacia atrás En algunas ocasiones es útil imaginar que el problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Entonces usted puede revertir sus pasos y construir una solución al problema original. Este procedimiento es comúnmente utilizado en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, en la resolución de la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabaje hacia atrás. Sumamos 5 a cada lado de la ecuación y luego dividimos ambos lados entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada uno de estos pasos puede revertirse, hemos resuelto el problema.

Establezca metas parciales En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales (en los que la situación deseada se cumple con sólo en algunas partes del problema). Si primero puede llegar a estos objetivos parciales, entonces podemos construir conclusiones sobre ellos para llegar a nuestra meta final.

Razonamiento indirecto Con frecuencia es apropiado atacar en forma indirecta un problema. En el uso de la demostración por contradicción para demostrar que P implica Q, suponemos que P es cierta y Q es falsa y tratamos de ver por qué esto no puede suceder. De alguna manera, tenemos que utilizar esta información y llegar a una contradicción de lo que sabemos que es verdadero.

Inducción matemática En la demostración de proposiciones que involucran un entero positivo n, es frecuentemente útil usar el siguiente principio.

Principio de inducción matemática Sea S_n una proposición acerca del entero positivo n. Supongamos que

1. S_1 es verdadera.
2. S_{k+1} es verdadera cuando S_k es verdadera.

Entonces S_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Esto es razonable porque, dado que S_1 es verdadera, se deduce de la condición 2 (con $k = 1$) que la S_2 es verdadera. Luego, utilizando la condición 2 con $k = 2$, vemos que S_3 es verdadera. Una vez más, con la condición 2, esta vez con $k = 3$, tenemos que S_4 es verdadera. Este procedimiento puede seguirse indefinidamente.

3 EJECUTE EL PLAN

En el paso 2 se ideó un plan. Para llevar a cabo ese plan tenemos que verificar cada etapa de éste y escribir los detalles que demuestran que cada etapa es correcta.

4 MIRE EN RETROSPECTIVA

Después de haber completado nuestra solución, es conveniente revisarla, en parte para ver si no se han cometido errores en la solución y en parte para ver si podemos pensar una manera más fácil de resolver el problema. Otra razón para mirar hacia atrás es familiarizarnos con el método de solución, lo que puede ser útil para resolver un problema en el futuro. Descartes dijo: “Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas.”

Estos principios de la resolución de problemas se ilustran en los siguientes ejemplos. Intente resolverlos antes de mirar las soluciones. Consulte estos principios de resolución de problemas si se queda atascado. Usted puede encontrar útil referirse a esta sección de vez en cuando al resolver los ejercicios en los restantes capítulos de este libro.

EJEMPLO 1 Exprese la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con un área de $25\,m^2$ en función de su perímetro P.

RP Comprenda el problema

SOLUCIÓN Primero clasifique la información mediante la identificación de la incógnita y los datos:

Incógnita: hipotenusa h

Datos: perímetro P, área de $25\,m^2$

RP Dibuje un diagrama

Dibujar un diagrama como el de la figura 1 puede ser de gran ayuda.

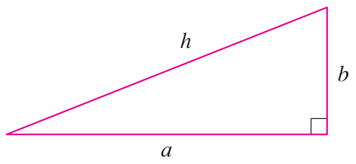


FIGURA 1

RP Relacione los datos con las incógnitas

RP Introduzca algo extra

Para establecer la relación entre las incógnitas y los datos, introduzca dos variables adicionales a y b, que representan las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Esto nos permite expresar la condición dada, y es que, dado que el triángulo es rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

El resto de relaciones entre las variables se obtienen al escribir las expresiones para el área y el perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Ya que P está dado, ahora tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas a, b y h:

$$h^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \tag{2}$$

$$P = a + b + h \tag{3}$$

RP Relacione con algo conocido

A pesar de que tiene el número correcto de ecuaciones, no son fáciles de resolver en una forma sencilla. Pero si usamos la estrategia de resolución de problemas tratando de reconocer algo conocido, entonces podemos resolver estas ecuaciones por un método más fácil. Observe el lado derecho de las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Estas expresiones le recuerdan algo familiar? Tenga en cuenta que contienen los ingredientes de una fórmula conocida:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Con esta idea, expresamos $(a + b)^2$ de dos maneras. De las ecuaciones 1 y 2 tenemos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

De la ecuación 3 tenemos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Así

$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Esta es la expresión requerida para h en función de P.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, a menudo es necesario utilizar el principio de la resolución de problemas, de *separar en casos* cuando se trata de valores absolutos.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

SOLUCIÓN Recuerde la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De esta definición, se sigue que:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Del mismo modo

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{si } x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

RP Establezca casos

Estas expresiones muestran que es necesario considerar tres casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I Si $x < -2$, tenemos

$$|x - 3| + |x + 2| < 11$$
$$-x + 3 - x - 2 < 11$$
$$-2x < 10$$
$$x > -5$$

CASO II Si $-2 \leqslant x < 3$, la desigualdad dada se convierte en

$$-x + 3 + x + 2 < 11$$
$$5 < 11 \quad \text{(siempre verdadera)}$$

CASO III Si $x \geqslant 3$, la desigualdad se convierte en

$$x - 3 + x + 2 < 11$$
$$2x < 12$$
$$x < 6$$

De la combinación de los casos I, II y III, vemos que se cumple con la desigualdad cuando $-5 < x < 6$. Así que la solución es el intervalo $(-5, 6)$.

En el ejemplo siguiente, suponga primero una respuesta revisando los casos particulares y buscando una pauta. A continuación, demuestre su conjetura por inducción matemática.

Usando el principio de inducción matemática, seguimos tres pasos:

Paso 1 Demuestre que S_n es verdadera cuando $n = 1$.

Paso 2 Suponga que S_n es verdadera cuando $n = k$ y deduzca que S_n es verdadera cuando $n = k + 1$.

Paso 3 Concluya que S_n es verdadera para toda n por el principio de inducción matemática.

EJEMPLO 3 Si $f_0(x) = x/(x + 1)$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

RP Analogía: intente un problema semejante más sencillo

SOLUCIÓN Empezamos por encontrar fórmulas para $f_n(x)$ para los casos particulares $n = 1$, 2 y 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

RP Busque un patrón

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Nos damos cuenta de un patrón: el coeficiente de x en el denominador de $f_n(x)$ es $n + 1$ en los tres casos que hemos calculado. Así que hacemos la suposición de que, en general,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Para probar esto, utilizamos el principio de inducción matemática. Ya hemos comprobado que $\boxed{4}$ es verdadera para $n = 1$. Supongamos que es verdadera para $n = k$, es decir,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

Entonces $$f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Esta expresión demuestra que $\boxed{4}$ es verdadera para $n = k + 1$. Por tanto, por inducción matemática, es verdadera para todo entero positivo n.

Problemas

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo tiene una longitud de 4 cm. Exprese la longitud de la altura perpendicular a la hipotenusa en función de la longitud de esta última.

2. La altura perpendicular a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 12 cm. Exprese la longitud de la hipotenusa en función del perímetro.

3. Resuelva la ecuación $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Resuelva la desigualdad $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Trace la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Trace la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.

7. Dibuje la gráfica de la ecuación $x + |x| = y + |y|$.

8. Dibuje la región en el plano formado por todos los puntos (x, y) tales que

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$

9. La notación máx$\{a, b, \ldots\}$ significa el mayor de los números $a, b, \ldots$ Dibuje la gráfica de cada función.

a) $f(x) = \text{máx}\{x, 1/x\}$ b) $f(x) = \text{máx}\{\text{sen}\, x, \cos x\}$ c) $f(x) = \text{máx}\{x^2, 2 + x, 2 - x\}$

10. Dibuje la región en el plano definido por cada una de las siguientes ecuaciones o desigualdades.

a) $\text{máx}\{x, 2y\} = 1$ b) $-1 \leqslant \text{máx}\{x, 2y\} \leqslant 1$ c) $\text{máx}\{x, y^2\} = 1$

11. Evalúe $(\log_2 3)\,(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.

12. a) Demuestre que la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ es una función impar.

b) Encuentre la función inversa de f.

13. Resuelva la desigualdad $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$

14. Use un razonamiento indirecto para probar que $\log_2 5$ es un número irracional.

15. Un conductor emprende un viaje. Durante la primera mitad del trayecto conduce a un ritmo lento de 30 mi/h; en la segunda mitad conduce a 60 mi/h. ¿Cuál es su rapidez promedio durante este viaje?

16. ¿Es verdad que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

17. Demuestre que si n es un entero positivo, entonces $7^n - 1$ es divisible entre 6.

18. Demuestre que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

19. Si $f_0(x) = x^2$ y $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

20. a) Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una expresión para $f_n(x)$ y utilice inducción matemática para demostrarla.

b) Grafique f_0, f_1, f_2, f_3, en la misma pantalla y describa los efectos de la composición de repetida.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

2 Límites y derivadas

Una pelota cae más y más rápido al transcurrir el tiempo. Galileo descubrió que la distancia de caída es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. El Cálculo posibilita calcular la rapidez de la pelota en cualquier instante.

© 1986 Peticolas / Megna, Fundamental Photographs, NYC

En *Un previo de Cálculo* (página 1) hemos visto cómo la idea de límite sustenta las distintas ramas del Cálculo. Por tanto, es apropiado comenzar nuestro estudio de éste investigando los límites y sus propiedades. El tipo especial de límite que se usa para encontrar rectas tangentes y velocidades da lugar a la idea central del Cálculo Diferencial, la Derivada.

2.1 Problemas de la tangente y la velocidad

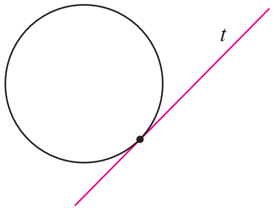
En esta sección se verá cómo surgen los límites cuando tratamos de encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

El problema de la tangente

La palabra *tangente* se deriva de la voz latina *tangens*, que significa "tocar". Así, una tangente a una curva es una recta que toca la curva. En otras palabras, una recta tangente debe tener la misma dirección que la curva en el punto de contacto, pero, ¿cómo puede precisarse esta idea?

Para una circunferencia podemos simplemente seguir la idea de Euclides y decir que la tangente es una recta que interseca la circunferencia una y sólo una vez, como se ve en la figura 1a). Para curvas más complicadas esta definición es inadecuada. La figura 1b) muestra dos rectas l y t que pasan por un punto P en una curva C. La recta l cruza C sólo una vez, pero ciertamente no es la idea que tenemos de lo que es una tangente. La recta t, por otro lado, se parece más a una tangente, pero interseca a C dos veces.

Para ser más específicos, intentaremos resolver el problema de encontrar una recta t tangente a la parábola $y = x^2$ en el siguiente ejemplo.



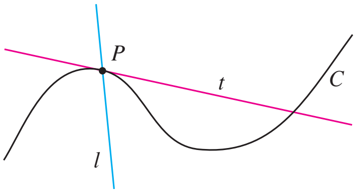


FIGURA 1

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1).

SOLUCIÓN Podremos encontrar la ecuación de la recta tangente t tan pronto como conozcamos su pendiente m. La dificultad es que sólo conocemos un punto P sobre t, y para calcular la pendiente se necesitan dos puntos. Sin embargo, observamos que podemos calcular una aproximación a m eligiendo un punto cercano $Q(x, x^2)$ sobre la parábola (como en la figura 2) y calculando la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. [Una **recta secante**, de la palabra latina *secans*, que significa cortar, es una recta que interseca (corta) una curva más de una vez.]

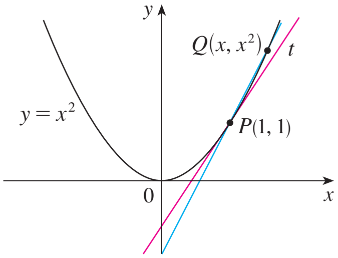


FIGURA 2

Elegimos $x \neq 1$ de manera que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$, tenemos

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Las tablas en el margen muestran los valores de m_{PQ} para varios valores de x cercanos a 1. Cuanto más cerca está Q de P, la x es más cercana a 1 y, de las tablas, m_{PQ} está más cerca de 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

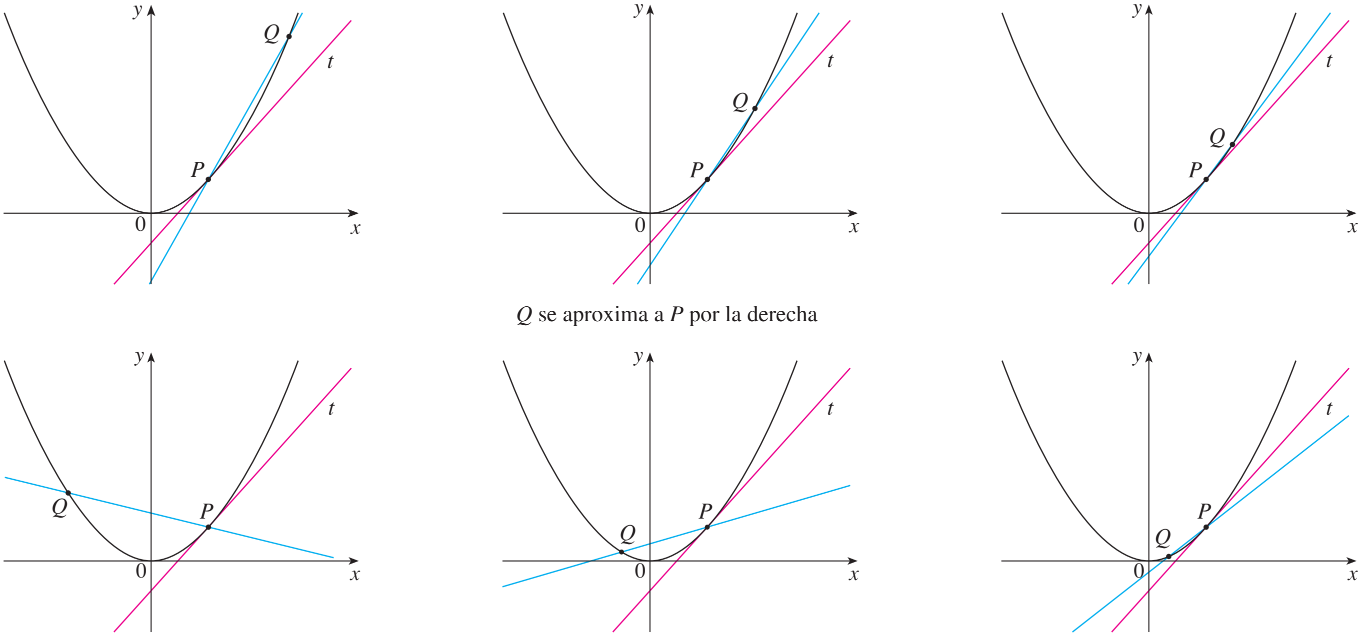
Decimos que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes, y esto lo expresamos simbólicamente escribiendo

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Suponiendo que la pendiente de la recta tangente finalmente es 2, se utiliza la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente (véase apéndice B) para escribir la ecuación de la recta tangente en (1, 1) como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = 2x - 1$$

La figura 3 muestra el proceso de límite que se presenta en este ejemplo. Cuando Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las correspondientes rectas secantes giran alrededor de P y se aproximan a la recta tangente t.



Q se aproxima a P por la derecha

Q se aproxima a P por la izquierda

FIGURA 3

TEC En Visual 2.1 puede ver cómo funciona el proceso en la figura 3 para funciones adicionales.

Muchas de las funciones que se producen en la ciencia no están descritas por ecuaciones explícitas, sino que están definidas por datos experimentales. El siguiente ejemplo muestra cómo estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de este tipo de funciones.

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

V EJEMPLO 2 La unidad de destello (flash) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un condensador y su liberación repentina cuando el flash se activa. Los datos de la tabla describen la carga Q restante en el condensador (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos después de que el flash se dispara). Utilice los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [*Nota*: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica (medida en microamperios) que fluye desde el condensador a la lámpara del flash.]

SOLUCIÓN En la figura 4 se grafican los datos dados y se usan para trazar una curva que se aproxima a la gráfica de la función.

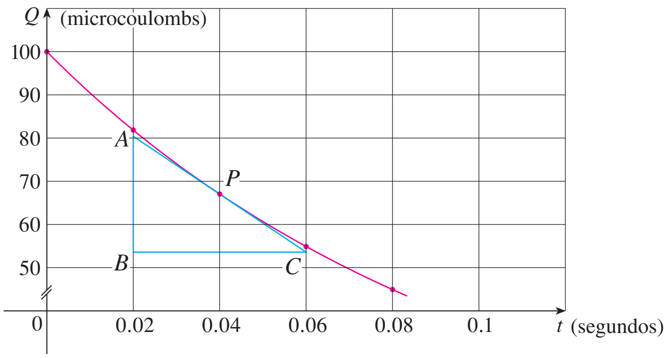


FIGURA 4

Dados los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ en la gráfica, nos encontramos con que la pendiente de la recta secante PR es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

La tabla de la izquierda muestra los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. De esta tabla se esperaría que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre en algún valor entre -742 y -607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

Así, por este método, estimamos la pendiente de la recta tangente como -675.

Otro método consiste en elaborar una aproximación a la tangente en P y medir los lados del triángulo ABC, como en la figura 4. Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

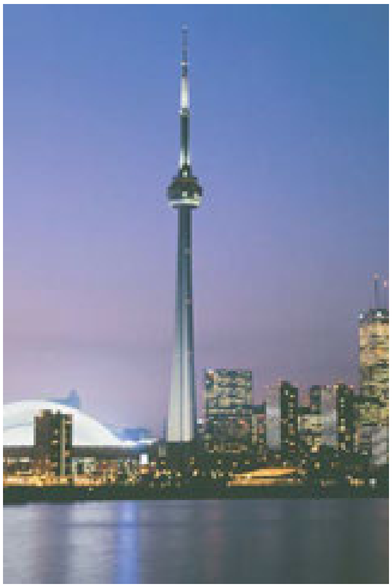
$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$

El significado físico de la respuesta en el ejemplo 2 es que la corriente eléctrica que fluye desde el condensador a la lámpara de flash, después de 0.04 segundos, es de unos −670 microamperios.

El problema de la velocidad

Si usted mira el velocímetro de un automóvil mientras viaja en el tráfico de la ciudad, se ve que la aguja no se queda quieta por mucho tiempo, es decir, la velocidad del automóvil no es constante. Suponemos, al ver el velocímetro, que el coche tiene una velocidad determinada en cada instante, pero, ¿cómo se define la velocidad "instantánea"? Vamos a investigar el ejemplo de la caída de una pelota.

V EJEMPLO 3 Supongamos que una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN en Toronto, a 450 m sobre el suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.



© 2003 Brand X Pictures/Jupiter Images/Fotosearch

La Torre CN en Toronto fue el edificio autoestable más alto en el mundo durante 32 años.

SOLUCIÓN Por medio de experimentos llevados a cabo hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia que recorre cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (Este modelo de caída libre no considera la resistencia del aire.) Si la distancia de caída después de t segundos se denota por $s(t)$ y se mide en metros, entonces la ley de Galileo se expresa por la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para encontrar la velocidad después de 5 s es que se trata de un solo instante de tiempo ($t = 5$), por lo que no contamos con un intervalo de tiempo. Sin embargo, podemos aproximar la cantidad deseada mediante el cálculo de la velocidad promedio en el breve intervalo de tiempo de una décima de segundo, desde $t = 5$ hasta $t = 5.1$:

$$\begin{aligned} \text{velocidad promedio} &= \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} \\ &= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1} \\ &= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos cada vez más pequeños.

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

Parece que, a medida que acorta el periodo, la velocidad promedio es cada vez más cercana a 49 m/s. La **velocidad instantánea** cuando $t = 5$ se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante periodos cada vez más cortos que comienzan en $t = 5$. Así, la velocidad (instantánea) después de 5 s es

$$v = 49\,\text{m/s}$$

Usted puede sospechar (y no está equivocado) que los cálculos utilizados en la solución de este problema son muy similares a los utilizados anteriormente en esta sección para encontrar tangentes. De hecho, hay una estrecha conexión entre el problema de obtener la tangente y aquel de encontrar la velocidad. Si dibujamos la gráfica de la función de la distancia recorrida por la pelota (como en la figura 5) y consideramos los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ sobre la gráfica, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

que es la misma que la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[a, a + h]$. Por tanto, la velocidad en el instante $t = a$ (el límite de las velocidades promedio cuando h tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

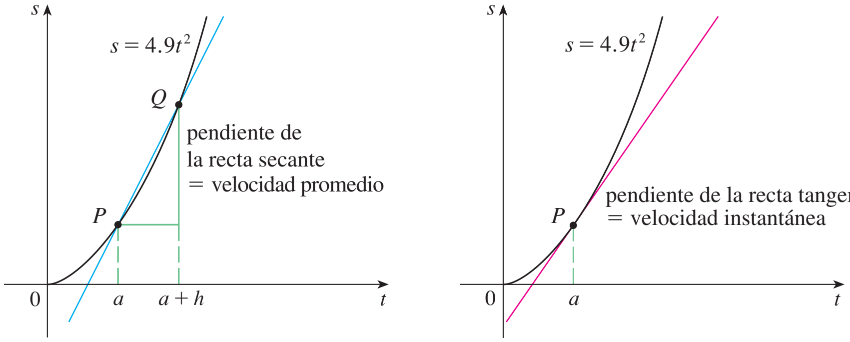


FIGURA 5

Los ejemplos 1 y 3 muestran que, para resolver los problemas de la tangente y la velocidad, debe ser capaz de calcular límites. Después de estudiar los métodos para calcular límites en las siguientes cinco secciones, regresaremos a estos problemas de encontrar tangentes y velocidades en la sección 2.7.

2.1 Ejercicios

1. Un tanque contiene 1 000 galones de agua que se drenan por la parte inferior del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen V de agua que queda en el tanque (en galones) después de t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

a) Si P es el punto (15, 250) sobre la gráfica de V, encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto sobre la gráfica con $t = 5, 10, 20, 25$ y 30.
b) Estime la pendiente de la recta tangente en P por medio del promedio de las pendientes de dos rectas secantes.
c) Utilice una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P. (Esta pendiente representa la rapidez a la que fluye el agua del tanque después de 15 minutos.)

2. Un monitor se utiliza para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. El aparato compila el número de latidos del corazón después de t minutos y se registran en una tabla. Cuando los datos de la tabla se representan gráficamente, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t(min)	36	38	40	42	44
Latidos del corazón	2 530	2 661	2 806	2 948	3 080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Utilice los datos para estimar el ritmo cardiaco del paciente después de 42 minutos, utilizando la recta secante entre los puntos con los valores dados de t.
a) $t = 36$ y $t = 42$ b) $t = 38$ y $t = 42$
c) $t = 40$ y $t = 42$ d) $t = 42$ y $t = 44$

¿Cuáles son sus conclusiones?

3. El punto $P(2, -1)$ se encuentra en la curva $y = 1/(1 - x)$
a) Si Q es el punto $(x, 1/(1 - x))$, utilice la calculadora para hallar la pendiente de la recta secante PQ (con una precisión de seis decimales) para los siguientes valores de x:
i) 1.5 ii) 1.9 iii) 1.99 iv) 1.999
v) 2.5 vi) 2.1 vii) 2.01 viii) 2.001
b) Utilice los resultados del inciso a), para intuir el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(2, -1)$.
c) Utilizando la pendiente del inciso b), obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva en $P(2, -1)$.

4. El punto $P(0.5, 0)$ se encuentra sobre la curva $y = \cos \pi x$.
a) Si Q es el punto $(x, \cos \pi x)$, utilice la calculadora para hallar la pendiente de la secante PQ (con una precisión de seis decimales) para los siguientes valores de x:
i) 0 ii) 0.4 iii) 0.49 iv) 0.499
v) 1 vi) 0.6 vii) 0.51 viii) 0.501
b) Utilice los resultados del inciso a), para intuir el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
c) Utilice la pendiente del inciso b), para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
d) Dibuje la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

5. Si se lanza una pelota al aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura en pies después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$.
a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que comienza cuando $t = 2$ y permanece
i) 0.5 segundos ii) 0.1 segundos
iii) 0.05 segundos iv) 0.01 segundos
b) Estime la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

6. Si una piedra se lanza hacia arriba en el planeta Marte a una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después está dada por $y = 10t - 1.86t^2$.
a) Encuentre la velocidad promedio en los intervalos de tiempo dados:
i) [1, 2] ii) [1, 1.5] iii) [1, 1.1]
iv) [1, 1.01] v) [1, 1.001]
b) Estime la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

7. La tabla muestra la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

a) Encuentre la velocidad promedio para cada periodo:
i) [1, 3] ii) [2, 3] iii) [3, 5] iv) [3, 4]
b) Utilice la gráfica de s en función de t para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

8. El desplazamiento (en centímetros) de una partícula que se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre la velocidad promedio durante cada periodo:
i) [1, 2] ii) [1, 1.1]
iii) [1, 1.01] iv) [1, 1.001]
b) Estime la velocidad instantánea de la partícula cuando $t = 1$.

9. El punto $P(1, 0)$ se encuentra sobre la curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.
a) Si Q es el punto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, halle la pendiente de la recta secante PQ (con una precisión de cuatro decimales) para $x = 2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ y 0.9. ¿Las pendientes parecen estar acercándose a un límite?
b) Utilice la gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes en el inciso a) no están cercanas a la pendiente de la recta tangente en P.
c) Eligiendo rectas secantes apropiadas, estime la pendiente de la recta tangente en P.

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

2.2 Límite de una función

En la sección anterior vimos cómo surgen los límites cuando queremos encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto; ahora dirigimos nuestra atención a los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Vamos a investigar el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos a 2. La siguiente tabla muestra los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

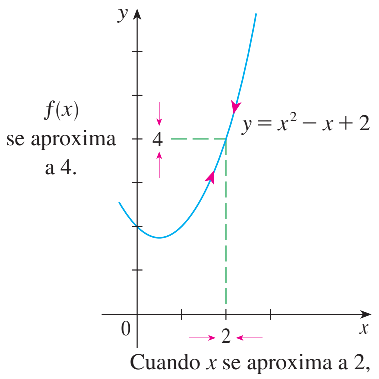


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

De la tabla y la gráfica de f (una parábola) que se muestra en la figura 1, vemos que cuando x se aproxima a 2 (por ambos lados de 2), $f(x)$ se aproxima a 4. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cerca de 4 como queramos, tomando x suficientemente cercano a 2. Esto lo expresamos diciendo que "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x tiende a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, usamos la siguiente notación.

1 Definición Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

En términos generales, esto quiere decir que los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x tiende a a. En otras palabras, los valores de $f(x)$ tienden a estar más y más cerca del número L cuando x se acerca cada vez más al número a (de ambos lados de a), pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se dará una definición más precisa.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Note la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, no se considera $x = a$. De hecho, $f(x)$ no necesita estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo se define f *cerca* de a.

La figura 2 muestra las gráficas de tres funciones. Observe que en el inciso c), $f(a)$ no está definida y, en el inciso b), $f(a) \neq L$. Sin embargo, en cada caso, independientemente de lo que sucede en a, es cierto que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

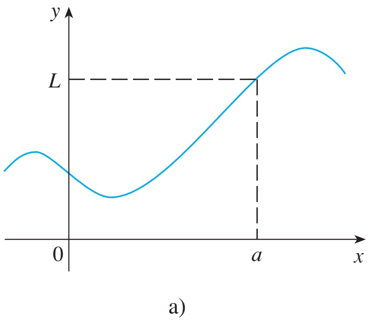


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 Conjeture el valor de $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

SOLUCIÓN Observe que la función $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa, porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que se consideran los valores de x que están cerca de a, pero no iguales a a.

Las tablas de la izquierda dan valores de $f(x)$ (con una precisión de seis decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no iguales a 1). Sobre la base de los valores en las tablas, hacemos la suposición de que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

El ejemplo 1 se ilustra en la gráfica de f, en la figura 3. Ahora vamos a cambiar un poco f, dándole el valor de 2 cuando $x = 1$ y llamando g a la función obtenida:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g conserva el mismo límite cuando x tiende a 1. (Véase la figura 4.)

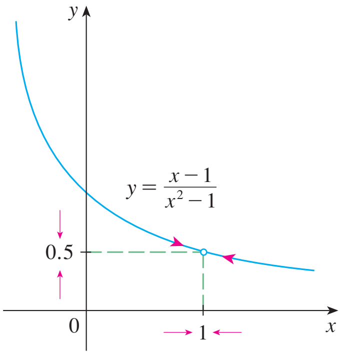


FIGURA 3

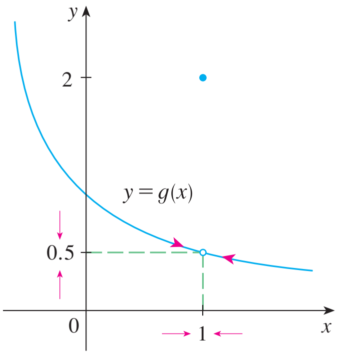


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Estime el valor de $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUCIÓN La tabla enlista los valores de la función para varios valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

A medida que t se acerca a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.1666666. . ., así que suponemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si hubiéramos tomado valores aún más pequeños de t? La tabla en el margen muestra los resultados de una calculadora; sin duda, ¡algo extraño parece estar sucediendo!

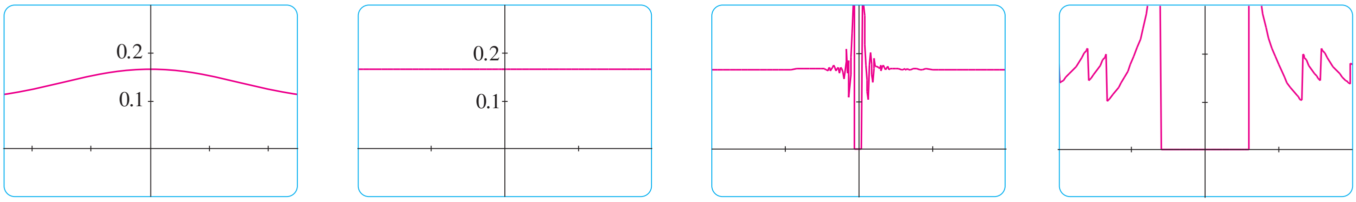
Si trata de obtener estos cálculos en su propia calculadora podría obtener valores diferentes, pero al final obtendrá el valor 0 si hace t suficientemente pequeña. ¿Significa esto que la respuesta es realmente 0, en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$ como se demuestra en la siguiente sección. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2+9}$ está muy cerca de 3 cuando t es pequeña. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeña, una calculadora da el valor de 3.000 para $\sqrt{t^2+9}$. . . para tantos dígitos como la calculadora sea capaz de aceptar.)

www.stewartcalculus.com
Para una mayor explicación de por qué las calculadoras, a veces, dan valores falsos, haga clic en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, véase la sección llamada *The Perils of Subtraction*.

Algo similar sucede cuando tratamos de graficar la función

$$f(t)=\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

del ejemplo 2, en una calculadora graficadora o computadora. Los incisos a) y b) de la figura 5 muestran gráficas bastante precisas de f, y cuando se utiliza el modo *trace* (si está disponible) puede estimarse fácilmente que el límite es cercano a $\frac{1}{6}$. Pero si nos acercamos demasiado, como en los incisos c) y d), entonces obtenemos gráficas incorrectas, de nuevo debido a problemas con la sustracción.



a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Obtenga el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Usando una calculadora (y recordando que, si $x \in \mathbb{R}$, sen x significa el seno del ángulo x medido en radianes) podemos elaborar una tabla de valores con una precisión de hasta ocho decimales. De la tabla a la izquierda y la gráfica en la figura 6 suponemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
±1.0	0.84147098
±0.5	0.95885108
±0.4	0.97354586
±0.3	0.98506736
±0.2	0.99334665
±0.1	0.99833417
±0.05	0.99958339
±0.01	0.99998333
±0.005	0.99999583
±0.001	0.99999983

De hecho, esta conjetura es correcta como se demostrará en el capítulo 3 utilizando un argumento geométrico.

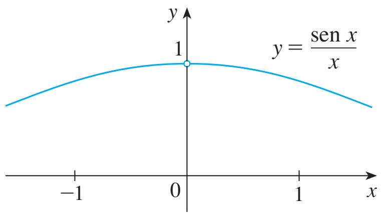


FIGURA 6

Informática de sistemas algebraicos
Los sistemas algebraicos computarizados (SAC) tienen comandos que calculan límites. A fin de evitar los tipos de trampas como las de los ejemplos 2, 4 y 5, no calculan límites a partir de la experimentación numérica. En su lugar, utilizan técnicas más sofisticadas, como el cálculo de series infinitas. Si usted tiene acceso a un SAC, utilice los comandos para límites a fin de estimar los límites de los ejemplos de esta sección y revisar sus respuestas en los ejercicios de este capítulo.

V EJEMPLO 4 Investigue $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Una vez más la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Evaluando la función para algunos valores pequeños de x, obtenemos

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Sobre la base de esta información podríamos estar tentados a suponer que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez nuestra suposición es errónea. Tenga en cuenta que, aunque $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para muchos valores de x cercanos a 0. Esto puede verse en la gráfica de f que se muestra en la figura 7.

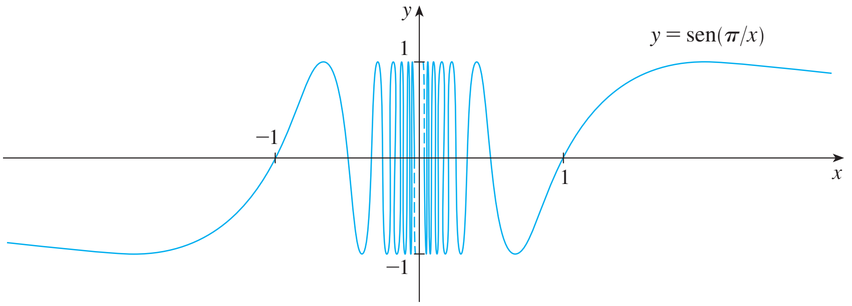


FIGURA 7

Las líneas punteadas, cerca del eje y indican que los valores del sen(π/x) oscilan infinitamente entre 1 y -1 cuando x tiende a 0. (Véase el ejercicio 45.)

Ya que los valores de $f(x)$ no se acercan a un número fijo cuando x tiende a 0,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre el $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right)$.

SOLUCIÓN Como antes, elaboramos una tabla de valores. De la primera tabla en el margen parece que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0$$

Pero si perseveramos con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0.000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Más adelante veremos que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$; entonces deduciremos que el límite es 0.0001.

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los riesgos al intentar conjeturar el valor de un límite. Es fácil caer en el valor incorrecto si utilizamos valores inadecuados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como muestra la discusión después del ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores incorrectos. En la siguiente sección, sin embargo, vamos a desarrollar métodos infalibles para el cálculo de límites.

V EJEMPLO 6 La función de Heaviside H se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

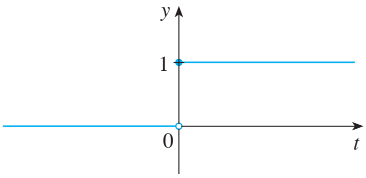


FIGURA 8
La función de Heaviside

[Esta función lleva el nombre del ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925) y se utiliza para describir una corriente eléctrica en un circuito en el tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la figura 8.

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Conforme t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay un único número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxima a 0. Por tanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.

Límites laterales

Hemos notado en el ejemplo 6 que $H(t)$ tiende a 0 cuando t se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ tiende a 1 a medida t se aproxima a 0 por la derecha. Esta situación se indica simbólicamente escribiendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que se consideran sólo los valores de t que son menores que 0. De igual modo, "$t \to 0^+$" indica que se consideran sólo los valores de t que son mayores que 0.

2 Definición Cuando escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

estamos diciendo que el **límite izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** [o **el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda**] es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a L, tanto como queramos, tomando x suficientemente cercanos a a, pero menores que a.

Observe que la definición 2 difiere de la definición 1 sólo en el hecho de que x sea necesariamente menor que a. Del mismo modo, si se requiere que x sea mayor que a, se obtiene "el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha** es igual a L" y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Así, el símbolo "$x \to a^+$" significa que se consideran sólo $x > a$. Estas definiciones se ilustran en la figura 9.

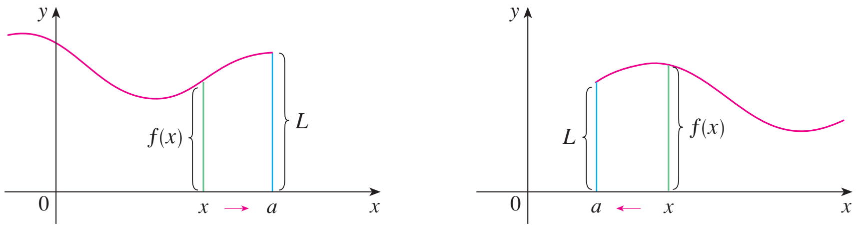


FIGURA 9 a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la definición 1 con las de los límites laterales, vemos que se cumple con lo siguiente.

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

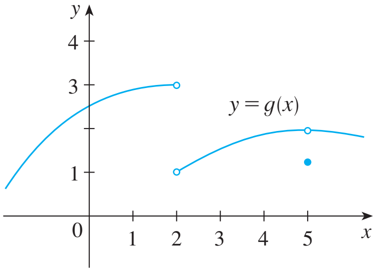


FIGURA 10

V EJEMPLO 7 La gráfica de una función g se muestra en la figura 10. Utilícela para establecer los valores (si existen) de lo siguiente:

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN En la gráfica vemos que los valores de $g(x)$ tienden a 3 conforme x tiende a 2 por la izquierda, pero se acercan a 1 a medida x tiende a 2 por la derecha. Por tanto,

$$\text{a) } \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{b) } \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

c) Dado que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, llegamos a la conclusión de [3] que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

La gráfica también muestra que

$$\text{d) } \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{e) } \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

f) Esta vez los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos, así que, por [3], tenemos

$$\lim_{x\to 5} g(x) = 2$$

A pesar de esto, observe que $g(5) \neq 2$

Límites infinitos

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

SOLUCIÓN Conforme x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Véase la tabla en el margen.) De hecho, se desprende de la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ en la figura 11, que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes, tomando x lo suficientemente cercano a 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, por lo que $\lim_{x\to 0} (1/x^2)$ no existe.

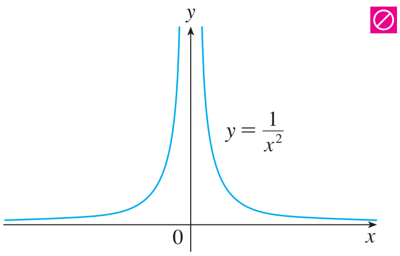


FIGURA 11

Para indicar el tipo de comportamiento exhibido en el ejemplo 8, se usa la notación

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que estemos considerando a ∞ como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en que el límite no existe: $1/x^2$ puede hacerse tan grande como queramos, tomando a x suficientemente cerca de 0.

En general, podemos escribir simbólicamente

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a ser más y más grandes (o "crecen sin límite") a medida que x se acerca más y más a a.

> **4 Definición** Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

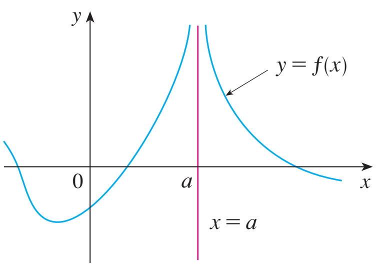


FIGURA 12
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Otra notación para $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

Una vez más, el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es infinito"

o bien "$f(x)$ tiende al infinito cuando x se aproxima a a"

o bien "$f(x)$ crece sin cota cuando x se aproxima a a".

Esta definición se ilustra gráficamente en la figura 12.

Cuando decimos que un número es "negativo muy grande", lo que queremos decir que es negativo, pero su magnitud (valor absoluto) es grande.

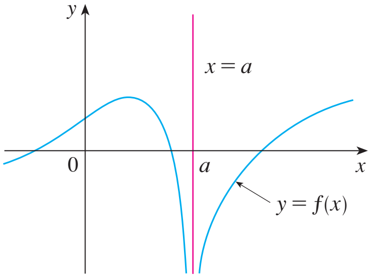


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Un tipo similar de límite, para las funciones que se convierten en negativos muy grandes conforme x se aproxima a a, se precisa en la definición 5 y se ilustra en la figura 13.

> **5 Definición** Sea f definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Entonces
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes, tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

El símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ puede leerse como "el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es infinito negativo" o "$f(x)$ decrece sin límite conforme x tiende a a". Como ejemplo tenemos

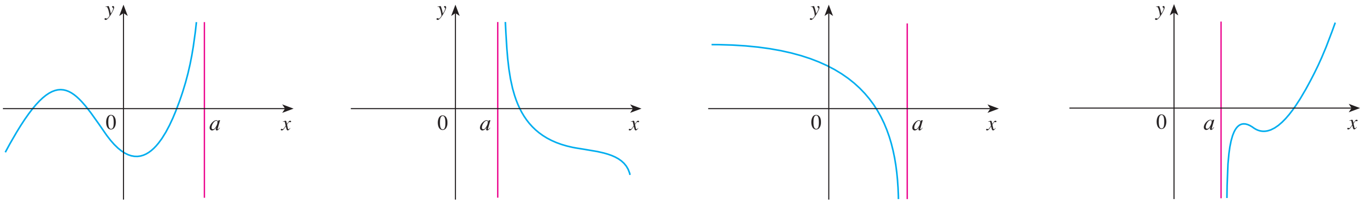
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definiciones similares pueden darse a los límites laterales infinitos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

recordando que "$x \to a^-$" significa que se consideran sólo los valores de x que son menores que a, y del mismo modo "$x \to a^+$" significa que se consideran sólo $x > a$. En la figura 14, se ilustran cuatro de estos casos.



a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

> **6 Definición** La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos una de las siguientes afirmaciones son verdaderas:
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, el eje y es una asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ debido a que $\lim_{x\to 0} (1/x^2) = \infty$. En la figura 14 la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno de los cuatro casos que se muestran. En general, el conocimiento de asíntotas verticales es muy útil para dibujar gráficas.

EJEMPLO 9 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ y $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

SOLUCIÓN Si x tiende a 3 con valores mayores que 3, entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo muy pequeño y $2x$ está muy cerca de 6, así que el cociente $2x/(x - 3)$ es un número *positivo* muy grande. Por tanto, intuitivamente, podemos ver que

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

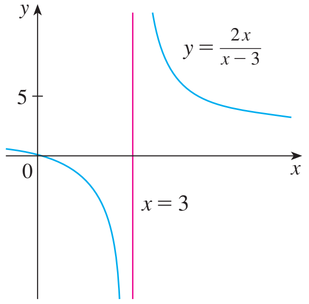


FIGURA 15

Asimismo, si x es cercano a 3, pero con valores menores que 3, entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño, pero $2x$ es aún un número positivo (cercano a 6). Así, $2x/(x - 3)$ es un número *negativo* muy grande. Por tanto,

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

La gráfica de la curva $y = 2x/(x - 3)$ se ilustra en la figura 15. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

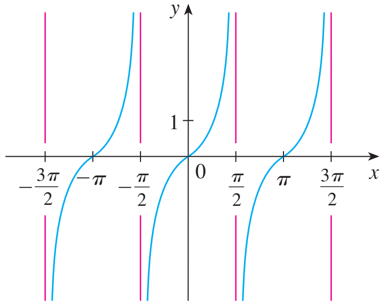


FIGURA 16
$y = \tan x$

EJEMPLO 10 Encuentre las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN Ya que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

hay posibles asíntotas verticales donde $\cos x = 0$. De hecho, puesto que $\cos x \to 0^+$ cuando $x \to (\pi/2)^-$ y $\cos x \to 0^-$ a medida que $x \to (\pi/2)^+$, mientras $\operatorname{sen} x$ es positivo cuando x está cerca de $\pi/2$, tenemos

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Esto muestra que la recta $x = \pi/2$ es una asíntota vertical. Un razonamiento similar, muestra que las rectas $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un número entero, son todas asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$. La gráfica en la figura 16 confirma esto.

Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural $y = \ln x$. En la figura 17 vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

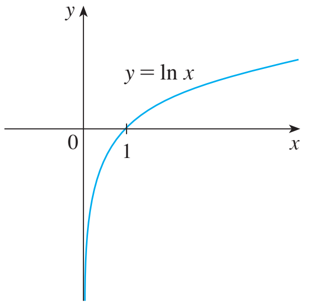


FIGURA 17
El eje y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

y así, la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical. De hecho, lo mismo es cierto para $y = \log_a x$ siempre que $a > 1$. (Véanse las figuras 11 y 12 en la sección 1.6.)

2.2 Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras cuál es el significado de la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla con esta proposición y que aún $f(2) = 3$ sea verdadero? Explique.

2. Explique qué significa decir que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación, ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

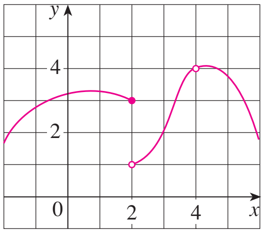
3. Explique el significado de cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Utilice la gráfica de *f* para establecer el valor de cada cantidad si ésta existe. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

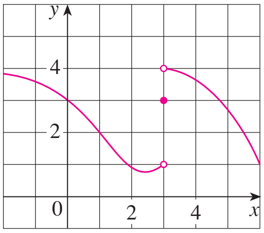
d) $f(2)$ e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ f) $f(4)$



5. Para la función *f* cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ e) $f(3)$



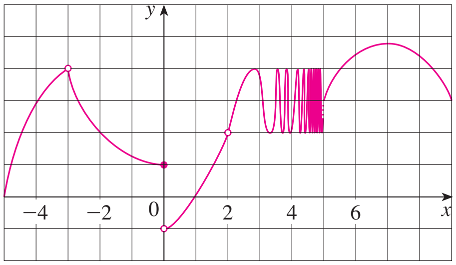
6. Para la función *h* cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

d) $h(-3)$ e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ h) $h(0)$ i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

j) $h(2)$ k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

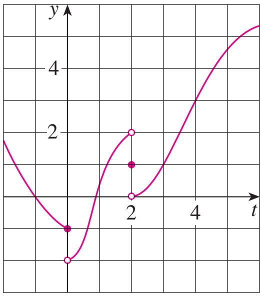


7. Para la función *g* cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades si existe. Si no, explique por qué.

a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

g) $g(2)$ h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

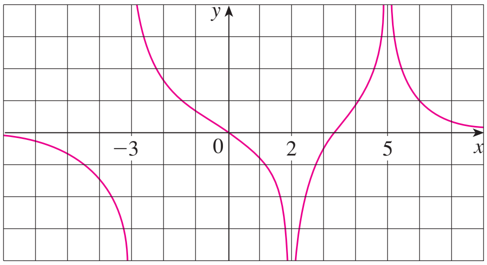


8. Para la función *R* cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

a) $\lim_{x \to 2} R(x)$ b) $\lim_{x \to 5} R(x)$

c) $\lim_{x \to -3^-} R(x)$ d) $\lim_{x \to -3^+} R(x)$

e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



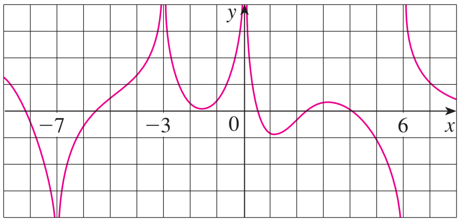
Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

9. Para la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

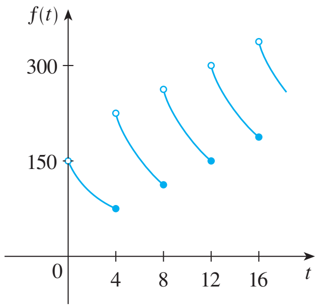
f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11-12 Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones y utilícela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

13-14 Utilice la gráfica de la función f para establecer el valor de cada uno de los siguientes límites, si es que existen. Si no, explique por qué.

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15-18 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

15. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2,\quad f(0) = 1$

16. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1,\quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -2,\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2,$
$f(0) = -1,\quad f(3) = 1$

17. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4,\quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2,\quad \lim_{x\to -2} f(x) = 2,$
$f(3) = 3,\quad f(-2) = 1$

18. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = 3,$
$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0,\quad f(0) = 2,\quad f(4) = 1$

19-22 Conjeture el valor de cada uno de los siguientes límites (si existen) evaluando la función dada en los números propuestos (con una precisión de seis decimales).

19. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001,$
$1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

20. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999,$
$-2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$

21. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t}$, $t = \pm 0.5,\ \pm 0.1,\ \pm 0.01,\ \pm 0.001,\ \pm 0.0001$

22. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^5 - 32}{h}$,
$h = \pm 0.5,\ \pm 0.1,\ \pm 0.01,\ \pm 0.001,\ \pm 0.0001$

23-26 Utilice una tabla de valores para estimar el valor de cada uno de los siguientes límites. Si dispone usted de una calculadora o computadora, utilícela para confirmar gráficamente su resultado.

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$ **24.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

25. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$ **26.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

27. a) Por medio de la grafica de la función $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y, estime el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

b) Verifique su respuesta del inciso a) mediante la evaluación de $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

28. a) Estime el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } \pi x}$$

graficando la función $f(x) = (\text{sen } x)/(\text{sen } \pi x)$. Exprese su respuesta con una precisión de dos decimales.

b) Verifique su respuesta del inciso a) evaluando $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

29-37 Determine cada uno de los siguientes límites infinitos.

29. $\lim_{x \to -3^+} \frac{x + 2}{x + 3}$

30. $\lim_{x \to -3^-} \frac{x + 2}{x + 3}$

31. $\lim_{x \to 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$

32. $\lim_{x \to 5^-} \frac{e^x}{(x - 5)^3}$

33. $\lim_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

34. $\lim_{x \to \pi^-} \cot x$

35. $\lim_{x \to 2\pi^-} x \csc x$

36. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

37. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

---

38. a) Encuentre las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

b) Verifique su respuesta al inciso a) graficando la función.

39. Determine $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^3 - 1}$ y $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^3 - 1}$

a) evaluando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que tiendan a 1, por el lado izquierdo y por el lado derecho.

b) razonando como en el ejemplo 9, y

c) a partir de la gráfica de f.

40. a) Por medio de la gráfica de la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y estime el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Verifique su respuesta del inciso a) para evaluar $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

41. a) Estime el valor de $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ con una precisión de cinco decimales. ¿Le parece conocido este número?

b) Ilustre el inciso a) graficando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

42. a) Grafique la función $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. ¿Piensa que la gráfica es una buena representación de f?

b) ¿Cómo conseguiría una gráfica que represente mejor a f?

43. a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1\,000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05 e intuya el valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1\,000} \right)$$

b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Intuya otra vez.

44. a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.

b) Intuya el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

c) Evalúe $h(x)$ para sucesivos valores pequeños de x hasta que finalmente alcance un valor de 0 para $h(x)$. ¿Aún confía usted en que su conjetura en el inciso b) es correcta? Explique por qué finalmente obtuvo valores 0. (En la sección 4.4 se explicará un método para evaluar el límite.)

d) Grafique la función h en un rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Después haga un acercamiento hacia el punto donde la gráfica interseca el eje y, para estimar el límite de $h(x)$ cuando x tienda a 0. Continúe el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso c).

45. Grafique la función $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en el rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Después haga acercamientos al origen varias veces. Haga comentarios relacionados con el comportamiento de esta función.

46. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c^-$?

47. Utilice una gráfica para estimar la ecuación de todas las asíntotas verticales de la curva

$$y = \tan(2 \text{ sen } x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Después, encuentre las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

48. a) Utilice evidencias numéricas y gráficas para intuir el valor del límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

b) ¿Qué tan cerca a 1 debe estar x para asegurar que la función del inciso a) está dentro de una distancia de 0.5 de este límite?

2.3 Cálculo de límites usando las leyes de los límites

En la sección 2.2 utilizamos calculadoras y gráficas para intuir los valores de un límite, pero observamos que tales métodos no siempre nos llevan a la respuesta correcta. En esta sección utilizaremos las siguientes propiedades de los límites, llamadas *leyes de los límites*, para calcularlos.

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x)\,g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Estas cinco leyes pueden expresarse verbalmente como sigue:

1. El límite de una suma es la suma de los límites. (Ley de la suma)
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites. (Ley de la diferencia)
3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función. (Ley del múltiplo constante)
4. El límite de un producto es el producto de los límites. (Ley del producto)
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero). (Ley del cociente)

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ está cerca de L y $g(x)$ está cerca de M, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ está muy cerca de $L + M$. Esto nos da una base intuitiva para creer que la ley 1 es verdadera. En la sección 2.4 daremos una definición precisa de la idea de límite y la utilizaremos para demostrar esta ley. Las demostraciones del resto de las leyes están dadas en el apéndice F.

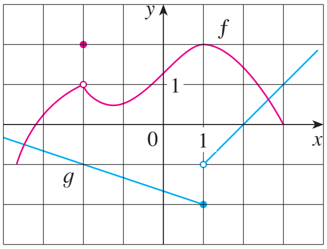


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Utilice las leyes de los límites y las gráficas de f y g en la figura 1 para evaluar los siguientes límites, si es que existen.

a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

a) De las gráficas de f y g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Por tanto, tenemos

$$\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)] \qquad \text{(por la ley 1)}$$

$$= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= 1 + 5(-1) = -4$$

b) Vemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

Así que no podemos utilizar la ley 4 para el límite deseado, pero *podemos* utilizarla para los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = 2\cdot(-2) = -4 \qquad \lim_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = 2\cdot(-1) = -2$$

Los límites por la izquierda y por la derecha no son iguales, así que $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ no existe.

c) La gráfica muestra que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

Ya que el límite del denominador es 0, no podemos utilizar la ley 5. El límite dado no existe porque el denominador tiende a 0, mientras que el numerador se acerca a un número no cero.

Si utilizamos repetidamente la ley del producto con $g(x) = f(x)$, obtenemos la siguiente ley.

Ley de la potencia

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ donde n es un número entero positivo

Para la aplicación de estas seis leyes, necesitamos utilizar dos límites especiales:

7. $\lim_{x\to a} c = c$

8. $\lim_{x\to a} x = a$

Estos límites son obvios desde un punto de vista intuitivo (establézcalos en palabras o dibuje las gráficas de $y = c$ y $y = x$), pero en los ejercicios de la sección 2.4 se requieren las demostraciones basadas en la definición precisa.

Si hacemos $f(x) = x$ en la ley 6 y utilizamos la ley 8, obtenemos otra forma especial de límite.

9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ donde n es un número entero positivo

Un límite similar con el que se cumple para las raíces es el siguiente. (Para la raíz cuadrada, la demostración se resume en el ejercicio 37 de la sección 2.4.)

10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un número entero positivo

(Si n es par, suponemos que $a > 0$.)

Más generalmente, tenemos la siguiente ley que hemos de demostrar en la sección 2.5 como una consecuencia de la ley 10.

Ley de la raíz

11. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ donde n es un número entero positivo

[Si n es par, suponemos que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$.]

EJEMPLO 2 Evalúe los siguientes límites y justifique cada paso

a) $\lim_{x\to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

a)

$$\lim_{x\to 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5} (2x^2) - \lim_{x\to 5} (3x) + \lim_{x\to 5} 4 \quad \text{(por las leyes 2 y 1)}$$

$$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 \quad \text{(por la ley 3)}$$

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 \quad \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}$$

$$= 39$$

b) Empezamos utilizando la ley 5, pero su uso está completamente justificado sólo en la etapa final cuando vemos que los límites del numerador y el denominador existen y el límite del denominador no es cero.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x\to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2} (5 - 3x)} \quad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x} \quad \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \quad \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}$$

$$= -\frac{1}{11}$$

NOTA Si hacemos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habríamos obtenido la respuesta correcta del ejemplo 2a) sustituyendo 5 por x. Del mismo modo, la sustitución directa aporta la respuesta correcta en el inciso b). Las funciones en el ejemplo 2 son una función polinomial y una función racional, respectivamente, y el mismo uso de las leyes de los límites demuestra que la sustitución directa siempre sirve para este tipo de funciones (Véanse los ejercicios 55 y 56). Este hecho se expresa de la siguiente manera:

Propiedad de sustitución directa Si f es una función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Newton y los límites

Isaac Newton nació el día de Navidad en 1642, año de la muerte de Galileo. Cuando entró en la Universidad de Cambridge en 1661, Newton no sabía muchas matemáticas, pero aprendió rápidamente mediante la lectura de Euclides y Descartes, y asistiendo a las conferencias de Isaac Barrow. Cambridge fue cerrada a causa de la peste en 1665 y 1666, y Newton regresó a su casa a reflexionar sobre lo que había aprendido. Esos dos años fueron extraordinariamente productivos porque hizo cuatro de sus descubrimientos más importantes: 1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; 2) su trabajo sobre el cálculo diferencial e integral; 3) sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal y 4) sus experimentos con el prisma relacionados con la naturaleza de la luz y el color. Debido a un temor a la controversia y la crítica, se mostró reacio a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, a instancias del astrónomo Halley, que Newton publicó sus *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton expone su versión del Cálculo y su utilización en la investigación de la mecánica, la dinámica de fluidos, y el movimiento ondulatorio, así como en la explicación del movimiento de los planetas y los cometas.

Los inicios del Cálculo se encuentran en los procedimientos para obtener áreas y volúmenes ideados por los antiguos sabios griegos Eudoxo y Arquímedes. A pesar de que los aspectos de la idea de límite están implícitos en su “método de agotamiento”, Eudoxo y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de límite. Tampoco matemáticos como Cavalieri, Fermat ni Barrow, antecesores inmediatos de Newton en el desarrollo del Cálculo, utilizaron los límites. Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente de límites. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades “se acercan más que cualquier diferencia dada”. Newton dijo que el límite era el concepto básico en el Cálculo, pero fue el posterior trabajo de matemáticos como Cauchy y otros más el que finalmente clarificó las ideas relacionadas con los límites.

Las funciones con la propiedad de sustitución directa se llaman *continuas* en $x = a$ y las estudiaremos en la sección 2.5. Sin embargo, no todos los límites pueden ser evaluados por sustitución directa, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No podemos encontrar el límite por sustitución directa de $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Tampoco podemos aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. Ahora, necesitamos de un proceso algebraico preliminar. Factorizando el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

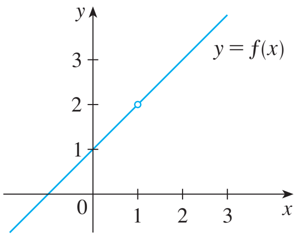
El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x tiende a 1, tenemos que $x \neq 1$ y, por tanto, $x - 1 \neq 0$. Así, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

El límite en este ejemplo surgió en la sección 2.1 cuando intentamos hallar la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1).

NOTA En el ejemplo 3 pudimos calcular el límite sustituyendo la función dada, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, por la función más sencilla, $g(x) = x + 1$, que posee el mismo límite. Esto es válido porque $f(x) = g(x)$, excepto cuando $x = 1$, y al calcular el límite cuando x tiende 1, no se considera qué sucede cuando x es en realidad *igual* a 1. En general, se tiene el siguiente hecho.

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$ siempre que el límite exista.



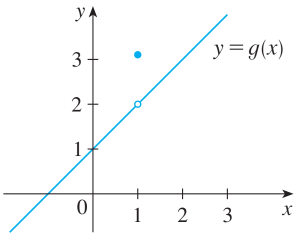


FIGURA 2
Las gráficas de las funciones f (del ejemplo 3) y g (del ejemplo 4)

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 1} g(x)$ donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aquí g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor del límite cuando x tiende a 1, no depende del valor de la función en 1. Ya que $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, tenemos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Note que los valores de las funciones en los ejemplos 3 y 4 son idénticos, excepto cuando $x = 1$ (véase la figura 2) y tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si definimos

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h},$$

entonces, como en el ejemplo 3, no podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ poniendo $h = 0$, ya que $F(0)$ es indefinida. Pero si simplificamos algebraicamente a $F(h)$, encontramos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que consideramos sólo $h \neq 0$ cuando hacemos que h tienda a 0.) Así

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9} + 3}{\sqrt{t^2+9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Este cálculo confirma la conjetura que hicimos en el ejemplo 2 de la sección 2.2.

Algunos límites se calculan mejor encontrando primero los límites por la izquierda y por la derecha. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Decimos que los límites por los dos lados existen si y sólo si ambos límites existen y son iguales.

1 Teorema $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Cuando calculamos límites laterales, utilizamos el hecho de que las leyes de los límites también se cumplen para límites de este tipo.

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El resultado del ejemplo 7 parece verosímil viendo la figura 3.

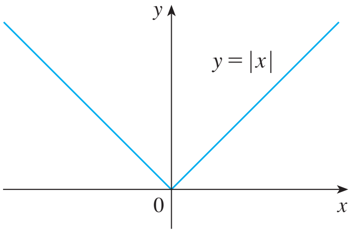


FIGURA 3

Dado que $|x| = x$ para $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ así que

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

Por tanto, por el teorema 1

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

V **EJEMPLO 8** Demuestre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

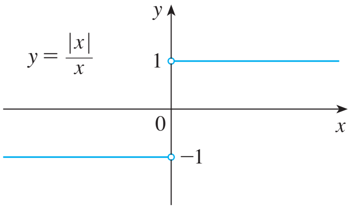


FIGURA 4

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, se sigue, del teorema 1, que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la figura 4 y exhibe la coincidencia con los límites laterales que encontró.

EJEMPLO 9 Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe.

Se muestra en el ejemplo 3 de la sección 2.4 que el $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN Ya que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

Dado que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los límites por la izquierda y por la derecha son iguales. Así que el límite existe y

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$$

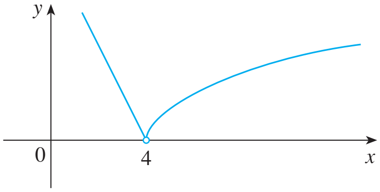


FIGURA 5

La gráfica de f se muestra en la figura 5.

Otras notaciones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. En ocasiones, la función entero mayor se llama *función piso.*

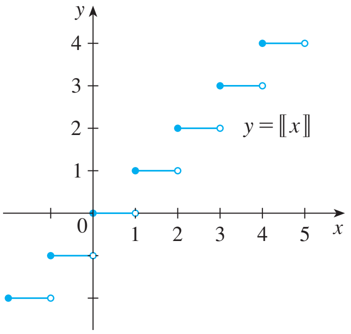


FIGURA 6
Función entero mayor

EJEMPLO 10 La **función entero mayor** está definida por $[\![x]\!]$ = el mayor entero que es menor que o igual a x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN La gráfica de la función entero mayor se ilustra en la figura 6. Dado que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Así que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tenemos

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

Ya que estos límites laterales no son iguales, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe por el teorema 1.

Los dos teoremas siguientes dan dos propiedades adicionales para los límites. Sus demostraciones se encuentran en el apéndice F.

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en $x = a$) y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 El teorema de la compresión Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

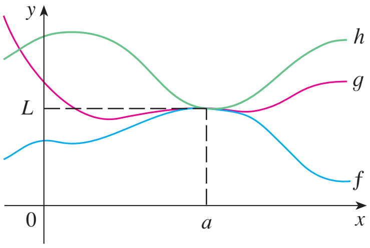


FIGURA 7

El teorema de la compresión, llamado a veces teorema del sándwich o del apretón, se ilustra en la figura 7. Se dice que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces g es forzada a tener el mismo límite L en a.

V EJEMPLO 11 Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Primero note que **no podemos** utilizar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

ya que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 4 en la sección 2.2).

En su lugar aplicamos el teorema de la compresión, así que tenemos que encontrar una función f menor que $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y una función h mayor que g tal que $f(x)$ y $h(x)$ tiendan a 0.

Para hacer esto, utilizamos lo que sabemos de la función seno. Ya que el seno de cualquier número está entre -1 y 1, podemos afirmar que

4
$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$$

Cualquier desigualdad permanece válida cuando la multiplicamos por un número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, así que multiplicando cada lado de la desigualdad en 4 por x^2, obtenemos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como se ilustra en la figura 8. Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$

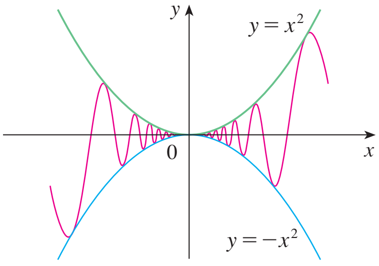


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ del teorema de la compresión, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

2.3 Ejercicios

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

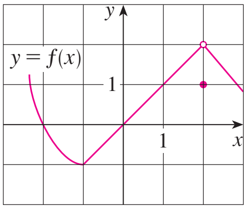
encuentre los límites que existen. Si el límite no existe, explique por qué.

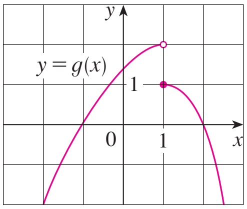
a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$ b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$

c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Las gráficas de f y g están dadas. Utilícelas para evaluar cada límite si es que existe. Si el límite no existe, explique por qué.





a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$ b) $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x\to 2}[x^3 f(x)]$ f) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3 + f(x)}$

3-9 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las leyes de los límites apropiadas.

3. $\lim_{x\to 3}(5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

4. $\lim_{x\to -1}(x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t\to -2}\dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t\to 2}\left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5}\right)^2$

9. $\lim_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) Considerando el inciso a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 3)$$

es correcta.

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

11-32 Evalúe cada uno de los siguientes límites si éstos existen.

11. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

12. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\lim_{x\to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

33. a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

graficando la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0 e intuya el valor del límite.

c) Utilice las leyes de los límites para probar que su conjetura es correcta.

34. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ con dos decimales.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con cuatro decimales.

c) Utilice las leyes de los límites para encontrar el valor exacto del límite.

35. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ graficando en la misma pantalla.

36. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\, \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

evidenciándolo con las gráficas de las funciones f, g y h (en la notación del teorema de la compresión), en la misma pantalla.

37. Si $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encuentre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

38. Si $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para toda x, evalúe $\lim_{x\to 1} g(x)$.

39. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encuentre cada uno de los siguientes límites si éstos existen. Si el límite no existe, explique por qué.

41. $\lim_{x\to 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim_{x\to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x\to 0.5^-} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim_{x\to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

46. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

47. La *función signo*, denotada por sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de esta función

b) Encuentre cada uno de los siguientes límites o explique por qué no existen.

i) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ ii) $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$

iii) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ iv) $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Encuentre $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

b) ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

c) Trace la gráfica de f.

49. Sea $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

a) Encuentre

i) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ ii) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

b) ¿Existe $\lim_{x\to 2} g(x)$?

c) Trace la gráfica de g.

50. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Evalúe cada una de los siguientes límites si es que existen.

i) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ iii) $g(1)$

iv) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ v) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

b) Trace la gráfica de g.

51. a) Si el símbolo ⟦ ⟧ denota la función entero mayor definida en el ejemplo 10, evalúe:

i) $\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ ii) $\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ iii) $\lim_{x\to -2.4} [\![x]\!]$

b) Si n es un entero, evalúe

i) $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ ii) $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$

c) ¿Para qué valores de a $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$ existe?

52. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!], -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

a) Trace la gráfica de f.

b) Evalúe cada uno de los siguientes límites si existen.

i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim_{x\to (\pi/2)^-} f(x)$

iii) $\lim_{x\to (\pi/2)^+} f(x)$ iv) $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$

c) ¿Para qué valores de a $\lim_{x\to a} f(x)$ existe?

53. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, muestre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$.

54. En la teoría de la relatividad, la fórmula de Contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario el límite lateral por la izquierda?

55. Si p es una función polinomial, demuestre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

56. Si r es una función racional, utilice el ejercicio 55 para demostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ para todo número a en el dominio de r.

57. Si $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

58. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encuentre cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

59. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

60. Demuestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir, aunque no existan $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

61. Demuestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)\,g(x)]$ puede existir, aunque no existan $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

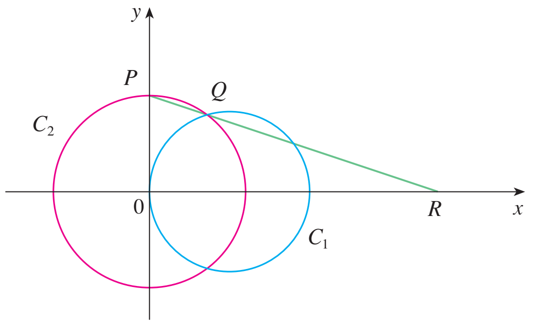
62. Evalúe $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$

63. ¿Existe un número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre el valor de a y el valor del límite.

64. La figura muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 que se contrae con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de las dos circunferencias, y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje de las x. ¿Qué pasa con R cuando C_2 se contrae, esto es, cuando $r \to 0^+$?



2.4 La definición precisa de límite

La definición intuitiva de límite dada en la sección 2.2 es inadecuada para algunos propósitos porque frases como "x es muy cercano a 2" y "$f(x)$ se acerca más y más a L" son muy vagas. A fin de demostrar convincentemente que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0.0001 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

debemos precisar la definición de límite.

Para motivar la definición precisa de límite, consideremos la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Intuitivamente, es claro que cuando x está cerca de 3, pero $x \neq 3$, entonces $f(x)$ está cerca de 5, así que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

Para obtener una información más detallada de cómo varía $f(x)$ cuando x está cerca de 3, nos preguntamos:

¿Qué tan cerca tiene que estar x de 3 para que $f(x)$ difiera de 5 en menos de 0.1?

En esta situación es tradicional utilizar la letra griega δ (delta).

La distancia de x a 3 es $|x - 3|$, y la distancia de $f(x)$ a 5 es $|f(x) - 5|$, así que nuestro problema es encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \quad \text{si} \quad |x - 3| < \delta \quad \text{con } x \neq 3$$

Si $|x - 3| > 0$, entonces $x \neq 3$, así que una formulación equivalente de nuestro problema es encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Note que si $0 < |x - 3| < (0.1)/2 = 0.05$, entonces

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0.05) = 0.1$$

esto es, $$|f(x) - 5| < 0.1 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < 0.05$$

Así, una respuesta al problema está dada por $\delta = 0.05$; esto es, si x está dentro de una distancia de 0.05 de 3, entonces $f(x)$ deberá estar dentro de una distancia de 0.1 de 5.

Si cambiamos el número 0.1 en nuestro problema por el número menor 0.01, entonces, utilizando el mismo método, encontramos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos de 0.01 siempre que x difiera de 3 por menos de $(0.01)/2 = 0.005$:

$$|f(x) - 5| < 0.01 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < 0.005$$

Del mismo modo,

$$|f(x) - 5| < 0.001 \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < 0.0005$$

Los números 0.1, 0.01 y 0.001 que hemos considerado son las *tolerancias de error* que nos podemos permitir. Para que 5 sea el límite exacto de $f(x)$ cuando x tiende a 3, debemos no sólo poder hacer la diferencia entre $f(x)$ y 5 por debajo de cada uno de estos tres números; también debemos ser capaces de estar por debajo de *cualquier* número positivo. Así, por el mismo razonamiento, ¡claro que es posible! Si escribimos ε (la letra griega épsilon) para un número positivo arbitrario, entonces encontramos al igual que antes

1 $$|f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta es una forma precisa de decir que $f(x)$ está cerca de 5 cuando x se acerca a 3 porque 1 establece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ queden dentro de una distancia arbitraria ε a partir de 5, tomando los valores de x dentro de una distancia $\varepsilon/2$ de 3 (con $x \neq 3$).

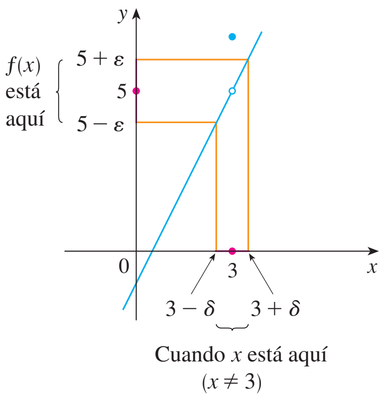


FIGURA 1

Note que $\boxed{1}$ puede reescribirse como sigue:

$$\text{si}\quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3) \quad \text{entonces} \quad 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

y se ilustra en la figura 1. Tomando los valores de x ($\neq 3$) en el intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos lograr que los valores de $f(x)$ estén en el intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Utilizando $\boxed{1}$ como un modelo, damos una definición precisa de límite.

$\boxed{2}$ **Definición** Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x tiene a a es L**, y lo expresamos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si}\quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Puesto que $|x - a|$ es la distancia de x a a y $|f(x) - L|$ es la distancia de $f(x)$ a L, y como ε puede ser arbitrariamente pequeña, la definición de límite puede expresarse en palabras como sigue:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse arbitrariamente pequeña, tomando la distancia de x a a suficientemente pequeña (pero no 0).

Alternamente,

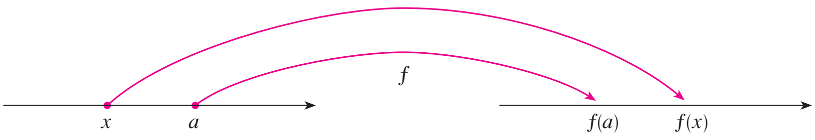
> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse tan cercanos a L como queramos, tomando x lo suficientemente cerca de a (pero no igual a a).

También podemos reformular la definición 2 en términos de intervalos, observando que la desigualdad $|x - a| < \delta$ es equivalente a $-\delta < x - a < \delta$, que puede escribirse como $a - \delta < x < a + \delta$. Además, $0 < |x - a|$ es verdadera si y sólo si $x - a \neq 0$; esto es, $x \neq a$. Del mismo modo, la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente al par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Por tanto, en términos de intervalos, la definición 2 puede establecerse como sigue:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para toda $\varepsilon > 0$ (sin importar que tan pequeña sea ε), podemos encontrar una $\delta > 0$ tal que si x está dentro del intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está dentro del intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Geométricamente, esta afirmación se interpreta representando una función por un diagrama de flechas, como en la figura 2, donde f hace corresponder un subconjunto de $\mathbb{R}$ con otro subconjunto de $\mathbb{R}$.

FIGURA 2



La definición de límite señala que si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ está dado alrededor de L, entonces podemos encontrar un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ alrededor de a tal que f hace corresponder todos los puntos de $(a - \delta, a + \delta)$ (excepto posiblemente en a) con los puntos del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Véase la figura 3.)

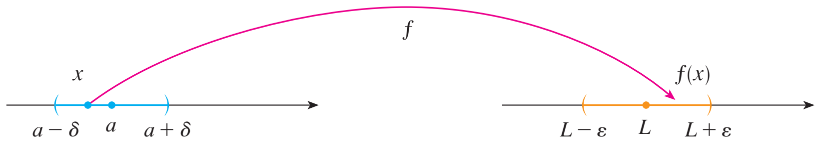


FIGURA 3

Geométricamente, puede darse otra interpretación de límite en términos de la gráfica de una función. Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces dibujamos las recta horizontales $y = L + \varepsilon$, $y = L - \varepsilon$ y la gráfica de f (véase la figura 4). Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringimos a x en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ y tomamos $x \neq a$, entonces la curva $y = f(x)$ está entre las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ (véase la figura 5). Puede usted ver que si se encuentra tal δ, entonces cualquier δ más pequeña también funcionará.

Es importante percatarse de que el proceso ilustrado en las figuras 4 y 5 debe funcionar para *todo* número positivo ε, sin importar qué tan pequeño se elija. En la figura 6 se ilustra que si se elige un ε más pequeño, entonces podría requerirse una δ más pequeña.

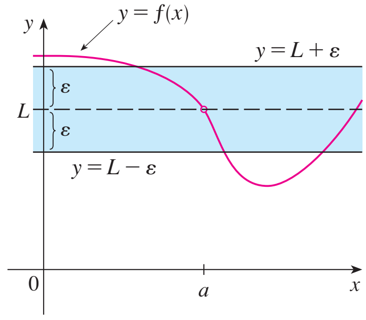


FIGURA 4

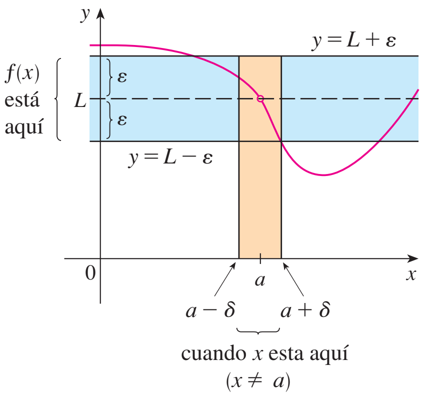


FIGURA 5

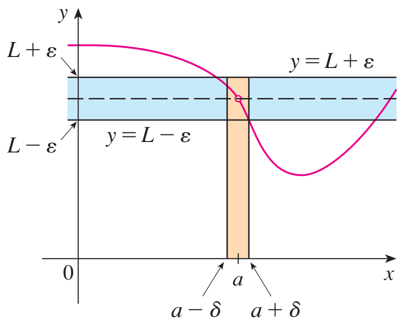


FIGURA 6

EJEMPLO 1 Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

En otras palabras, encuentre un número δ que corresponda a $\varepsilon = 0.2$ en la definición de límite para la función $f(x) = x^3 - 5x + 6$ con $a = 1$ y $L = 2$.

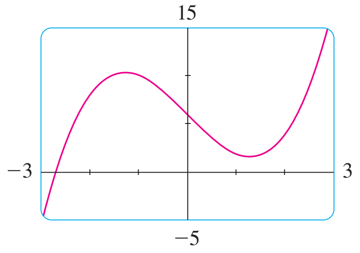


FIGURA 7

SOLUCIÓN La gráfica de f se muestra en la figura 7; estamos interesados en la región cerca del punto (1, 2). Note que podemos reescribir la desigualdad

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

como

$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

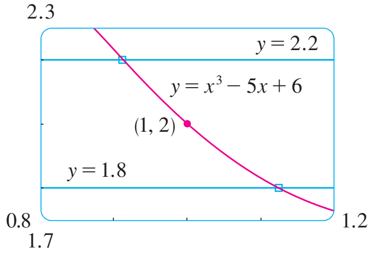


FIGURA 8

Así que necesitamos determinar los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está entre las rectas horizontales $y = 1.8$ y $y = 2.2$. Por eso, graficamos las curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1.8$ y $y = 2.2$ cerca del punto (1, 2) en la figura 8. Después utilizamos el cursor para estimar que la coordenada x del punto de intersección de la recta $y = 2.2$ y la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está cerca de 0.911. Del mismo modo, $y = x^3 - 5x + 6$ interseca la recta $y = 1.8$ cuando $x \approx 1.124$. Así, al redondear para estar seguro, podemos decir que

$$\text{si} \quad 0.92 < x < 1.12, \quad \text{entonces} \quad 1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

Este intervalo (0.92, 1.12) no es simétrico respecto a $x = 1$. La distancia de $x = 1$ al punto extremo izquierdo es $1 - 0.92 = 0.08$, y la distancia al punto extremo derecho es 0.12. Es posible elegir δ más pequeña que estos números, esto es, $\delta = 0.08$. Entonces, podemos reescribir nuestras desigualdades en términos de distancias como sigue:

$$\text{si} \qquad |x - 1| < 0.08 \quad \text{entonces,} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

Esto dice justamente que manteniendo a x dentro del 0.08 de 1, mantendremos $f(x)$ dentro del 0.2 de 2.

Aunque seleccionamos $\delta = 0.08$, cualquier valor positivo más pequeño de δ habría funcionado.

El procedimiento gráfico en el ejemplo 1 proporciona una ilustración de la definición para $\varepsilon = 0.2$, pero no *demuestra* que el límite es igual a 2. Una demostración tiene que proporcionar una δ para *toda* ε.

Para pulir los enunciados de límite sería útil pensar en la definición de límite como un desafío. Primero lo retan con un número ε. Después, debe usted ser capaz de producir una δ adecuada. Debe ser capaz de hacerlo para *toda* $\varepsilon > 0$, no sólo para una ε en particular.

TEC En Module 2.4/2.6 puede explorar la definición precisa de límite, gráfica y numéricamente.

Imagine una contienda entre dos personas A y B, en la que usted es B. La persona A estipula que debe aproximarse al número fijo L por medio de valores de $f(x)$ dentro de un grado de exactitud ε, (digamos 0.01). Por tanto, la persona B (usted) responde determinando un número δ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Después, A podría exigir aún más y desafiarlo con un valor más pequeño de ε, (digamos 0.0001). Una vez más, usted tiene que responder encontrando una correspondiente δ. Usualmente, a medida que el valor de ε es más pequeño, es menor el correspondiente valor de δ. Si usted siempre gana, sin importar qué tan pequeño haga A a ε, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

V EJEMPLO 2 Pruebe que $\displaystyle\lim_{x\to 3}(4x - 5) = 7$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema* (*intuir un valor para* δ). Sea ε un número positivo dado. Queremos encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Pero $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Por tanto, queremos una δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

esto es,

$$\text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Esto sugiere que debe elegir $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Demostración* (*demostrar que esta* δ *funciona*). Dado $\varepsilon > 0$, elegir $\delta = \varepsilon/4$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Así

$$\text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Por tanto, por la definición de límite,

$$\lim_{x\to 3}(4x - 5) = 7$$

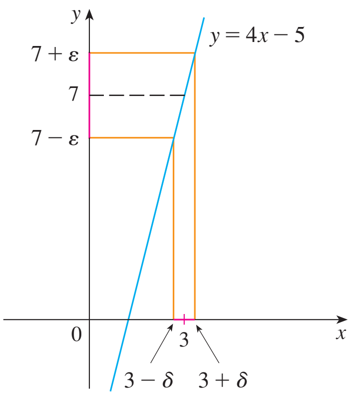


FIGURA 9

Este ejemplo se ilustra en la figura 9.

Note que en la solución del ejemplo 2 hay dos etapas: intuir y verificar. Efectuamos un análisis preliminar que posibilitó suponer un valor de δ. Pero luego, en la segunda etapa, tuvimos que regresar y verificar en forma cuidadosa y lógica que dimos una opinión correcta. Este procedimiento es característico de gran parte de las matemáticas. Algunas veces necesita hacerse primero una conjetura inteligente respecto a la respuesta de un problema y luego demostrar que la suposición es correcta.

Las definiciones intuitivas de límites laterales que se presentan en la sección 2.2 pueden reformularse como se señala a continuación.

3 Definición de límite por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad a - \delta < x < a, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

4 Definición de límite por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad a < x < a + \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Cauchy y los límites

Después de la invención del Cálculo en el siglo XVII, siguió un periodo de fecundo desarrollo de la materia en el siglo XVIII. Matemáticos como las familias Bernoulli y Euler estaban ansiosos por aprovechar el potencial del Cálculo, por lo que exploraron audazmente las consecuencias de esta nueva y maravillosa teoría matemática, sin preocuparse demasiado por si sus demostraciones eran completamente correctas.

El siglo XIX, por el contrario, fue la Edad del Rigor en matemáticas. Hubo un movimiento para volver a los fundamentos del tema, para proporcionar cuidadosas definiciones y rigurosas demostraciones. A la vanguardia de este movimiento estaba el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857), que comenzó como ingeniero militar antes de convertirse en profesor de matemáticas en París. Cauchy tomo la idea de Newton de límite, que mantuvo viva el matemático francés Jean d'Alembert, en el siglo XVIII, haciéndola más precisa. Su definición de un límite reza así: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para terminar diferendo por tan poco como uno quiera, esto se llama el límite de los otros". Pero cuando Cauchy aplicaba esta definición en ejemplos y demostraciones, utilizaba a menudo desigualdades delta-epsilon similares a las de esta sección. Una demostración típica de Cauchy comienza con: "designar por δ y ε dos números muy pequeños;..." Utilizaba ε debido a la correspondencia entre épsilon y la palabra francesa *erreur*. Posteriormente, el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) estableció la definición de límite exactamente como en nuestra definición 2.

Observe que la definición 3 es la misma que la definición 2, excepto que x está restringida a quedar en la mitad *izquierda* $(a - \delta, a)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. En la definición 4, x está restringida a estar en la mitad *derecha* $(a, a + \delta)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

V EJEMPLO 3 Utilice la definición 4 para demostrar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN

1. *Intuya un valor para* δ. Sea ε un número positivo dado. Aquí $a = 0$ y $L = 0$, así que queremos encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < x < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

es decir,

$$\text{si} \qquad 0 < x < \delta, \quad \text{entonces} \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

o, elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad $\sqrt{x} < \varepsilon$, obtenemos

$$\text{si} \qquad 0 < x < \delta, \quad \text{entonces} \quad x < \varepsilon^2$$

Esto sugiere que debemos elegir $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Demuestre que este δ funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon^2$. Si $0 < x < \delta$, entonces

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Así que,

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

De acuerdo con la definición 4, esto demuestra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

SOLUCIÓN

1. *Intuya un valor para* δ. Sea $\varepsilon > 0$ un valor dado. Tenemos que encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Para relacionar $|x^2 - 9|$ con $|x - 3|$ escribimos $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Entonces queremos que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x + 3||x - 3| < \varepsilon$$

Note que si podemos encontrar un número constante positivo C tal que $|x + 3| < C$, entonces

$$|x + 3||x - 3| < C|x - 3|$$

y podemos hacer $C|x - 3| < \varepsilon$ tomando $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.

Podemos encontrar tal número C si restringimos x a algún intervalo centrado en 3. De hecho, estamos interesados sólo en valores de x cercanos a 3, así que es razonable suponer que x está dentro de una distancia de 1 de 3, esto es, $|x - 3| < 1$. Entonces $2 < x < 4$, así que $5 < x + 3 < 7$. Así, tenemos que $|x + 3| < 7$, y, por tanto, $C = 7$ es una elección adecuada para la constante.

Pero ahora hay dos restricciones sobre $|x - 3|$, haciendo

$$|x - 3| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para asegurarnos de que ambas desigualdades se satisfacen, tomamos δ como el menor de los dos números 1 y $\varepsilon/7$. La notación para esto es $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Demuestre que esta* δ *funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como en el inciso 1). También tenemos $|x - 3| < \varepsilon/7$, así que

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

Como se ilustra en el ejemplo 4, no siempre es fácil demostrar que los enunciados de límite son verdaderos utilizando la definición ε-δ. De hecho, si tenemos una función más complicada como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, una demostración requeriría una gran cantidad de ingenio. Afortunadamente, esto es innecesario porque las leyes de los límites establecidas en la sección 2.3 pueden demostrarse utilizando la definición 2, y luego los límites de funciones complicadas pueden determinarse en forma rigurosa a partir de estas leyes, sin recurrir directamente a la definición.

Por ejemplo, para demostrar la ley de la suma: si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ ambas existen, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Las leyes restantes se demuestran en los ejercicios y en el apéndice F.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LA SUMA Sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Desigualdad del triángulo:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

(Véase el apéndice A.)

Utilizando la desigualdad del triángulo podemos escribir

5
$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Llevamos a cabo $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor que ε haciendo cada uno de los términos $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ menores que $\varepsilon/2$.

Dado que $\varepsilon/2 > 0$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Del mismo modo, puesto que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, los más pequeños de los números δ_1 y δ_2. Note que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Así que $\quad |f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} \quad$ y $\quad |g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Por tanto, por [5],

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Para resumir,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Así, por la definición de límite,

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Límites infinitos

Los límites infinitos también pueden definirse de manera precisa. La siguiente es una versión exacta de la definición 4 de la sección 2.2.

6 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un número positivo δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) > M$$

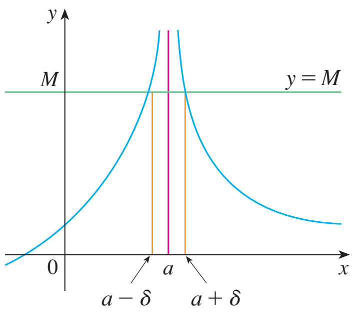


FIGURA 10

Esto dice que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (más grandes que cualquier número M dado), tomando x suficientemente cercano a a (dentro de una distancia δ, donde δ depende de M, pero con $x \neq a$). Una ilustración geométrica se muestra en la figura 10.

Dada cualquier recta horizontal $y = M$, podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringimos x al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, pero $x \neq a$, entonces la curva $y = f(x)$ está por debajo de la recta $y = M$. Usted puede ver que si se elige un valor muy grande de M, entonces se puede requerir un δ muy pequeño.

V EJEMPLO 5 Utilice la definición 6, para demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

SOLUCIÓN Sea M un número positivo dado. Queremos encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x| < \delta, \quad \text{entonces} \quad 1/x^2 > M$$

Pero

$$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Así que si elegimos $\delta = 1/\sqrt{M}$ y $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, entonces $1/x^2 > M$. Esto muestra que $1/x^2 \to \infty$ conforme $x \to 0$.

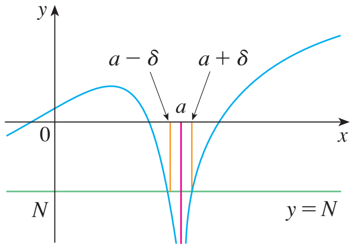


FIGURA 11

Del mismo modo, la siguiente es una versión precisa de la definición 5 de la sección 2.2. Esto se ilustra en la figura 11.

7 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

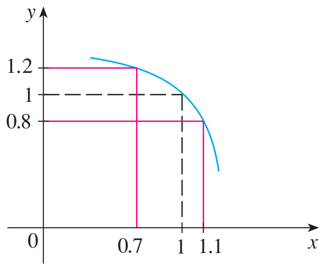
significa que para todo número negativo N existe un número positivo δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

2.4 Ejercicios

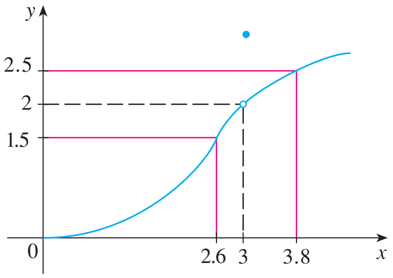
1. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 1| < 0.2$$



2. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

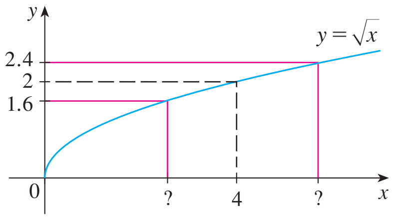
$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 2| < 0.5$$



Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

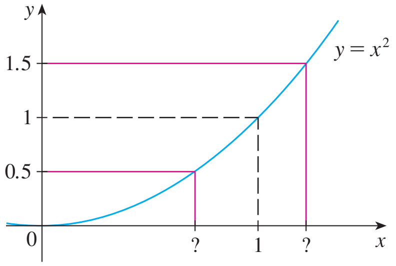
3. Utilice la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 4| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\sqrt{x} - 2| < 0.4$$



4. Utilice la gráfica dada de $f(x) = x^2$ para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$



5. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad \left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\tan x - 1| < 0.2$$

6. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{2x}{x^2 + 4} - 0.4\right| < 0.1$$

7. Para el límite

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 4) = 6$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 0.1$.

8. Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

9. Dado que $\lim_{x \to \pi/2} \tan^2 x = \infty$, ilustre la definición 6 para encontrar valores de δ que correspondan a a) $M = 1000$ y b) $M = 10\,000$.

10. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 5 < x < 5 + \delta, \quad \text{entonces} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x - 5}} > 100$$

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco metálico circular con 1000 cm^2 de área.

a) ¿Qué radio produce tal disco?

b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm^2 en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso a) debe el tornero mantener el radio?

c) En términos de la definición ε-δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿Qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Un horno de confección de cristales, se utiliza en la investigación para determinar la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el idóneo, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la potencia de entrada en watts.

a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200°C?

b) Si se permite una variación de temperatura de 200°C $\pm$1°C, ¿qué intervalo se potencia en watts se permite para la potencia de entrada?

c) De acuerdo con la definición ε-δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

13. a) Encuentre un número δ tal que si $|x - 2| < \delta$, entonces $|4x - 8| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.

b) Repita el inciso a) con $\varepsilon = 0.01$.

14. Dado que $\lim_{x \to 2}(5x - 7) = 3$, ilustre la definición 2 encontrando valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ y $\varepsilon = 0.01$.

15-18 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones utilizando la definición ε-δ de límite e ilústrelo con un diagrama como el de la figura 9.

15. $\lim_{x \to 3} \left(1 + \frac{1}{3}x\right) = 2$

16. $\lim_{x \to 4} (2x - 5) = 3$

17. $\lim_{x \to -3} (1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x \to -2} (3x + 5) = -1$

19-32 Demuestre cada una de las siguientes proposiciones utilizando la definición ε-δ de límite.

19. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x \to 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

21. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim_{x \to -1.5} \dfrac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim_{x \to a} x = a$

24. $\lim_{x \to a} c = c$

25. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x \to -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$

29. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$

31. $\lim_{x\to -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que otra posible elección de δ para mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ en el ejemplo 4 es $\delta = \min\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique con argumentos geométricos que la mayor posible elección de δ para demostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ es $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

SAC **35.** a) Para el límite $\lim_{x\to 1} (x^3 + x + 1) = 3$, utilice una gráfica para encontrar un valor de δ que corresponda a $\varepsilon = 0.4$.

b) Utilizando un sistema algebraico computarizado para resolver la ecuación cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, encuentre el mayor valor posible de δ que funciona para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

c) Ponga $\varepsilon = 0.4$ en su repuesta del inciso b) y compárelo con su respuesta del inciso a).

36. Demuestre que $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

37. Demuestre que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

$$\left[\textit{Sugerencia:} \text{ utilice } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$$

38. Si H es la función de Heaviside definida en el ejemplo 6 en la sección 2.2, demuestre, utilizando la definición 2, que $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe. [*Sugerencia:* utilice una demostración indirecta como sigue. Suponga que el límite es L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de límite y trate de llegar a una contradicción.]

39. Si la función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

40. Comparando las definiciones 2, 3 y 4, demuestre el teorema 1 de la sección 2.3.

41. ¿Qué tan cerca a -3 tiene que tomar x de manera que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000?$$

42. Demuestre, utilizando la definición 6, que $\lim_{x\to -3} \frac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es un número real. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones.

a) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

b) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \infty$ si $c > 0$

c) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = -\infty$ si $c < 0$

2.5 Continuidad

En la sección 2.3, hemos visto que el límite de una función cuando x tiende a a, con frecuencia se obtiene simplemente calculando el valor de la función en a. Las funciones con esta propiedad son llamadas *continuas en* $x = a$. Veremos que la definición matemática de continuidad coincide notoriamente con el sentido de *continuidad* que la palabra tiene en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco.)

Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, entonces los puntos $(x, f(x))$ en la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica. Así que no existe ninguna brecha en la curva.

1 Definición Una función f es **continua en un número $x = a$** si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

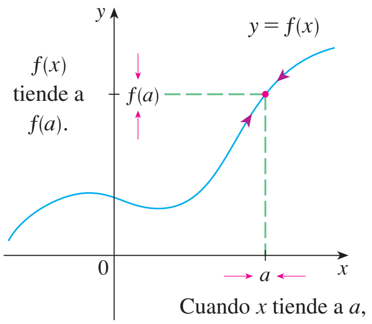


FIGURA 1

Note que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas. Si f es continua en a, entonces:

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

La definición indica que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua f tiene la propiedad de que un pequeño cambio en x produce sólo un

pequeño cambio en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ puede mantenerse tan pequeño como se quiera manteniendo el cambio en x suficientemente pequeño.

Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida sobre un intervalo abierto que contiene a a, excepto quizás en a), decimos que f es **discontinua en *a*** (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Los fenómenos físicos son generalmente continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían continuamente con el tiempo, como lo hace la estatura de una persona. Pero hay otras situaciones, como la corriente eléctrica, donde ocurren discontinuidades. [Véase el ejemplo 6 en el punto 2.2, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 porque $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, una función continua en cada número de un intervalo puede pensarse como una función cuya gráfica no tiene interrupciones. La gráfica puede dibujarse sin levantar la pluma del papel.

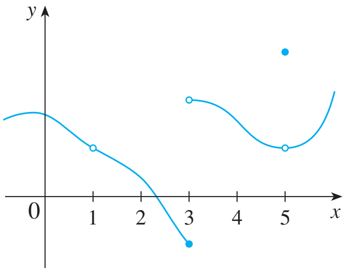


FIGURA 2

EJEMPLO 1 La figura 2 muestra la gráfica de una función f. ¿Para qué valores de $x = a$, f es discontinua? ¿Por qué?

SOLUCIÓN Pareciera que hay una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón formal de que f es discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definida.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón para la discontinuidad es diferente. Aquí, $f(3)$ está definida, pero $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes), así que f es discontinua en $x = 3$.

¿Qué hay en relación con $a = 5$? Aquí, $f(5)$ está definida y el $\lim_{x\to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son iguales). Pero

$$\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$$

Así que f es discontinua en 5.

Ahora veremos cómo detectar discontinuidades cuando una función está definida por una fórmula.

V **EJEMPLO 2** ¿Dónde es discontinua cada una de las siguientes funciones?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

a) Note que $f(2)$ no está definida, así que f es discontinua en $x = 2$. Más tarde veremos por qué f es continua en todos los otros números.

b) Aquí $f(0) = 1$ está definida, pero

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el ejemplo 8 de la sección 2.2.) Así que f es discontinua en $x = 0$.

c) Aquí $f(2) = 1$ está definida y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 1) = 3$$

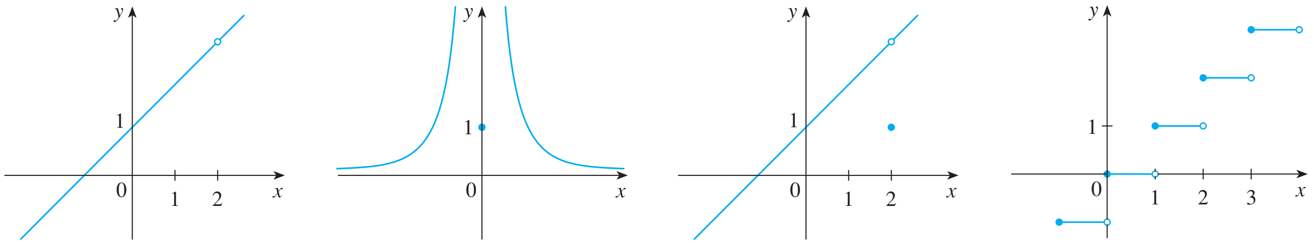
existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

así que f no es continua en $x = 2$.

d) La función entero mayor $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véanse el ejemplo 10 y el ejercicio 51 en la sección 2.3).

La figura 3 muestra las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En cada caso la gráfica no puede ser dibujada sin levantar el lápiz del papel porque hay un agujero o ruptura o salto en la gráfica. El tipo de discontinuidad ilustrada en los incisos a) y c) se llama **removible** porque podemos remover la discontinuidad redefiniendo f sólo en $x = 2$. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad en el inciso b) se llama **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades en el inciso d) se llaman **discontinuidades de salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3
Gráficas de las funciones del ejemplo 2

2 Definición Una función f es **continua por la derecha de un número $x = a$** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua por la izquierda de $x = a$** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [Véase la figura 3d)] es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

3 Definición Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en cada número en el intervalo. (Si f está definida sólo en un lado de un punto extremo del intervalo, entendemos por *continua* en el punto extremo, como *continua por la derecha* o *continua por la izquierda*.)

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$, entonces utilizando las leyes de los límites, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x\to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x\to a} (1 - x^2)} && \text{(por la ley 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por las leyes 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

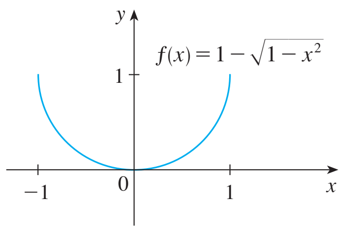


FIGURA 4

Así, por la definición 1, f es continua en $x = a$ si $-1 < a < 1$. Cálculos similares muestran que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

de manera que f es continua por la derecha en $x = -1$ y continua por la izquierda en $x = 1$. Por eso, de acuerdo con la definición 3, f es continua en $[-1, 1]$.

La gráfica de f está trazada en la figura 4 y es la mitad inferior de la circunferencia

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para verificar la continuidad de una función como lo hicimos en el ejemplo 4, a menudo es conveniente utilizar el siguiente teorema, que muestra cómo construir funciones continuas complicadas a partir de otras simples.

4 Teorema Si f y g son continuas en $x = a$ y $x = c$ es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Cada uno de los cinco incisos de este teorema se sigue de las correspondientes leyes de los límites de la sección 2.3 Por ejemplo, damos la demostración del inciso 1. Ya que f y g son continuas en $x = a$, tenemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} (f + g)(x) &= \lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] \\
&= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) && \text{(por la ley 1)} \\
&= f(a) + g(a) \\
&= (f + g)(a)
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f + g$ es continua en $x = a$.

Del teorema 4 y la definición 3 se deduce que si f y g son continuas sobre un intervalo, entonces también lo son las funciones $f + g$, $f - g$, cf, fg y f/g (si g no es cero). El siguiente teorema se estableció en la sección 2.3 como la propiedad de sustitución directa.

5 Teorema

a) Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio; es decir, es continua sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

b) Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; esto es, es continua en su dominio.

DEMOSTRACIÓN

a) Una función polinomial es de la forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes. Sabemos que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(por la ley 7)}$$

y

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(por la ley 9)}$$

Esta ecuación es precisamente la proposición de que la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Así, por el inciso 3 del teorema 4, la función $g(x) = cx^m$ es continua. Como P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, se sigue del inciso 1 del teorema 4 que P es continua.

b) Una función racional es una de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. El dominio de f es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabemos del inciso a) que P y Q son continuas en todo su dominio. Así, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todo número en D. ∎

Como una ilustración del teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ muestra que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 50 pies/s, entonces la altura de la pelota en pies, t segundos después, está dada por la fórmula $h = 50t - 16t^2$. Otra vez, ésta es una función polinomial, así que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber qué funciones son continuas nos permite evaluar muy rápidamente algunos límites como se ve en el siguiente ejemplo. Compárelo con el ejemplo 2b) de la sección 2.3.

EJEMPLO 5 Encuentre el $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, así que por el teorema 5 es continua en su dominio, que es $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$.

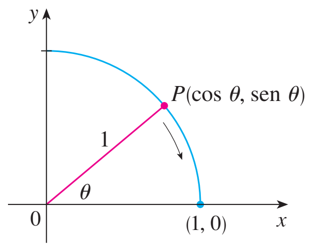


FIGURA 5

Por tanto,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

Resulta que la mayor parte de las funciones conocidas son continuas en todo número de su dominio. Por ejemplo, la ley 10 de los límites (página 100) es exactamente la proposición de que las funciones raíz son continuas.

Del aspecto de las gráficas de las funciones seno y el coseno (figura 18 de la sección 1.2), podríamos suponer con toda certeza que son continuas. De acuerdo con la definición de sen θ y cos θ, las coordenadas del punto P de la figura 5 son (cos θ, sen θ). Cuando $\theta \to 0$, vemos que P tiende al punto (1, 0), así que $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. Así,

6 $$\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Otra manera de establecer los límites en 6 es utilizar el teorema de la compresión con la desigualdad sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), que se demostró en la sección 3.3

Dado que cos $0 = 1$ y sen $0 = 0$, las ecuaciones en 6 afirman que las funciones coseno y seno son continuas en 0. Las fórmulas de adición para senos y cosenos pueden ser utilizadas entonces para deducir que estas funciones son continuas para toda x (ejercicios 60 y 61).

Del inciso 5 del teorema 4, se deduce que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

es continua, excepto donde $\cos x = 0$. Esto sucede cuando x es un número entero impar múltiplo de $\pi/2$, así que $y = \tan x$ tiene infinitas discontinuidades cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, y así sucesivamente (figura 6).

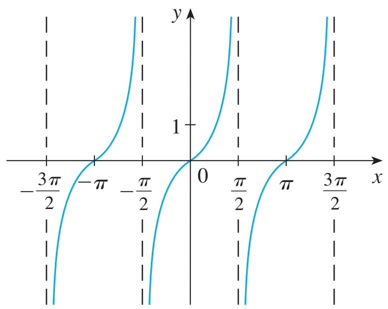


FIGURA 6
$y = \tan x$

La función inversa de cualquier función continua uno a uno también es continua. (Este hecho se comprueba en el apéndice F, pero la intuición geométrica lo hace parecer razonable: la gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la recta $y = x$. También, si la gráfica de f no tiene ruptura alguna, tampoco la tiene la gráfica de f^{-1}.) De este modo, las funciones trigonométricas inversas son continuas.

En la sección 1.5 definimos la función exponencial $y = a^x$ de modo que se llenaran los huecos en la gráfica de esta función donde x es racional. En otras palabras, la simple definición de $y = a^x$ la hace una función continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, su función inversa $y = \log_a x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

En la sección 1.6 se hace un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

7 Teorema Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo número de sus dominios:

funciones polinomiales	funciones racionales	funciones raíz
funciones trigonométricas	funciones trigonométricas inversas	
funciones exponenciales	funciones logarítmicas	

EJEMPLO 6 ¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7 sabemos que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y $y = \tan^{-1} x$ es continua sobre $\mathbb{R}$. Así, por el inciso 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1} x$ es continua sobre $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es una función polinomial, de modo que

es continua para toda x. Por tanto, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todos los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0$. Por ende, f es continua sobre los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El teorema 7 nos dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función en el denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y en consecuencia es continua. Note que esta función jamás es cero porque $\cos x \geqslant -1$ para toda x y también $2 + \cos x > 0$ para toda x. Así, el cociente

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continuo para toda x. Por tanto, mediante la definición de función continua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del siguiente teorema.

Este teorema expresa que puede moverse un símbolo de límite a través de un símbolo de función si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, puede invertirse el orden de estos dos símbolos.

8 Teorema Si f es continua en b, y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Intuitivamente, el teorema 8 es razonable porque si x está cerca de a, entonces $g(x)$ está cerca de b, y como f es continua en b, si $g(x)$ está cerca de b, entonces $f(g(x))$ está cerca de $f(b)$. En el apéndice F se proporciona una demostración del teorema 8.

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

SOLUCIÓN Ya que arcsen es una función continua, aplicamos el teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Aplicamos el teorema 8 en el caso especial donde $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo. Entonces

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y
$$f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Si sustituimos estas expresiones en el teorema 8 obtenemos

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

con lo que queda demostrada la ley 11 de los límites. (Suponiendo que las raíces existen.)

9 Teorema Si g es continua en $x = a$ y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $x = a$.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

DEMOSTRACIÓN Como g es continua en $x = a$, tenemos

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Puesto que f es continua en $b = g(a)$, podemos aplicar el teorema 8 para obtener

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que es precisamente la proposición de que la función $h(x) = f(g(x))$ es continua en $x = a$; es decir, $f \circ g$ es continua en $x = a$.

V EJEMPLO 9 ¿En dónde son continuas las siguientes funciones?

a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

a) Tenemos $h(x) = f(g(x))$, donde

$$g(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f(x) = \operatorname{sen} x$$

Ahora g es continua sobre $\mathbb{R}$ puesto que es una función polinomial, y f también es continua para toda x. Por consiguiente, $h = f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$ por el teorema 9.

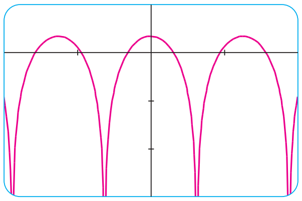


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

b) Con base en el teorema 7, sabemos que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por tanto, del teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continua siempre que esté definida. Ahora bien, $\ln(1 + \cos x)$ está definida cuando $1 + \cos x > 0$. De este modo, no está definido cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Así, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua sobre los intervalos entre estos valores (véase la figura 7).

Una propiedad importante de las funciones continuas se expresa con el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en libros más avanzados de cálculo.

10 Teorema del valor intermedio Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio establece que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Observe que el valor N puede tomarse una vez [como en la parte a)] o más de una vez [como en la parte b)].

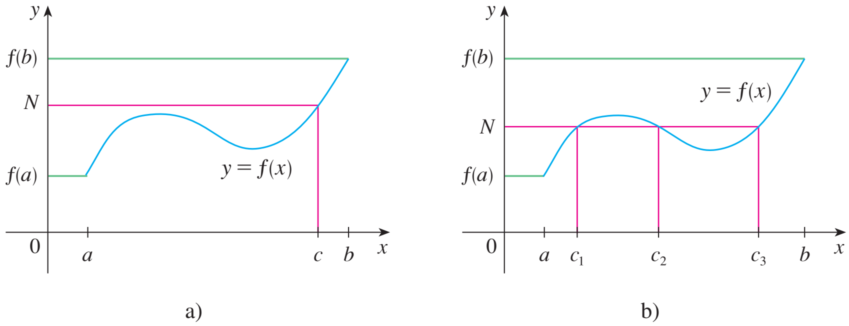


FIGURA 8

Si piensa en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene huecos o rupturas, es fácil creer que el teorema del valor intermedio es verdadero. En términos geométricos, señala que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, entonces la gráfica de f no puede saltar la recta: debe intersecar $y = N$ en alguna parte.

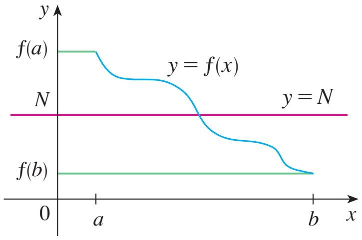


FIGURA 9

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para las funciones discontinuas (véase el ejercicio 48).

Un uso del teorema del valor intermedio es en la búsqueda de las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 10 Demuestre que existe una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Buscamos una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por tanto, tomando $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$ en el teorema 10, tenemos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Así, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es polinomial, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar con mayor precisión una raíz aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Puesto que

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz debe estar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por ensayo y error,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

así que la raíz está en el intervalo (1.22, 1.23)

Podemos utilizar una calculadora graficadora o computadora para ilustrar el uso del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. La figura 10 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, y puede usted ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. La figura 11 muestra el resultado de un acercamiento en un rectángulo de vista $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

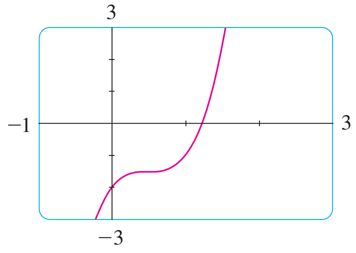


FIGURA 10

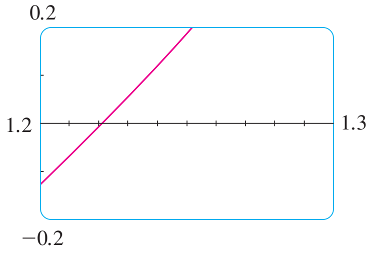


FIGURA 11

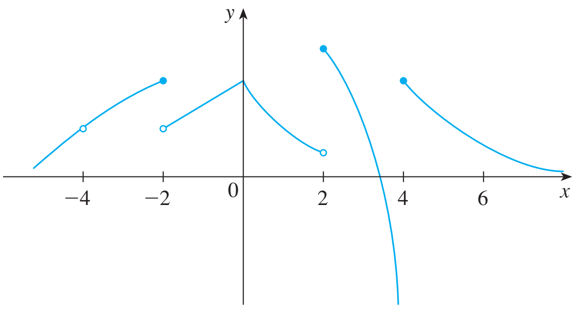
De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un importante papel en el modo en que funcionan estos dispositivos de graficación. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y activa los píxeles que contienen estos puntos calculados. Se supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. La computadora une los píxeles activando aquellos intermedios.

2.5 Ejercicios

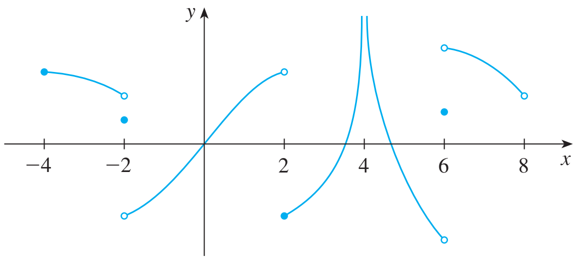
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su grafica?

3. a) A partir de la grafica de f, establezca el número en el cual f es discontinua y explique por qué.
b) Para cada uno de los números que se obtuvieron en el inciso a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



4. A partir de la grafica de g, establezca los intervalos sobre los que g es continua.



5-8 Dibuje la gráfica de una función f que es continua, a excepción de la discontinuidad señalada.

5. Discontinua, pero continua por la derecha, en $x = 2$.

6. Discontinuidades en $x = -1$ y $x = 4$, pero continuas por la izquierda en $x = -1$ y por la derecha en $x = 4$.

7. Discontinuidad removible en $x = 3$, discontinuidad de salto en $x = 5$.

8. Ni por la izquierda ni por la derecha es continua en $x = -2$, continua sólo por la izquierda en $x = 2$.

9. El peaje T que se cobra por conducir en un determinado tramo de una carretera es de \$5, excepto durante las horas pico (entre las 7 y las 10 y entre las 16 y 19 horas) cuando el peaje es de \$7.

a) Esboce una gráfica de T como una función del tiempo t, medido en horas pasada la medianoche.
b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que utiliza la carretera.

10. Explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua o discontinua.

a) La temperatura en una localidad específica como una función del tiempo
b) La temperatura en un momento determinado como una función de la distancia al oeste de la ciudad de Nueva York
c) La altitud sobre el nivel del mar como una función de la distancia al oeste de la ciudad de Nueva York
d) El costo de transportarse en taxi como una función de la distancia de traslado
e) La corriente en un circuito de iluminación en una habitación como una función del tiempo

11. Si f y g son funciones continuas tales que $g(2) = 6$ y $\lim_{x\to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$, encuentre $f(2)$.

12-14 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua en el número dado $x = a$.

12. $f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}, \quad a = 2$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

14. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

15-16 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las siguientes funciones es continua sobre el intervalo dado.

15. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$

17-22 Explique por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el número dado $x = a$. Dibuje la gráfica de la función.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

23-24 ¿Cómo podría "remover la discontinuidad" en cada una de las siguientes funciones? En otras palabras, ¿cómo redefiniría $f(2)$ a fin de que sean continuas en $x = 2$?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

24. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25-32 Utilizando los teoremas 4, 5, 7 y 9, explique por qué cada una de las siguientes funciones es continua en todo número de su dominio. Determine el dominio.

25. $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$

26. $G(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

27. $Q(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x - 2}}{x^3 - 2}$

28. $R(t) = \dfrac{e^{\operatorname{sen} t}}{2 + \cos \pi t}$

29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$

30. $B(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

32. $N(r) = \tan^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33-34 Identifique las discontinuidades de cada una de las siguientes funciones e ilústrelas con una gráfica.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

34. $y = \ln(\tan^2 x)$

35-38 Utilice la continuidad para evaluar cada uno de los siguientes límites.

35. $\displaystyle \lim_{x\to 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

36. $\displaystyle \lim_{x\to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

37. $\displaystyle \lim_{x\to 1} e^{x^2 - x}$

38. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \arctan\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

39-40 Demuestre que cada una de las siguientes funciones es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

41-43 Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f.

41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

---

44. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G la constante gravitacional. ¿Es F una función continua de r?

45. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

46. Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para toda x.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

47. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en $x = a$? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en $x = a$.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

48. Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en 0.25 y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos posibles graficas de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

49. Si $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 1000$.

50. Suponga que f es continua sobre $[1, 5]$ y las únicas soluciones de la ecuación $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, explique por qué $f(3) > 6$.

51-54 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz en cada una de las ecuaciones dadas en el intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

52. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

53. $e^x = 3 - 2x, \quad (0, 1)$

54. $\operatorname{sen} x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

55-56 a) Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene cuando menos una raíz real.

b) Utilice su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

55. $\cos x = x^3$

56. $\ln x = 3 - 2x$

57-58 a) Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene cuando menos una raíz real.

b) Utilice un dispositivo de graficación para encontrar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

57. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

58. $\arctan x = 1 - x$

---

59. Demuestre que f es continua en a *si* y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

60. Para demostrar que la función seno es continua necesita demostrar que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real $x = a$. Según el ejercicio 59, una proposición equivalente es que

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Aplique [6] para demostrar que esto es cierto.

61. Demuestre que la función coseno es continua.

62. a) Demuestre el teorema 4, inciso 3.

b) Demuestre el teorema 4, inciso 5.

63. ¿Para qué valores de x es f continua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

64. ¿Para qué valores de x es g continua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

65. ¿Existe un número que es exactamente 1 más que su cubo?

66. Si a y b son números positivos, demuestre que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tiene por lo menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

67. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua sobre $(-\infty, \infty)$

68. a) Demuestre que la función valor absoluto $F(x) = |x|$ es continua para toda x.

b) Demuestre que si f es una función continua sobre un intervalo, entonces también lo es $|f|$.

c) ¿Lo inverso de la proposición del inciso b) también es verdadero? En otras palabras, si $|f|$ es continua, ¿se deduce que f es continua? De ser así, demuéstrelo. En caso de no ser así, halle un contraejemplo.

69. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 y emprende su camino habitual hacia la cima de la montaña, adonde llega a las 19:00. La mañana siguiente inicia el regreso desde la cima por la misma ruta a las 7:00 y llega al monasterio a las 19:00. Mediante el teorema del valor intermedio demuestre que existe un punto a lo largo de la ruta que el monje cruzará exactamente a la misma hora en ambos días.

2.6 Límites al infinito, asíntotas horizontales

En las secciones 2.2 y 2.4 se trataron los límites infinitos y las asíntotas verticales. Ahí aproximamos x a un número y vimos que los valores de y se vuelven arbitrariamente grandes (ya sean positivos o negativos). En esta sección haremos x arbitrariamente grande en magnitud y observaremos qué ocurre con y.

Empecemos por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

a medida que x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función con una aproximación de seis decimales, y en la figura 1 se ha trazado la gráfica de f por medio de la computadora.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998

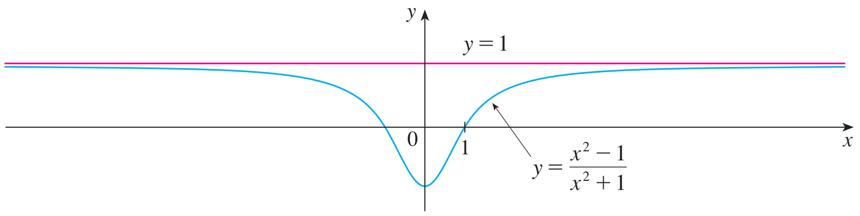


FIGURA 1

Conforme x crece más y más, puede verse que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. De hecho, parece que puede acercar cuanto quiera los valores de $f(x)$ a 1 eligiendo una x lo suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica escribiendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, utilizamos la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace más y más grande.

1 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{conforme} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa un número. No obstante, la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ a menudo se lee como

"el límite de $f(x)$ cuando x tiende al infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x se va al infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L".

El significado de estas frases está dado por la definición 1. Al final de esta sección, se encuentra una definición más precisa, utilizando la definición ε-δ de la sección 2.4.

En la figura 2 se muestran ilustraciones geométricas de la definición 1. Advierta que hay muchas maneras de aproximar la gráfica de f a la recta $y = L$ (la cual se llama *asíntota horizontal*) a medida que usted ve hacia el extremo derecho de cada gráfica.

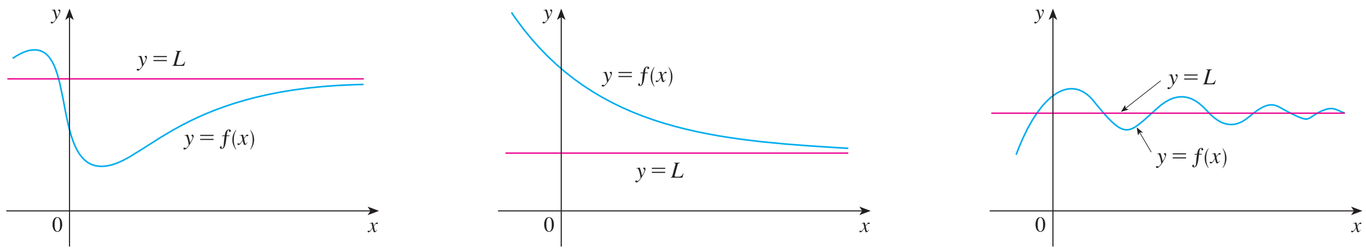


FIGURA 2
Ejemplos que ilustran $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Si regresa a la figura 1, verá que para valores negativos de x grandes en magnitud, los valores de $f(x)$ están cercanos a 1. Al decrecer x a través de valores negativos sin cota, puede acercar cuando quiera $f(x)$ a 1. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue.

2 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea negativa y suficientemente grande en magnitud.

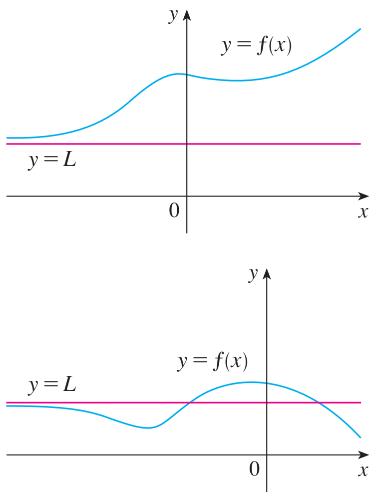


FIGURA 3
Ejemplos que ilustran $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

Es necesario subrayar que el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito negativo o a menos infinito, es L".

La definición 2 se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica tiende a la recta $y = L$ a medida que vemos hacia el extremo izquierdo de cada gráfica.

3 Definición La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$. (Véase la figura 4.) En efecto,

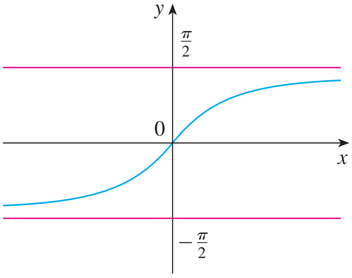


FIGURA 4
$y = \tan^{-1}x$

4

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se sigue del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de $y = \tan x$.)

EJEMPLO 1 Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la figura 5.

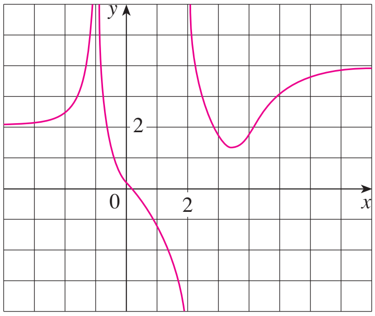


FIGURA 5

SOLUCIÓN Vemos que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \to -1$ por ambos lados, así que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Advierta que $f(x)$ se hace negativo grande en magnitud cuando x tiende a 2 por la izquierda, pero grande positivo cuando x tiende a 2 por la derecha. De este modo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Del comportamiento de estos límites, las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x es muy grande, parece que $f(x)$ tiende a 4. Pero, a medida que x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Por tanto,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales.

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeño. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si elige una x suficientemente grande, puede aproximar $1/x$ a 0 cuanto quiera. Por tanto, según la definición 1, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar hace ver que cuando x es negativo grande en magnitud, $1/x$ es pequeño negativo; de este modo, también se tiene que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

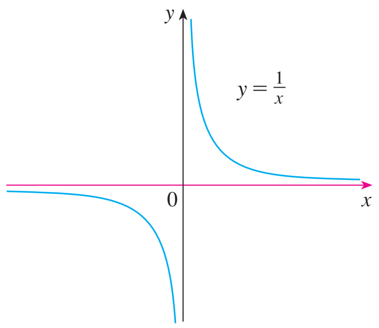


FIGURA 6
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se infiere que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$ (que es una hipérbola equilátera; véase figura 6).

La mayor parte de las leyes de los límites que se dieron en la sección 2.3 también se cumplen para los límites en el infinito. Puede demostrarse que las *leyes de los límites, cuya lista se da en la sección 2.3 (con la excepción de las leyes 9 y 10), también son válidas si "$x \to a$" se reemplaza con "$x \to \infty$" o con "$x \to -\infty$"*. En particular, si combinamos las leyes 6 y 11 con los resultados del ejemplo 2, obtenemos la siguiente importante regla para el cálculo de límites.

5 Teorema Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

V EJEMPLO 3 Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique cuáles propiedades de los límites se utilizaron en cada paso.

SOLUCIÓN Cuando x es muy grande, tanto numerador como denominador son muy grandes, así que no es obvio qué pasa con su cociente. Necesitamos hacer algo de álgebra preliminar.

Para evaluar el límite en el infinito de cualquier función racional, primero dividimos el numerador y el denominador por la potencia mayor de x que hay en el denominador. (Suponemos que $x \neq 0$, ya que estamos interesados sólo en valores muy grandes de x). En este caso, la potencia mayor del denominador es x^2, así que tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(por la ley de los límites 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{(por la ley 7 y el teorema 5)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

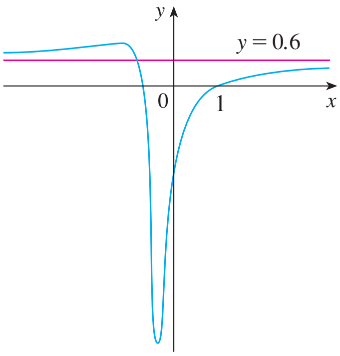


FIGURA 7

$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Un cálculo semejante muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.

EJEMPLO 4 Encuentre la asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUCIÓN Al dividir entre x tanto el numerador como el denominador y aplicar las propiedades de los límites, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \qquad (\text{ya que } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - 5 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

En el cálculo del límite conforme $x \to -\infty$, debemos recordar que para $x < 0$, tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Así que cuando dividimos el numerador entre x, para $x < 0$ obtenemos

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2 + 1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2 + \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{3 - 5 \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Así que la recta $y = -\sqrt{2}/3$ también es una asíntota horizontal.

Es probable que haya una asíntota vertical cuando el denominador, $3x - 5$, es 0; esto es, cuando $x = \frac{5}{3}$. Si x esta cerca de $\frac{5}{3}$ y $x > \frac{5}{3}$, entonces el denominador está cerca de 0 y $3x - 5$ es positivo. El numerador $\sqrt{2x^2 + 1}$ es siempre positivo, así que $f(x)$ es positivo. Por tanto,

$$\lim_{x\to(5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \infty$$

Si x está cerca de $\frac{5}{3}$, pero $x < \frac{5}{3}$, entonces $3x - 5 < 0$, así que $f(x)$ es negativo grande. Así,

$$\lim_{x\to(5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = -\infty$$

La asíntota vertical es $x = \frac{5}{3}$. Las tres asíntotas se muestran en la figura 8.

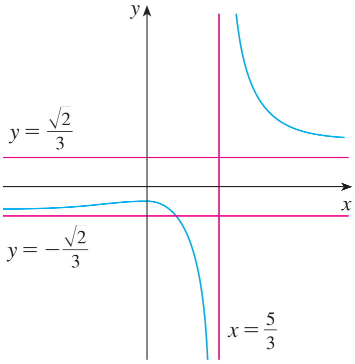


FIGURA 8

$y = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$

EJEMPLO 5 Calcule $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

SOLUCIÓN Ya que tanto $\sqrt{x^2+1}$ como x son muy grandes cuando x es grande, es difícil ver qué pasa con su diferencia, así que utilizamos el álgebra para reescribir la función. Primero multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado:

Puede considerar que la función dada tiene un denominador igual a 1.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

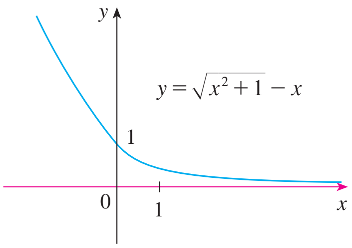


FIGURA 9

Observe que el denominador de esta última expresión $\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ resulta muy grande cuando $x \to \infty$ (más grande que x). Así que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

La figura 9 ilustra este resultado.

EJEMPLO 6 Evalúe el $\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/(x-2)$, sabemos que $t \to \infty$ cuando $x \to 2^+$. Por tanto, por la segunda ecuación en [4], tenemos

$$\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$

La gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ tiene a la recta $y = 0$ (el eje x) como una asíntota horizontal. (Lo mismo es verdadero para cualquier función exponencial con base $a > 1$). De hecho, de la gráfica en la figura 10 y la correspondiente tabla de valores, vemos que

6 $$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

Note que los valores de e^x se aproximan a 0 muy rápidamente.

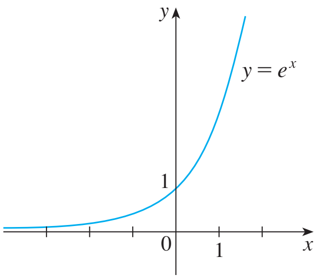


FIGURA 10

x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

V EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

RP La estrategia para resolver los problemas 6 y 7 es *introducir algo extra* (véase la página 75). Aquí, el algo extra, el elemento auxiliar, es la nueva variable t.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por tanto, por 6,

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

(Véase el ejercicio 75.)

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Conforme x crece, los valores de sen x oscilan infinitamente entre 1 y -1, así que no se aproximan a ningún número definido, por lo que $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ no existe.

Límites infinitos en el infinito

La notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se utiliza para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grandes cuando x se hace muy grande. Un significado similar está asociado con los siguientes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to \infty} x^3$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x se hace más grande, x^3 también se hace grande. Por ejemplo,

$$10^3 = 1\,000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$$

De hecho, podemos hacer x^3 tan grande como queramos tomando x suficientemente grande. Por esta razón, podemos escribir

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

Del mismo modo, cuando x es muy grande negativo, también lo es x^3. Así que

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Estos límites establecidos también pueden verse en la gráfica de $y = x^3$ en la figura 11.

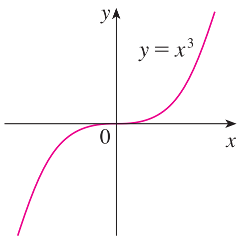


FIGURA 11
$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

En la figura 10 vemos que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

pero, como se observa en la figura 12, $y = e^x$ se hace más grande cuando $x \to \infty$, con mucha mayor rapidez que $y = x^3$.

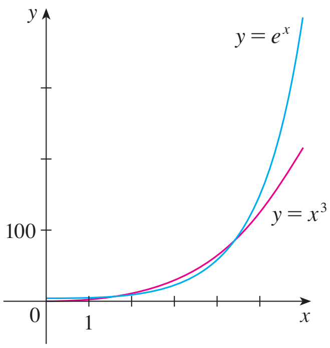


FIGURA 12
e^x es mucho más grande que x^3 cuando x es muy grande.

EJEMPLO 10 Encuentre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Sería un **error** escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no pueden aplicarse a límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ no puede definirse). Sin embargo, *podemos* escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

debido a que tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por tanto, también su producto.

EJEMPLO 11 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador, que es justamente x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

ya que $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to -1$ conforme $x \to \infty$.

El siguiente ejemplo muestra que utilizando límites infinitos al infinito, además de las intersecciones, podemos tener una idea general de la gráfica de una función polinomial sin tener que disponer de un gran número de puntos.

V EJEMPLO 12 Trace la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ encontrando las intersecciones y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN La intersección con el eje y es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y las intersecciones con el eje x, $x = 2, -1, 1$ se encuentran haciendo $y = 0$. Note que puesto que $(x - 2)^4$ es positivo, la función no cambia de signo en 2; así que la gráfica no cruza el eje x en 2. La gráfica interseca el eje x en -1 y 1.

Cuando x es un número positivo muy grande, todos los factores son muy grandes, así que

$$\lim_{x \to \infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x es un número negativo muy grande, el primero de los factores es un número positivo muy grande y los factores segundo y tercero son negativos muy grandes, así que

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Combinando esta información, obtenemos el esbozo de la gráfica de la figura 13.

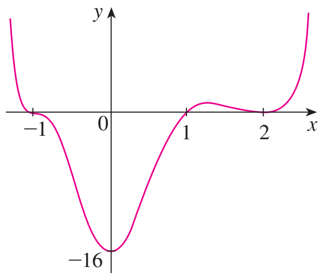


FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$

Definición precisa

La definición 1 puede establecerse de manera precisa como sigue.

> **7 Definición** Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
>
> significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que
>
> $$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

En palabras, esto indica que los valores de $f(x)$ pueden acercarse arbitrariamente a L (dentro de una distancia ε, donde ε es cualquier número positivo) tomando x suficientemente grande (más grande que N, donde N depende de ε). Gráficamente, esto nos dice que eligiendo x suficientemente grande (más grande que algún número N) podemos hacer que la gráfica de f esté atrapada entre las rectas horizontales dadas $y = L - \varepsilon$ y

$y = L + \varepsilon$ como se ve en la figura 14. Esto debe ser verdadero sin importar qué tan pequeño elijamos ε. La figura 15 muestra que si elegimos un valor de ε muy pequeño, entonces puede necesitarse un valor de N muy grande.

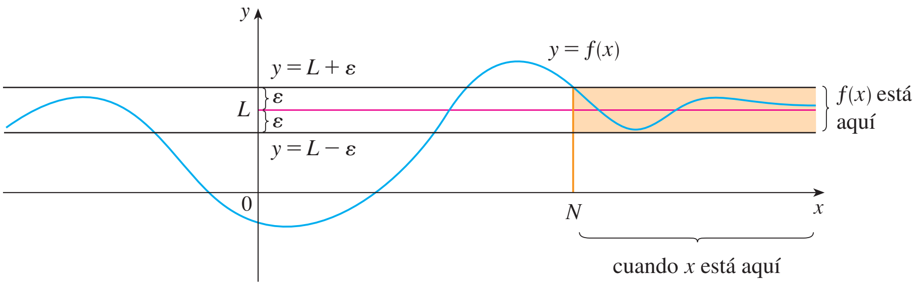


FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

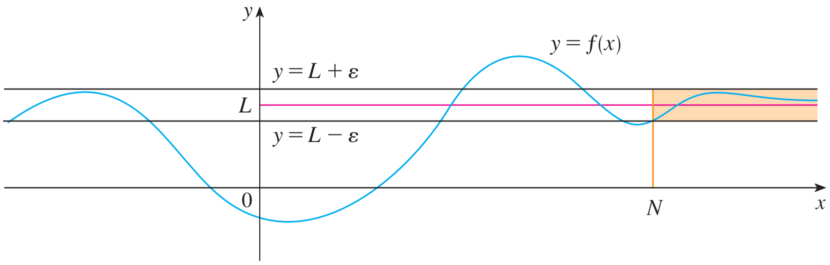


FIGURA 15
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Del mismo modo, una versión precisa de la definición 2 está dada por la definición 8, que se ilustra en la figura 16.

> **8 Definición** Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces
>
> $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
>
> significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que
>
> $$\text{si} \qquad x < N, \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

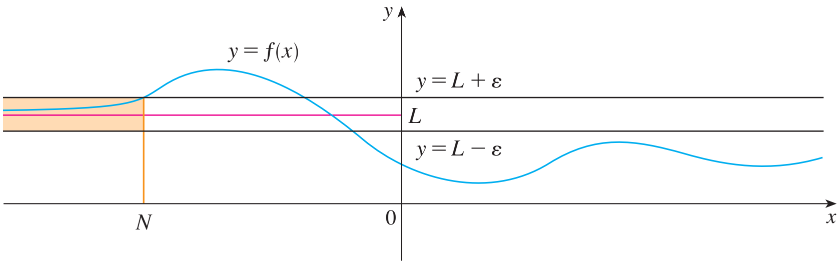


FIGURA 16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

En el ejemplo 3 obtuvimos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

En el siguiente ejemplo utilizamos una calculadora o computadora para relacionar esta proposición con la definición 7, con $L = \frac{3}{5}$ y $\varepsilon = 0.1$.

TEC En Module 2.4/2.6 puede explorar la definición precisa de límite de manera gráfica o numérica.

EJEMPLO 13 Utilice una gráfica para encontrar un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

SOLUCIÓN Reescribimos la desigualdad dada como

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

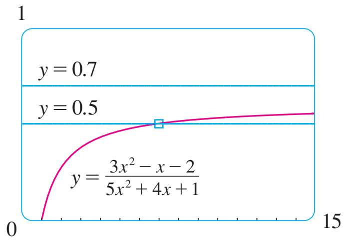


FIGURA 17

Necesitamos determinar las valores de x para los cuales la curva dada está entre las rectas horizontales $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Las gráficas de la curva y de estas rectas se muestran en la figura 17. Entonces utilizamos el cursor para estimar que la curva cruza la recta $y = 0.5$ cuando $x \approx 6.7$. A la derecha de este número parece que la curva está entre las rectas $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Redondeando, podemos decir que

$$\text{si} \quad x > 7, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

En otras palabras, para $\varepsilon = 0.1$ podemos elegir $N = 7$ (o cualquier otro número mayor) en la definición 7.

EJEMPLO 14 Utilice la definición 7 para demostrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Al calcular el límite podemos suponer que $x > 0$. Entonces $1/x < \varepsilon \iff x > 1/\varepsilon$. Elegimos $N = 1/\varepsilon$. Así que

$$\text{si} \quad x > N = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Por tanto, de la definición 7

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

La figura 18 ilustra la demostración mostrando algunos valores de ε y los correspondientes valores de N.

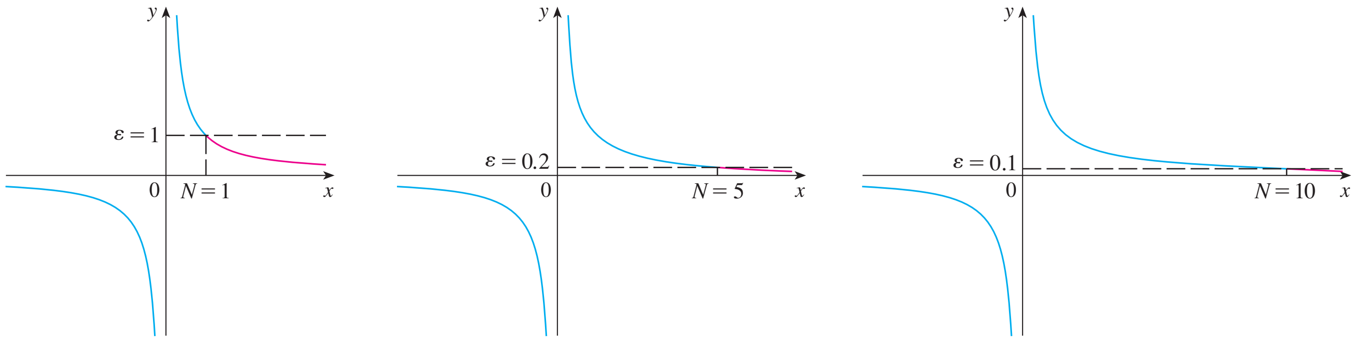


FIGURA 18

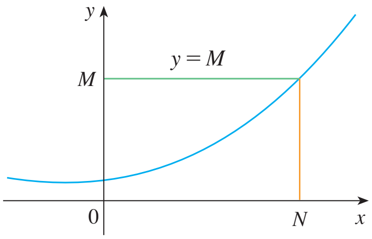


FIGURA 19
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Finalmente notamos que un límite infinito al infinito puede definirse como sigue. En la figura 19 se muestra una ilustración geométrica.

9 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un correspondiente número positivo N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \qquad \text{entonces} \qquad f(x) > M$$

Definiciones similares se aplican cuando el símbolo ∞ se reemplaza por $-\infty$. (Véase el ejercicio 74.)

2.6 Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada uno de los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. a) ¿Puede la gráfica de $y = f(x)$ intersecar una asíntota vertical? ¿Puede intersecar una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.

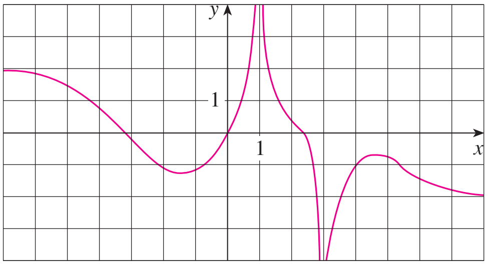
b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas que muestren las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim_{x\to 3} f(x)$

e) Las ecuaciones de las asíntotas

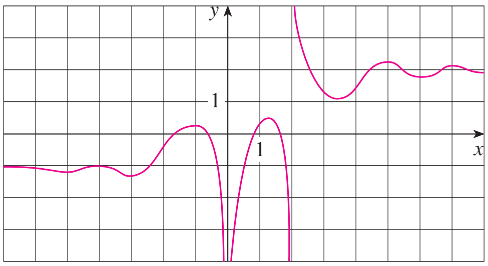


4. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca lo siguiente.

a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

c) $\lim_{x\to 0} g(x)$ d) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

e) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ f) Las ecuaciones de las asíntotas



5-10 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas

5. $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -5$

6. $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, f es impar

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$,
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

11. Conjeture el valor del límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. Después, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

12. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar el valor de $\lim_{x \to \infty} f(x)$ con una aproximación de dos cifras decimales.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con una aproximación de cuatro cifras decimales.

13-14 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15-38 Encuentre el límite o demuestre que no existe.

15. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{2x + 1}$

16. $\lim_{x \to \infty} \frac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}$

17. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 1}$

18. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 5}$

19. $\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\lim_{t \to \infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\lim_{x \to \infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

31. $\lim_{x \to -\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

33. $\lim_{x \to \infty} \arctan(e^x)$

34. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35. $\lim_{x \to \infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

36. $\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

37. $\lim_{x \to \infty} (e^{-2x} \cos x)$

38. $\lim_{x \to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

39. a) Estime el valor de

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

dibujando la gráfica de la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x.$$

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para conjeturar el valor del límite.

c) Pruebe que su conjetura es correcta.

40. a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar el valor de $\lim_{x \to \infty} f(x)$ con una aproximación de una cifra decimal.

b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con una aproximación de cuatro cifras decimales.

c) Halle el valor exacto del límite.

41-46 Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo graficador, verifique su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

41. $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$

42. $y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

43. $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

44. $y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

45. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

46. $y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$

47. Estime la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2\,000}$$

mediante la gráfica de f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Después obtenga la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explica la discrepancia?

48. a) Grafique la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Utilice la gráfica para estimar el valor de los límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

b) Calcule algunos valores de $f(x)$ y proporcione estimaciones numéricas de los límites del inciso a).

c) Calcule los valores exactos de los límites en el inciso a). ¿Obtiene el mismo valor o valores diferentes de esos dos límites? [En relación con su respuesta al inciso a), tendrá que verificar su cálculo para el segundo límite.]

49. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

50. Proponga una fórmula para una función que tiene asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

51. Una función f es un cociente de funciones cuadráticas y tiene una asíntota vertical $x = 4$ y una intersección de x en $x = 1$. Se sabe que f tiene una discontinuidad removible en $x = -1$ y $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$. Evalúe

a) $f(0)$ b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

52-56 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para esbozar la gráfica como en el ejemplo 12.

52. $y = 2x^3 - x^4$ **53.** $y = x^4 - x^6$

54. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

55. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

56. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

---

57. a) Utilice el teorema de la compresión para evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

b) Grafique $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. ¿Cuántas veces cruza la gráfica la asíntota?

58. Por el *comportamiento al final* de una función entenderemos una descripción de lo que sucede con sus valores cuando $x \to \infty$ y a medida que $x \to -\infty$

a) Describa y compare el comportamiento al final de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

graficando las dos funciones en los rectángulos de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10000, 10000]$.

b) Se dice que dos funciones tienen el *mismo comportamiento al final* si su cociente tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento al final.

59. Sean P y Q dos polinomios. Encuentre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es a) menor que el grado de Q y b) mayor que el grado de Q.

60. Haga un esbozo aproximado de la gráfica de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los cinco casos siguientes:

i) $n = 0$ ii) $n > 0$, n impar
iii) $n > 0$, n par iv) $n < 0$, n impar
v) $n < 0$, n par

Después utilice estos esbozos para encontrar los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$

c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ d) $\lim_{x\to -\infty} x^n$

61. Determine $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

62. a) Un depósito contiene 5 000 L de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito con una proporción de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $x \to \infty$?

63. En el capítulo 9 se demostrará que, según ciertas hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t, es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad final* de la gota de lluvia.

a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

b) Trace la grafica de $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s y $g = 9.8$ m/s². ¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance 99% de su velocidad final?

64. a) Mediante el trazo de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.

b) ¿Puede resolver el inciso a) sin un dispositivo de graficación?

65. Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N, \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

66. En el caso del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

67. Ilustre la definición 8 para el límite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

determinando valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

68. Ilustre la definición 9 para el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

calculando valores de N que correspondan a $M = 100$.

69. a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?

b) Al hacer $r = 2$ en el teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la definición 7.

70. a) ¿Qué tan grande debemos tomar a x de manera que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?

b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ en el teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la definición 7.

71. Demuestre, mediante la definición 8, que $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

72. Demuestre, mediante la definición 9, que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

73. Utilice la definición 9 para demostrar que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

74. Formule una definición precisa de

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Después utilice su definición para demostrar que

$$\lim_{x\to-\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

75. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to0^+} f(1/t)$$

y $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to0^-} f(1/t)$$

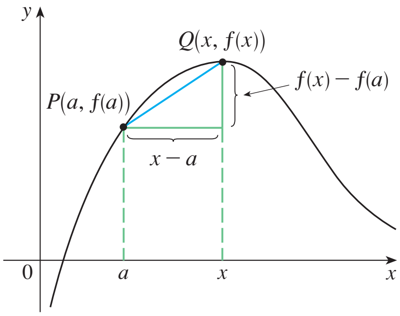
si estos límites existen.

2.7 Derivadas y razones de cambio

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto involucran encontrar el mismo tipo de límite, como vimos en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y en las ciencias e ingeniería puede ser interpretada como una razón de cambio.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere usted hallar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:



$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Después, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende un número m, entonces definimos la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiene a P. (Véase la figura 1.)

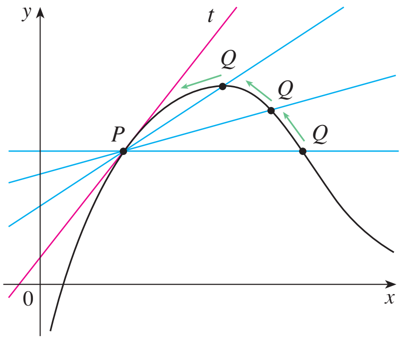


FIGURA 1

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

En nuestro primer ejemplo, se confirma la suposición que hicimos en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1,1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se encuentra que la ecuación de la recta tangente en (1, 1) es

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = 2x - 1$$

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Cuanto más se acerque, tanto más la parábola se parece a una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

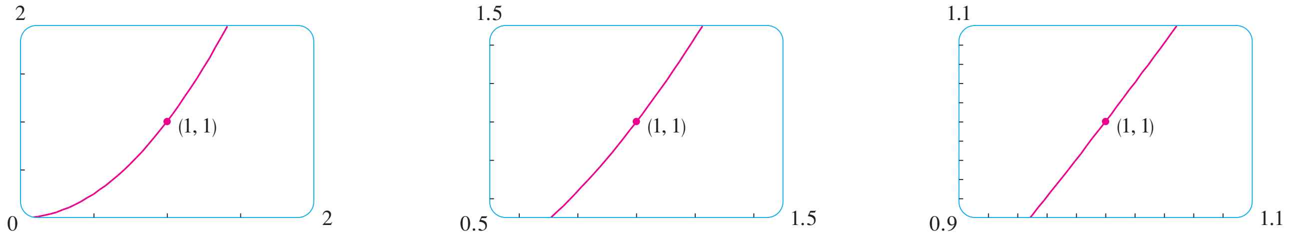


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) sobre la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(Véase la figura 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Note que conforme x se aproxima a a, h se acerca a 0 (puesto que $h = x - a$) y, por ende, la expresión de la pendiente de la recta tangente, en la definición 1 se convierte en

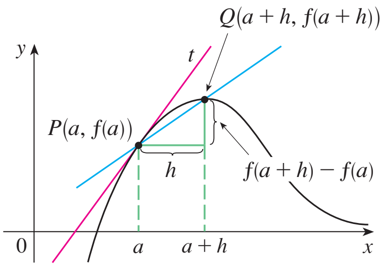


FIGURA 3

2
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

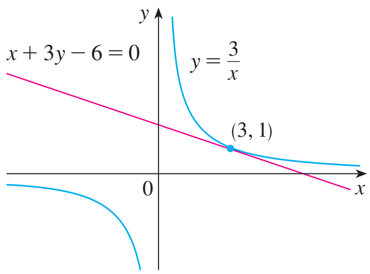


FIGURA 4

En consecuencia, la ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

la cual se simplifica a

$$x + 3y - 6 = 0$$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente.

Velocidades

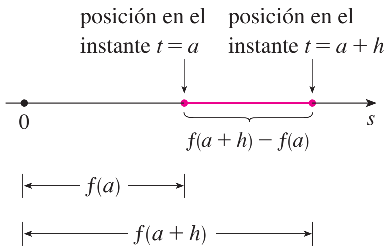


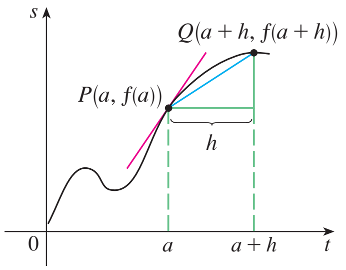
FIGURA 5

En la sección 2.1 investigamos el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN, y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos de tiempo cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función posición** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 6.



$m_{PQ} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

= velocidad promedio

FIGURA 6

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3
$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P. (Compare las ecuaciones 2 y 3.)

Ahora que sabe calcular límites, vuelva a considerar el problema de la pelota que cae.

V EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el nivel del suelo.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?

b) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

Recuerde que en la sección 2.1 vimos que la distancia (en metros) que recorre la pelota que cae una vez que transcurre t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Necesita usted hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera que es conveniente iniciar la búsqueda de la velocidad en

un tiempo general $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, se tiene

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a$$

a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.
b) Puesto que la plataforma de observación está a 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

Derivadas

Hemos visto que en la búsqueda de la pendiente de una recta tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3) surge la misma clase de límite. De hecho, límites en la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surgen cuando calculamos una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite aparece muy a menudo, se da un nombre y notación especial.

$f'(a)$ se lee "f prima de a".

4 Definición La **derivada de una función f en un número $x = a$**, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y sólo si x tiende a a. En consecuencia, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como vimos en la búsqueda de rectas tangentes, es

5
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

Definimos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m, dada por la ecuación 1 o 2. Ya que, por la definición 4, ésta es la misma que la derivada $f'(a)$, podemos decir lo siguiente.

> La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en $x = a$.

Si utilizamos la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

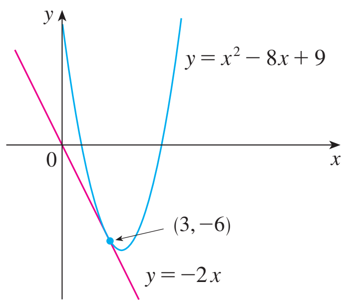


FIGURA 7

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 sabemos que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número $x = a$ es $f'(a) = 2a - 8$. En consecuencia, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. En estos términos, la ecuación de la recta tangente que se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \text{o bien} \quad y = -2x$$

Razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y lo expresamos como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

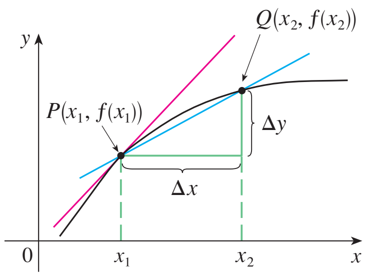
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



razón de cambio promedio $= m_{PQ}$

razón de cambio instantánea = pendiente de la recta tangente en P

FIGURA 8

se llama **razón de cambio promedio de y respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8.

Por analogía con la velocidad, considere la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por tanto, hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de y respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

6 $$\text{Razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconocemos este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tenemos una segunda interpretación:

La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x cuando $x = a$.

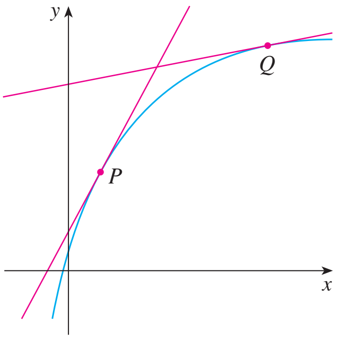


FIGURA 9
Los valores de y cambian rápidamente en P y lentamente en Q.

El vínculo con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 9), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto Q), y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s respecto al tiempo t. En otras palabras, *$f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$.* La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que está definida verbalmente.

V EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con ancho fijo. El costo de producir x yardas de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1\,000) = 9$?
c) ¿Cuál piensa que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay respecto a $f'(5\,000)$?

SOLUCIÓN

a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esta rapidez de cambio *costo marginal*. Esta idea se analiza en más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Ya que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las unidades para el cociente de diferencias $\Delta C/\Delta x$. Puesto que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada yarda.

b) El enunciado de que $f'(1\,000) = 9$ significa que, después de fabricar 1 000 yardas de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1\,000$, C se incrementa 9 veces tan rápido como x.)

En este caso suponga que la función costo se comporta bien; en otras palabras, $C(x)$ no oscila rápidamente cerca de $x = 1\,000$.

Dado que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1\,000$, podría usarse la aproximación

$$f'(1\,000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decimos que el costo de fabricación de las 1 000 yardas (o de la 1 001) es de casi 9 dólares.

c) La razón a la cual se incrementa el costo de producción (por cada yarda) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación de la yarda 500 es menor que el costo de la yarda 50) debido a la escala económica. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, conforme se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será ineficiente y con eso los costos de horas extra de trabajo. En estos términos, es posible que la razón de incremento de costos empezarán con el tiempo a subir. De este modo, es posible que suceda que

$$f'(5\,000) > f'(500)$$

En el ejemplo siguiente estimaremos la razón de cambio de la deuda nacional respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino mediante una tabla de valores.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1 945.9
1990	3 233.3
1995	4 974.0
2000	5 674.2
2005	7 932.7

V EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional de EU en el tiempo t. La tabla en el margen proporciona valores aproximados de esta función siempre que se estime a fin de año, en miles de millones de dólares, desde 1980 hasta 2005. Interprete y estime el valor de $D'(1990)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa la razón de cambio de D respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la razón de incremento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo con la ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Así que calculamos y tabulamos los valores del cociente de diferencias (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09
2005	313.29

A partir de esta tabla vemos que $D'(1990)$ se localiza en alguna parte entre 257.48 y 348.14 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuará de manera errática entre 1980 y el 2000.] Se estima que la razón de incremento de la deuda nacional de EU en 1990 fue el promedio de estos números, específicamente

$$D'(1990) \approx 303 \text{ miles de millones de dólares por cada año.}$$

Una nota sobre unidades

Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades para ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, miles de millones de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, de este modo, se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

Otro método sería una gráfica de la función deuda y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1990$.

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda respecto al tiempo es de interés en economía. Existen otras razones de cambio: en física, la razón de cambio de trabajo respecto al tiempo se le denomina *potencia*. Los químicos que estudian una reacción química están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo respecto al tiempo (denominada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la relación de cambio de la población de una colonia de bacterias respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio son derivadas y pueden interpretarse como pendientes de rectas tangentes. Esto le confiere un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resuelve usted problemas en que intervienen rectas tangentes, no sólo resuelve un problema de geometría, también resuelve implícitamente gran variedad de problemas de las ciencias y la ingeniería, en que intervienen razones de cambio.

2.7 Ejercicios

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Dibuje la curva $y = e^x$ en los rectángulos de vista $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué advierte acerca de la curva conforme hace un acercamiento hacia el punto (0, 1)?

3. a) Halle la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto (1, 3)
i) usando la definición 1 ii) usando la ecuación 2
b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso a).
c) Dibuje la parábola y la recta tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto (1, 3) hasta que la parábola y la recta tangente sean indistinguibles.

4. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto (1, 0)
i) usando la definición 1 ii) usando la ecuación 2
b) Halle la ecuación de la recta tangente del inciso a).
c) Dibuje la curva y la recta tangente en rectángulos de vista cada vez más pequeños centrados en (1, 0) hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5-8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

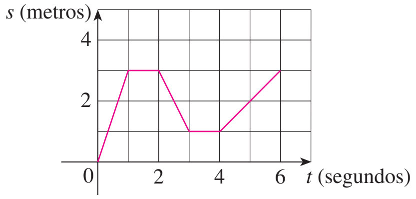
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

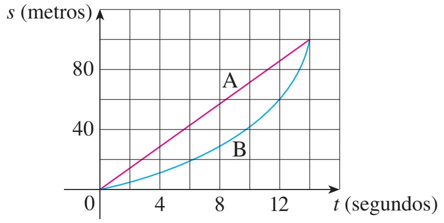
9. a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ en el punto donde $x = a$.
b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos (1, 5) y (2, 3).
c) Grafique la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

10. a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
b) Plantee las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos (1, 1) y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
c) Grafique la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

11. a) Una partícula empieza moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra enseguida. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?
b) Dibuje una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

a) Describa y compare cómo desarrollaron la carrera las competidoras.
b) ¿En qué momento hay la mayor distancia entre las competidoras?
c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) una vez que transcurren t segundos, está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

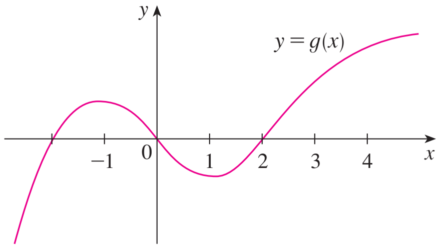
14. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 10t - 1.86t^2$.
a) Halle la velocidad de la roca después de un segundo.
b) Halle la velocidad de la roca cuando $t = a$.
c) ¿Cuándo caerá la roca a la superficie?
d) ¿Con qué velocidad la roca chocará contra la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta esta dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo:
i) [3, 4] ii) [3.5, 4]
iii) [4, 5] iv) [4, 4.5]
b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
c) Dibuje la grafica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio en el inciso a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea en el inciso b).

17. Para la función g cuya gráfica está dada, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



18. Halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

19. Si la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

20. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en (4, 3) pasa a través del punto (0, 2), halle $f(4)$ y $f'(4)$.

21. Dibuje la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

22. Dibuje la grafica de una función g para la cual

$$g(0) = g(2) = g(4) = 0,\ g'(1) = g'(3) = 0,\ g'(0) = g'(4) = 1,\ g'(2) = -1,\ \text{lím}_{x\to\infty} g(x) = \infty \text{ y } \text{lím}_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

23. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto (1, 2).

24. Si $g(x) = x^4 - 2$ encuentre $g'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto $(1, -1)$.

25. a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto (2, 2).
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y utilícela para encontrar las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos (2, 8) y (3, 9).
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

27-32 Encuentre f'a) en cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

28. $f(t) = 2t^3 + t$

29. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

30. $f(x) = x^{-2}$

31. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

33-38 Cada uno de los siguientes límites representa la derivada de alguna función f en algún número $x = a$. Establezca una f y una a en cada caso.

33. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

35. $\displaystyle \lim_{x\to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

36. $\displaystyle \lim_{x\to \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

37. $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

38. $\displaystyle \lim_{t\to 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

39-40 Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Halle la velocidad y la rapidez cuando $t = 5$.

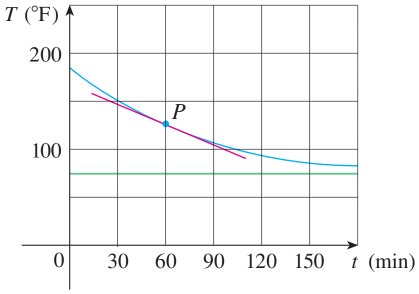
39. $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$

40. $f(t) = t^{-1} - t$

41. Una lata de gaseosa tibia se pone a enfriar en un refrigerador. Grafique la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la relación de cambio después de una hora?

42. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde

la temperatura es de 75°F. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la recta tangente, estime la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



43. La tabla muestra el número N de usuarios de telefonía celular en EU. (Se proporcionan estimaciones semestrales.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

a) Halle la razón de crecimiento promedio de celulares
   i) de 2002 a 2006 ii) de 2002 a 2004
   iii) de 2000 a 2002
   En cada caso, incluya las unidades.
b) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2002 tomando dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
c) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2002 midiendo la pendiente de una recta tangente.

44. En la tabla se proporciona el numero N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 1 de octubre.)

Año	2004	2005	2006	2007	2008
N	8569	10 241	12 440	15 011	16 680

a) Determine la tasa promedio de crecimiento
   i) desde 2006 hasta 2008 ii) desde 2006 hasta 2007
   iii) de 2005 hasta 2006
   En cada caso incluya las unidades.
b) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2006 considerando dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
c) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2006 midiendo la pendiente de una recta tangente.
d) Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2007 y compárela con la razón de crecimiento en 2006. ¿Qué concluye?

45. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.
a) Encuentre la razón de cambio promedio de C respecto a x, cuando cambia el nivel de producción:
   i) de $x = 100$ a $x = 105$
   ii) de $x = 100$ a $x = 101$
b) Halle la razón de cambio instantáneo de C respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

46. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 galones de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, entonces la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantáneo de V respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una frase o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

47. El costo de producir x onzas de oro a partir de una reciente mina de oro es $C = f(x)$ dólares.
a) ¿Cual es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) ¿Que significa establecer $f'(800) = 17$?
c) Qué piensa usted: ¿los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto plazo? ¿Y a largo plazo? Explique.

48. El número de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.
a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Considere que existe una cantidad de espacio y nutrientes para la bacteria. Qué cree usted: ¿Es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrientes, ¿afectaría su conclusión? Explique.

49. Sea $T(t)$ la temperatura (en °F) en Phoenix t horas después de la medianoche del 10 de septiembre de 2008. La tabla muestra los valores de esta función registrada cada dos horas. ¿Cuál es el significado de $T'(8)$? Estime su valor.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	82	75	74	75	84	90	93	94

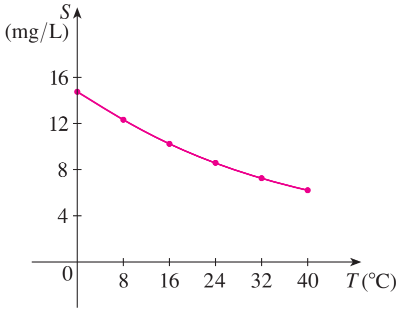
50. La cantidad (en libras) de un café que es vendido por una compañía en un precio de p dólares por cada libra es $Q = f(p)$.
a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) ¿$f'(8)$ es positiva o negativa? Explique.

51. La cantidad de oxígeno que puede disolverse en agua depende de la temperatura de ésta. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra

cómo varia la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estime e interprete el valor de $S'(16)$.

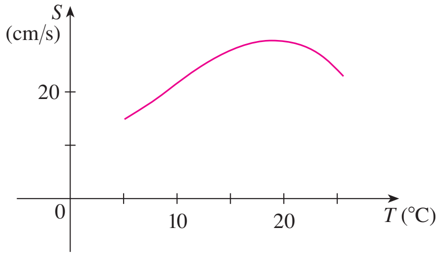


Adaptada de *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2a. ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reimpreso con autorizacion de Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J.

52. La grafica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado del salmón Coho.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estime los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



53-54 Determine si $f'(0)$ existe en cada una de las siguientes funciones.

53. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

REDACCIÓN DE PROYECTO PRIMEROS MÉTODOS PARA ENCONTRAR TANGENTES

La primera persona en formular explícitamente las ideas de límites y derivadas fue Isaac Newton en la década de 1660. Pero Newton reconoció: "Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes". Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601-1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para hallar rectas tangentes, y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las siguientes referencias contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias de estas referencias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, aplique el método de la sección 2.7 para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto (1, 3) y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, señale las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.
2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.
4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.8 La derivada como una función

En la sección anterior consideramos la derivada de una función f en un número fijo $x = a$:

1 $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ahora cambiaremos el punto de vista y haremos que el número $x = a$ varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, obtenemos

2 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Dado cualquier numero x para el cual este límite exista, asignamos a x el número $f(x)$. De modo que consideramos a f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Sabemos que el valor de f' en x, $f'(x)$ puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x)$ existe$\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

V EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Utilícela para dibujar la gráfica de la derivada f'.

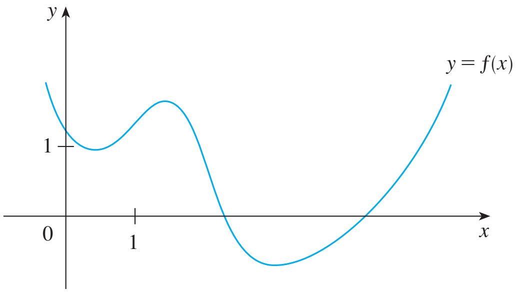
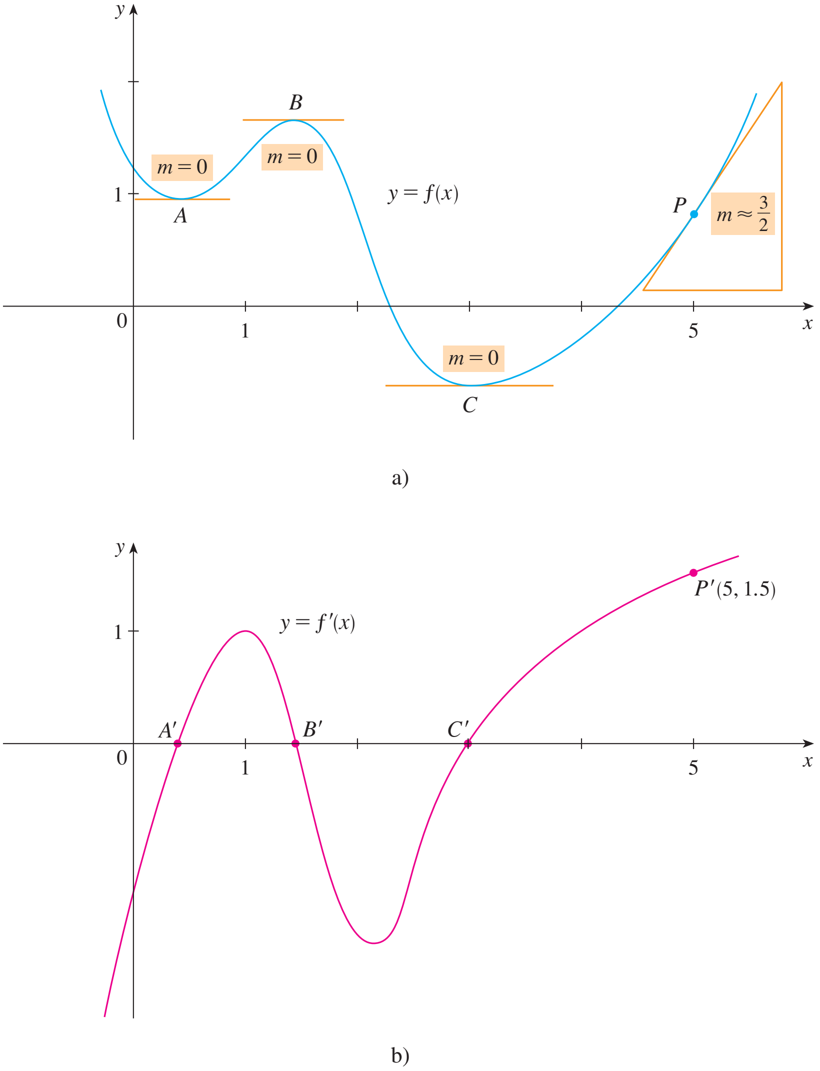


FIGURA 1

SOLUCIÓN Puede estimar el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la recta tangente en P de la figura 2a) y estime su pendiente alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. Si repite este procedimiento en varios puntos, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2b). Advierta que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 allí, y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva allí. Pero entre B y C las tangentes tienen pendiente negativa, de modo que $f'(x)$ allí es negativa.



TEC Visual 2.8 muestra una animación de la figura 2 para diferentes funciones.

FIGURA 2

V EJEMPLO 2

a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.
b) Ilústrela comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN

a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

b) Use un dispositivo de graficación para trazar las graficas de f y f' de la figura 3. Note que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas graficas sirven como comprobación de nuestra solución del inciso a).

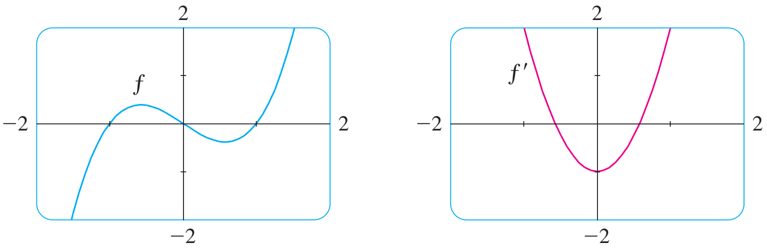


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Establezca el dominio de f'.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

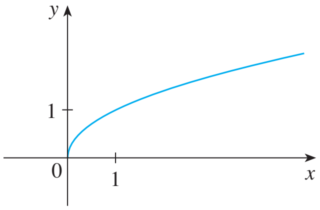
Aquí, racionalice el numerador

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

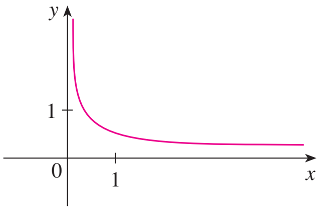
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$ y es menor que el dominio de f, $[0, \infty)$.



a) $f(x) = \sqrt{x}$



b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las graficas de f y f' en la figura 4. Cuando x esta cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por tanto, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ es muy grande, y esto corresponde a rectas tangentes muy empinadas cerca de (0, 0) de la figura 4a), y a valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 4b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeña, y esto corresponde a rectas tangentes más aplanadas en la extrema derecha de la gráfica de f y a la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad-bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$

Otras notaciones

Si usamos la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx, introducido por Leibniz, no debe considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con base en la ecuación 2.7.6, puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico $x = a$, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{o bien} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudio leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de allí. Obtuvo el grado de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones diplomáticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar las Iglesias católica y protestante.

Su estudio formal de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en las matemáticas y las ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En su versión del Cálculo, que publicó en 1684, estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgía una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el Cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del Cálculo; pero, debido a su temor a la controversia, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del Cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

3 Definición Una función f es **derivable en $x = a$** si $f'(a)$ existe. Es **derivable sobre un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

V EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y podemos elegir h lo suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$, de aquí que $|x + h| = x + h$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y, por consiguiente, f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ y se puede elegir h lo suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por tanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

así que f es derivable para cualquier $x < 0$.

Para $x = 0$ debemos investigar

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe).}$$

Calcule por separado los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

y
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto en $x = 0$.

La fórmula para f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 5b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5a).]

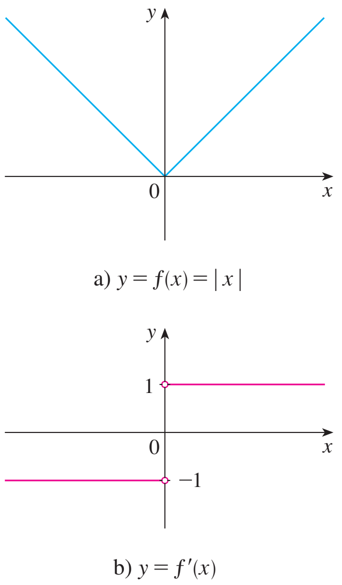


FIGURA 5

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades.

4 Teorema Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar que f es continua en $x = a$, debemos demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Para esto empezamos por probar que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en $x = a$; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (véase la ecuación 2.7.5). Para relacionar lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es posible cuando $x \neq a$):

RP Un aspecto importante de la solución de problemas es intentar encontrar una conexión entre lo dado y lo desconocido. Consulte el paso 2 (Piense en un plan) en Principios para la resolución de problemas, en la página 75.

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

De este modo, si usamos la ley del producto y la ecuación (2.7.5), podemos escribir

$$\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Para utilizar lo que acabamos de demostrar, comenzamos con $f(x)$ y sumamos y restamos $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [f(a) + (f(x) - f(a))]$$

$$= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)]$$

$$= f(a) + 0 = f(a)$$

En consecuencia, f es continua en $x = a$.

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas, pero que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 7 de la sección 2.3.) Pero en el ejemplo 5 demostramos que f no es derivable en $x = 0$.

¿Cómo deja de ser derivable una función?

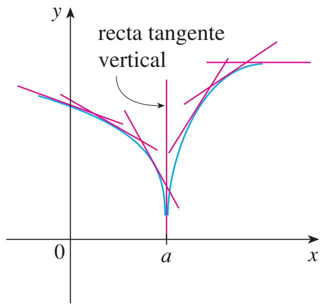


FIGURA 6

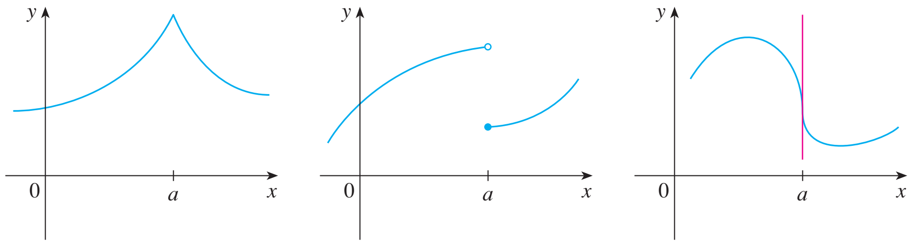
En el ejemplo 5 vimos que la función $y = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y en la figura 5a) se muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable allí. [Al intentar calcular $f'(a)$, encontramos que los limites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 señala otra forma en que una función no tiene derivada. En él se afirma que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en $x = a$. Por ende, en cualquier discontinuidad (p. ej., una discontinuidad de salto), f no es derivable.

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en $x = a$ y

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7c) ilustra otra. Las tres posibilidades recién analizadas se ilustran en la figura 7.



a) Una esquina o pico b) Una discontinuidad c) Una tangente vertical

FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en $x = a$

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en $x = a$, entonces, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica

se alinea y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo específico es la figura 2 de la sección 2.7.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7a): no puede eliminar el punto agudo o esquina. (Véase la figura 9.)

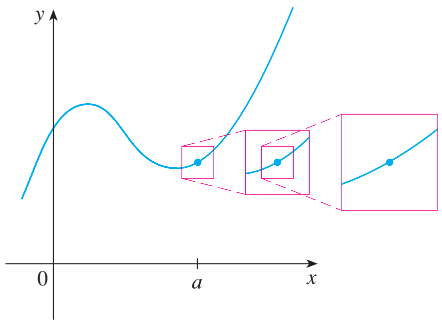


FIGURA 8
f es derivable en $x = a$.

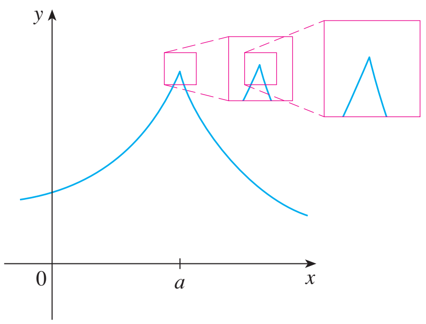


FIGURA 9
f no es derivable en $x = a$.

Derivadas superiores

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así que f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, halle e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 encontramos que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Así que la segunda derivada es

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

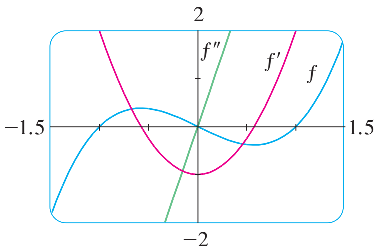


FIGURA 10

Las gráficas de f, f' y f'' se exhiben en la figura 10.

Puede interpretarse $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y es positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos.

TEC En Module 2.8 puede usted ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f y cómo afectan el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

En general, puede interpretarse una segunda derivada como una razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La tercera derivada f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ puede interpretarse como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, escribimos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, halle $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 encontramos que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y, de este modo, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Así, f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. En consecuencia, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Puede interpretarse físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

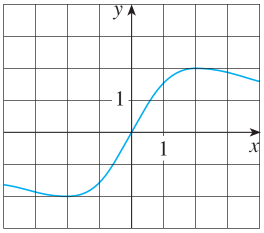
Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Nombre apropiado porque un jerk considerable significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' proporciona información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 veremos cómo la segunda derivada y las derivadas superiores nos permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

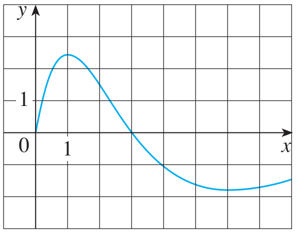
2.8 Ejercicios

1-2 Utilice la gráfica que se proporciona para estimar el valor de cada derivada. Luego dibuje f'.

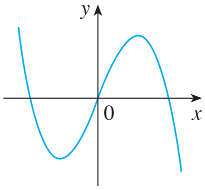
1. a) $f'(-3)$
b) $f'(-2)$
c) $f'(-1)$
d) $f'(0)$
e) $f'(1)$
f) $f'(2)$
g) $f'(3)$

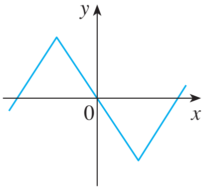


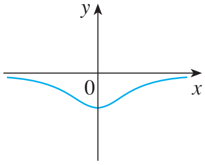
2. a) $f'(0)$
b) $f'(1)$
c) $f'(2)$
d) $f'(3)$
e) $f'(4)$
f) $f'(5)$
g) $f'(6)$
h) $f'(7)$

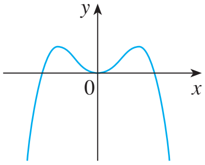


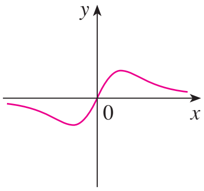
3. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras a)-d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I a IV. Dé las razones para sus selecciones.

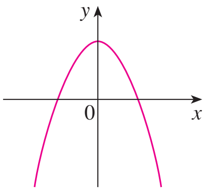
a)


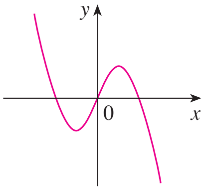
b)


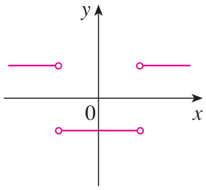
c)


d)


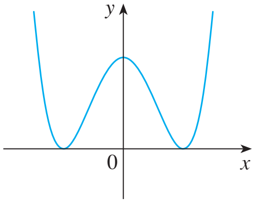
I


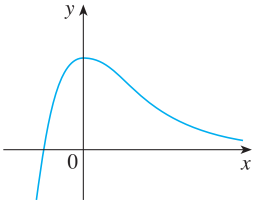
II


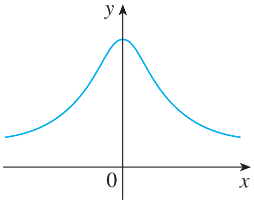
III


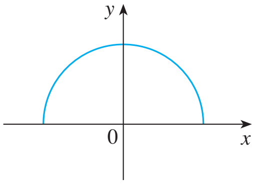
IV


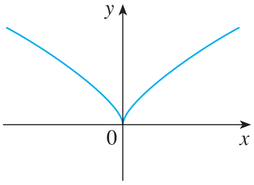
4-11 Trace o copie la gráfica de la función dada *f*. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego aplique el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de ella.

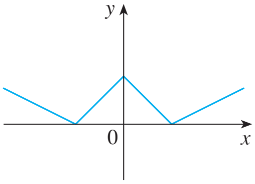
4.


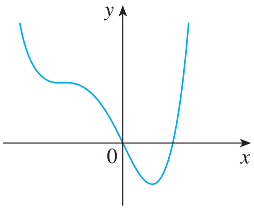
5.


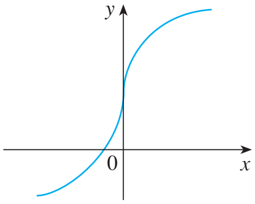
6.


7.


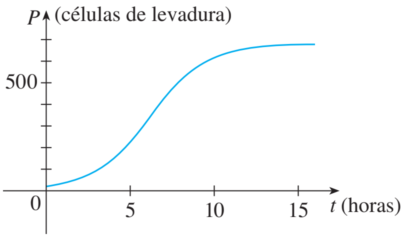
8.


9.


10.


11.


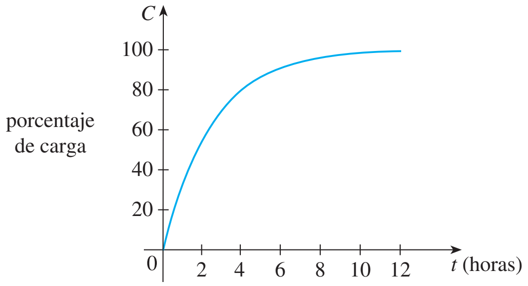
12. Se muestra la gráfica de la función población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Utilice el método



del ejemplo 1 para dibujar la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?

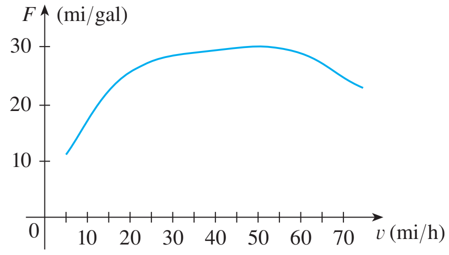
13. Una batería recargable se conecta con un cargador. La gráfica muestra $C(t)$, el porcentaje de capacidad que la batería alcanza como una función del tiempo t transcurrido (en horas).

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $C'(t)$?
b) Trace la gráfica de $C'(t)$. ¿Qué le indica la gráfica?

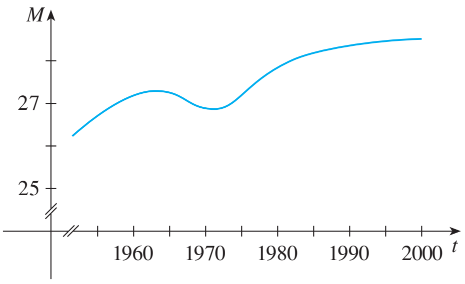


14. La gráfica (proporcionada por el Departamento de Energía de EU) muestra cómo afecta la rapidez de manejo el consumo de combustible. La economía F se mide en millas por galón, y la rapidez v se mide en millas por hora.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada $F'(v)$?
b) Trace la gráfica de la derivada de $F'(v)$.
c) ¿A qué rapidez debería manejar si quiere ahorrar combustible?



15. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo XX. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



16-18 Trace una gráfica cuidadosa de f y debajo de ella la grafica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4-11. ¿Puede intuir una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

16. $f(x) = \text{sen } x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

---

19. Sea $f(x) = x^2$.

a) Estime los valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$, y $f'(2)$ usando un dispositivo graficador para hacer un acercamiento sobre la grafica de f.
b) Utilice la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$ $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
c) Con los resultados de los incisos a) y b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
d) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso c) es correcta.

20. Sea $f(x) = x^3$.

a) Estime los valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$ y $f'(3)$ usando un dispositivo graficador para hacer un acercamiento sobre la grafica de f.
b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$, y $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
c) Utilice los valores de los incisos a) y b) para trazar la gráfica de f'.
d) Proponga una fórmula para $f'(x)$.
e) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso d) es correcta.

21-31 Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada. Establezca los dominios de la función y de su derivada.

21. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 5t - 9t^2$

24. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

25. $f(x) = x^2 - 2x^3$

26. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

---

32. a) Dibuje la gráfica de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ a partir de la gráfica $y = \sqrt{x}$ y aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
b) Use la gráfica del inciso a) para trazar la gráfica de f'.
c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
d) Utilice un dispositivo graficador para trazar la grafica de f' y compárela con su trazo del inciso b).

33. a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
b) Vea si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y de f'.

34. a) Si $f(x) = x + 1/x$, encuentre $f'(x)$.
b) Vea si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y de f'.

35. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla del Bureau of Labor Statistics (Oficina de Estadísticas de Empleo) proporciona el porcentaje de desempleados en la fuerza laboral de EU de 1999 a 2008.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1999	4.2	2004	5.5
2000	4.0	2005	5.1
2001	4.7	2006	4.6
2002	5.8	2007	4.6
2003	6.0	2008	5.8

a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Elabore una tabla de valores estimados para $U'(t)$.

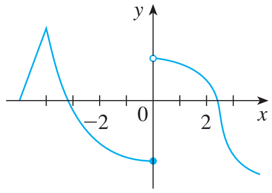
36. Sea $P(t)$ el porcentaje de estadounidenses por debajo de 18 años de edad en el instante t. La tabla proporciona valores de esta función en los años en que se levantó un censo de 1950 a 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

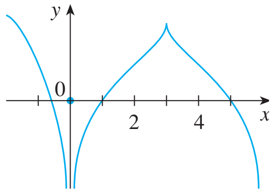
a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Elabore una tabla de valores para $P'(t)$.
c) Dibuje P y P'.
d) ¿Cómo sería posible obtener valores más precisos para $P'(t)$?

37-40 Se proporciona la gráfica de f. Establezca con argumentos, los números en los cuales f no es derivable.

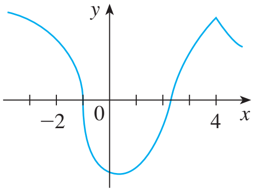
37.



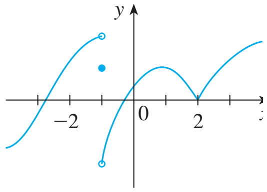
38.



39.



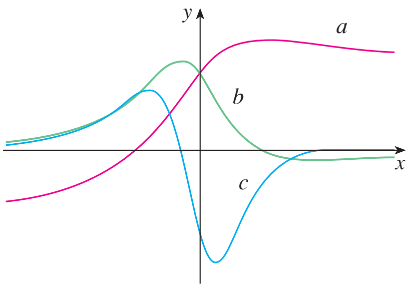
40.



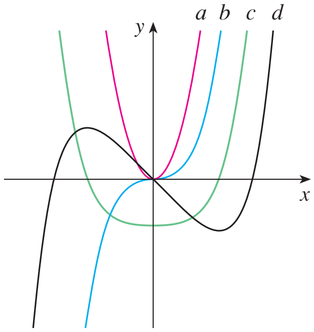
41. Grafique la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

42. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ sobre la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Que observa? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

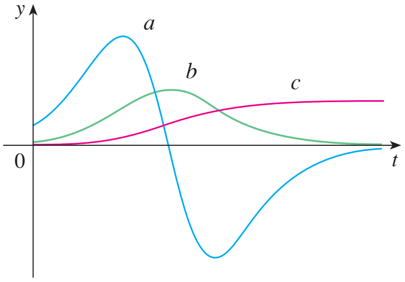
43. La figura muestra las graficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique el porqué de su elección.



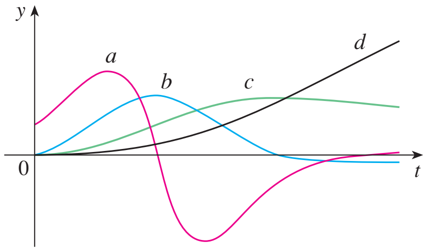
44. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



45. La figura exhibe las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



46. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones relacionadas con el movimiento de un automóvil: la de posición, la de velocidad, la de aceleración y la del jerk. Identifique cada curva y explique los motivos de su elección.

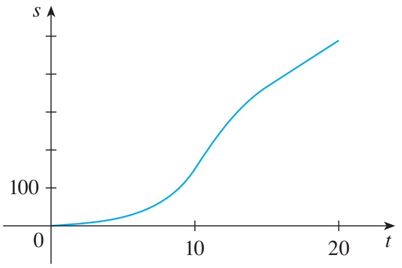


47-48 Utilice la definición de derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Después, grafique f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son razonables.

47. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **48.** $f(x) = x^3 - 3x$

49. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, encuentre $f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Grafique $f, f' f''$ y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

50. a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuál es la aceleración en $t = 10$ segundos?



b) Utilice la curva de aceleración del inciso a) para estimar el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

51. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
a) Si $a \neq 0$, utilice la ecuación 2.7.5 para hallar $f'(a)$.
b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0). (*Recuerde:* la forma de la función de f. Véase la figura 13 de la sección 1.2.)

52. a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0).
d) Ilustre el inciso c) graficando $y = x^{2/3}$.

53. ¿Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en $x = 6$. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

54. ¿Dónde no es derivable la función entero mayor $f(x) = [\![x]\!]$? Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

55. a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x\,|x|$.
b) ¿Para qué valores de x es f derivable?
c) Encuentre una fórmula para f'.

56. Las **derivadas por la izquierda** y **por la derecha** de f en $x = a$ están definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen. En tal caso, $f'(a)$ existe si y sólo si estas derivadas laterales existen y son iguales.
a) Halle $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

b) Dibuje la grafica de f
c) ¿Dónde es discontinua f?
d) ¿Dónde f no es derivable?

57. Recuerde que a una función f se le denomina *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio, e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados
a) La derivada de una función par es una función impar.
b) La derivada de una función impar es una función par.

58. Cuando abre el grifo del agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
a) Trace una posible gráfica de T como función del tiempo transcurrido desde que abrió el grifo.
b) Describa cómo varía la razón de cambio de T respecto a t, conforme ésta aumenta.
c) Dibuje la derivada de T.

59. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ forma con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ con una aproximación al grado más cercano.

2 Repaso

Verificación de conceptos

1. Explique qué significa cada una de las siguientes afirmaciones e ilustre mediante un esbozo.

a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con gráficas.

3. Enuncie las siguientes leyes de los límites.
a) Ley de la suma b) Ley de la diferencia
c) Ley del múltiplo constante d) Ley del producto
e) Ley del cociente f) Ley de la potencia
g) Ley de la raíz

4. ¿Qué establece el teorema de la compresión?

5. a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
   b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuál de las curvas siguientes tiene asíntotas verticales? ¿Cuál tiene asíntotas horizontales?
   (a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$
   (c) $y = \tan x$ (d) $y = \tan^{-1} x$
   (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
   (g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. a) ¿Qué significa que f sea continua en $x = a$?
   b) ¿Qué significa que f sea continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de tal función?

8. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?

9. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

10. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo puede interpretar esta velocidad en términos de la grafica de f?

11. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.
   a) La razón promedio de cambio de y respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.
   b) La razón de cambio instantáneo de y respecto a x en $x = x_1$.

12. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

13. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

14. a) ¿Qué significa que f sea derivable en $x = a$?
   b) ¿Cuál es la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función?
   c) Trace la gráfica de una función que sea continua, pero no derivable en $a = 2$.

15. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con gráficas.

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. $\lim_{x \to 4} \left(\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{8}{x-4} \right) = \lim_{x \to 4} \dfrac{2x}{x-4} - \lim_{x \to 4} \dfrac{8}{x-4}$

2. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 5x - 6} = \dfrac{\lim_{x \to 1} (x^2 + 6x - 7)}{\lim_{x \to 1} (x^2 + 5x - 6)}$

3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 3}{x^2 + 2x - 4} = \dfrac{\lim_{x \to 1} (x - 3)}{\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x - 4)}$

4. Si $\lim_{x \to 5} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to 5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

5. Si $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to 5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

6. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ no existe.

7. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, pero $\lim_{x \to a} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ no existe.

8. Si $\lim_{x \to 6} [f(x)\,g(x)]$ existe, entonces el límite debe ser $f(6)\,g(6)$.

9. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x \to b} p(x) = p(b)$.

10. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)] = 0$.

11. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

12. Si f tiene dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

13. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

14. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

15. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x \to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

16. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

17. Sea f una función tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = 6$. Entonces existe un número δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

18. Si $f(x) > 1$ para toda x y $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x \to 0} f(x) > 1$.

19. Si f es continua en $x = a$, entonces f es derivable en $x = a$.

20. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x \to r} f(x) = f(r)$.

21. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx} \right)^2$

22. La ecuación $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 2)$.

23. Si f es continua en $x = a$, también lo es $|f|$.

24. Si $|f|$ es continua en $x = a$, también lo es $|f|$.

Ejercicios

1. Se da la gráfica de f.

a) Encuentre cada uno de los siguientes límites o explique por qué no existen.

i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \to -3} f(x)$ iv) $\lim_{x \to 4} f(x)$

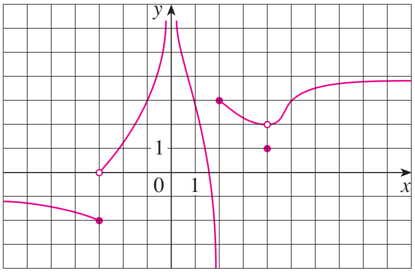
v) $\lim_{x \to 0} f(x)$ vi) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

vii) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ viii) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

b) Establezca las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

c) Establezca las ecuaciones de las asíntotas verticales.

d) ¿En qué números f es discontinua? Explique.



2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$,

f es continua por la derecha en $x = 3$

3-20 Encuentre cada uno de los siguientes límites

3. $\lim_{x \to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(h - 1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r \to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r - 9)^4}$

10. $\lim_{v \to 4^+} \dfrac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{u \to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 + 5u^2 - 6u}$

12. $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - x}{x^3 - 3x^2}$

13. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

14. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

15. $\lim_{x \to \pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1 - 2x^2 - x^4}{5 + x - 3x^4}$

17. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x\right)$

18. $\lim_{x \to \infty} e^{x - x^2}$

19. $\lim_{x \to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)$

21-22 Utilice las gráficas para evidenciar las asíntotas de la curva. Después, pruebe que realmente son evidencias.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$

23. Si $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encuentre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

24. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25-28 Demuestre cada uno de los siguientes resultados, utilizando la definición precisa de límite.

25. $\lim_{x \to 2} (14 - 5x) = 4$

26. $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x) = -2$

28. $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x - 4}} = \infty$

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ (x - 3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Evalúe cada límite, si éste existe

i) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ iii) $\lim_{x \to 0} f(x)$

iv) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ v) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ vi) $\lim_{x \to 3} f(x)$

b) ¿Dónde es discontinua f?

c) Trace la gráfica de f

30. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - x & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

a) Para cada uno de los números 2, 3 y 4, descubra si g es continua por la izquierda, por la derecha o continua en el número.

b) Bosqueje la gráfica de g.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

31-32 Demuestre que cada una de las siguientes funciones es continua en su dominio. Establézcalo.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

33-34 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

33. $x^5 - x^3 + 3x - 5 = 0, \quad (1, 2)$

34. $\cos\sqrt{x} = e^x - 2, \quad (0, 1)$

35. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 9 - 2x^2$ en el punto (2, 1).
b) Determine la ecuación de esta tangente.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

y los puntos de abscisas 0 y -1.

37. El desplazamiento en metros de un objeto que se mueve en línea recta está dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, donde t se mide en segundos.
a) Encuentre la velocidad promedio en los siguientes periodos de tiempo:
i) $[1, 3]$ ii) $[1, 2]$
iii) $[1, 1.5]$ iv) $[1, 1.1]$
b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

38. Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V en pulgadas cúbicas.
a) Encuentre la razón de cambio promedio de P cuando V se incrementa de 200 a 250 pulg³.
b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón de cambio instantáneo de V respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de ésta.

39. a) Utilice la definición de derivada para hallar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$.
b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto (2, 4).
c) Ilustre el inciso b) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

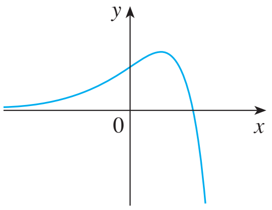
40. Encuentre una función f y un número $x = a$ tales que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

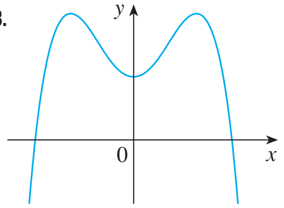
41. El costo total de pagar un préstamo para estudiante a una tasa de interés de r% por año es $C = f(r)$.
a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b) ¿Que significa la afirmación $f'(10) = 1\,200$?
c) ¿$f'(r)$ siempre es positiva o cambia de signo?

42-44 Trace o copie la gráfica de la función dada. Luego dibuje directamente debajo su derivada.

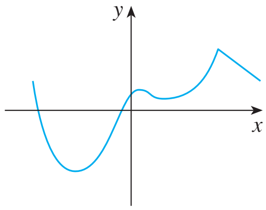
42.



43.



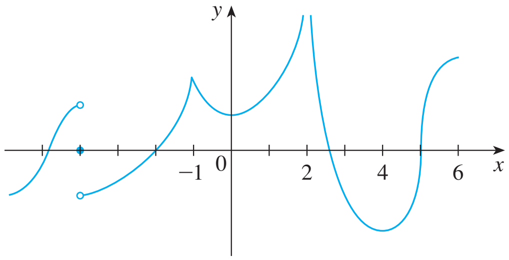
44.



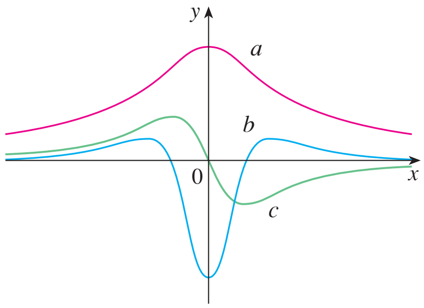
45. a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, utilice la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
b) Encuentre los dominios de f y f'.
c) Grafique f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso a) es razonable.

46. a) Encuentre las asíntotas de la grafica de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ y utilícelas para dibujar la gráfica.
b) Utilice la grafica del inciso a) para graficar f'.
c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
d) Utilice un dispositivo graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su dibujo del inciso b).

47. Se muestra la grafica de f. Enuncie, con razones, los números x en que f no es derivable.



48. La figura muestra la grafica de f, f' y f''. Identifique cada curva y explique su elección.

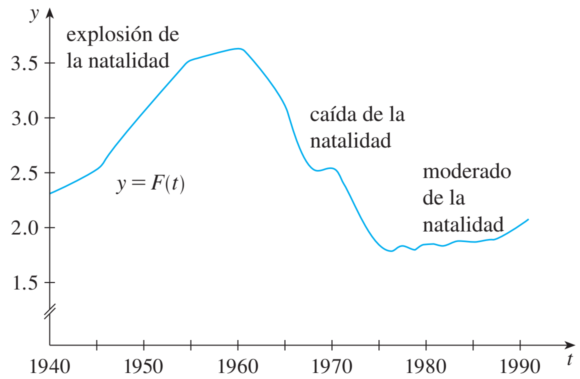


49. Sea $C(t)$ el valor total de certificados bancarios en circulación en el instante t. La tabla de valores de esta función de 1980 a 2000, en miles de millones de dólares. Estime e interprete el valor de $C'(1990)$.

t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

50. La *tasa de fertilidad total*, en el tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos de cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en EU, se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 1990.

a) Estime los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.
b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?
c) ¿Puede sugerir razones para los valores de estas derivadas?



51. Suponga que $|f(x)| \leq g(x)$ donde $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Encuentre $\lim_{x\to a} f(x)$.

52. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

a) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?
b) ¿En qué números es discontinua la función f?

Problemas adicionales

En el análisis de los principios para la resolución de problemas, se consideró la estrategia para resolver problemas llamada Introduzca algo extra (véase la página 75). En el ejemplo siguiente se muestra cómo este principio resulta útil a veces cuando evalúa límites. La idea es cambiar la variable —introducir una nueva variable relacionada con la original— de tal manera que el problema se haga más sencillo. Más adelante, en la sección 5.5, utilizará más esta idea general.

EJEMPLO 1 Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, donde $c \neq 0$ es una constante.

SOLUCIÓN Según se ve, este límite parece desafiante. En la sección 2.3 evaluamos varios límites en los que tanto el numerador como el denominador tendieron a 0. Allí, la estrategia fue realizar cierto tipo de manipulación algebraica que condujo a una cancelación simplificadora, pero en este caso no está claro qué clase de álgebra se necesita.

Por tanto, se introduce una nueva variable t mediante la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

También necesitamos expresar x en términos de t, de modo que resuelva esta ecuación

$$t^3 = 1 + cx \qquad x = \frac{t^3 - 1}{c} \quad (\text{si } c \neq 0)$$

Observe que $x \to 0$ equivalente a $t \to 1$. Esto permite convertir el límite dado en uno que involucra la variable t:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} \end{aligned}$$

El cambio de variable permitió reemplazar un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya ha visto. Si factoriza el denominador como un diferencia de cubos, obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3} \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable tuvimos que excluir el caso en que $c = 0$: pero si $c = 5$, la función es 0 para toda $x \neq 0$, así, el límite es 0. En consecuencia, en todos los casos, el límite es $c/3$.

Los problemas siguientes sirven para poner a prueba y desafiar sus habilidades para resolver problemas. Algunos requieren una cantidad considerable de tiempo para pensar, de modo que no se desaliente si no los puede resolver de inmediato. Si tiene alguna dificultad, quizá le sirva consultar en la página 75 el análisis de los principios para la resolución de problemas.

Problemas

1. Evalúe $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encuentre números a y b tales que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

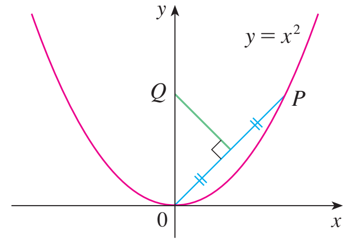


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

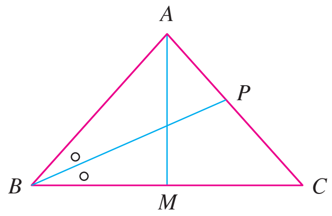


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

3. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

4. En la figura se muestra un punto P sobre la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde la bisectriz de OP interseca al eje y. Conforme P se aproxima al origen, a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

5. Evalúe los siguientes límites, si éstos existen, donde $[\![x]\!]$ denota la función entero mayor.

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{[\![x]\!]}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} x\,[\![1/x]\!]$

6. Dibuje la región en el plano definida por cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c; éste permanece fijo.)

a) Dibuje la gráfica de una función continua con dominio $[0, 1]$ cuyo rango también se encuentre en $[0, 1]$. Localice un punto fijo de f.

b) Intente graficar una función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ que *no* tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?

c) Utilice el teorema de valor intermedio para comprobar que cualquier función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ debe tener un punto fijo.

9. Si $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encuentre $\lim_{x \to a} [f(x)\,g(x)]$.

10. a) En la figura se muestra un triángulo isósceles ABC con $\angle B = \angle C$. La bisectriz del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija, pero que la altura $|AM|$ del triángulo tiende a 0, de modo que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué sucede con P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

b) Intente trazar la trayectoria recorrida por P durante este proceso. A continuación, halle la ecuación de esta curva y úsela para dibujarla.

11. a) Si parte de 0° de latitud y avanza en dirección Oeste, puede denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo dado. Suponga que T es una función continua de x, y demuestre que, en cualquier tiempo fijo, existen por lo menos dos puntos opuestos sobre el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.

b) ¿E1 resultado del inciso a) se cumple para puntos que estén sobre cualquier circunferencia sobre la superficie de la Tierra?

c) ¿El resultado del inciso a) se cumple para la presión barométrica y para la altitud arriba del nivel del mar?

12. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$, utilice la definición de derivada para demostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponga que f es una función que satisface

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos los números reales x y y. Suponga también que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

a) Encuentre $f(0)$. b) Encuentre $f'(0)$. c) Encuentre $f'(x)$.

14. Suponga que f es una función con la propiedad de que $|f(x)| \leqslant x^2$ para toda x. Muestre que $f(0) = 0$. Enseguida, muestre que $f'(0) = 0$.

3 Reglas de derivación

Para que un paseo en montaña rusa sea suave, los tramos rectos de la pista deben estar conectados a los segmentos curvos de manera que no se produzcan cambios bruscos de dirección. En el proyecto de la página 184, veremos la forma de diseñar el primer ascenso y caída de una nueva montaña rusa para lograr esta suavidad en el paseo.

© Brett Mulcahy / Shutterstock

Hasta aquí hemos visto cómo interpretar las derivadas en términos de pendientes y razones de cambio, y hemos estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También hemos aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y utilizado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso si siempre tuviera que aplicar la definición, de modo que en este capítulo se desarrollan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente esa definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad derivadas de funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. A continuación usaremos estas reglas para resolver problemas en que intervienen razones de cambio y la aproximación de funciones.

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, potencia, polinomiales y exponenciales.

Empezamos por la más sencilla de todas las funciones: la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

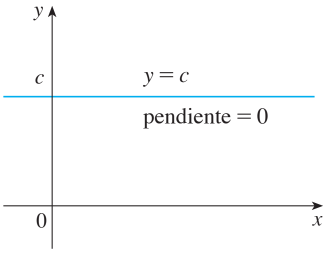


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$; por tanto, $f'(x) = 0$.

En la notación de Leibniz, esta regla se expresa como sigue.

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Función potencia

Enseguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (véase la figura 2). De modo que

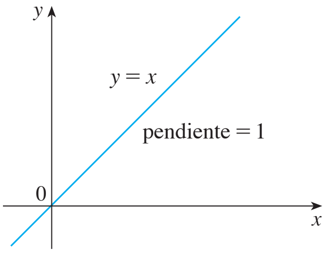


FIGURA 2
La grafica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$; por tanto, $f'(x) = 1$.

1 $$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

(También puede demostrar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya hemos investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 19 y 20) encontramos que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, encontramos la derivada de $f(x) = x^4$ como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Así,

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones [1], [2] y [3], se observa un patrón. Parece razonable presuponer que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto.

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN La fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

puede verificarse simplemente multiplicando el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, podemos utilizar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

El teorema del binomio se da en la página de referencia 1.

Al hallar la derivada de x^4, tuvimos que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, necesitamos desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, utilizamos el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por tanto, tienden a 0.

En el ejemplo 1 se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.

c) Si $y = t^4$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. d) Si $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

¿Qué puede decirse acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 61 se pide al lector que verifique, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que podemos escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 62c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 3 de la sección 2.8 encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6 se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

En la figura 3 se muestra la función y el ejemplo 2b) y su derivada y'. Advierta que y no es derivable en 0 (y' no está definida allí). Observe que y' es positiva cuando y crece, y negativa cuando y decrece.

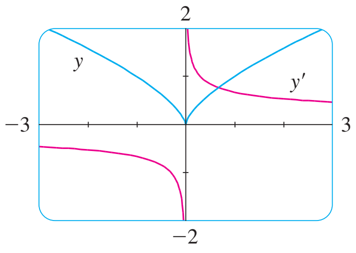


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EJEMPLO 2 Derive:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.

a) Dado que $f(x) = x^{-2}$, utilizamos la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

La regla de la potencia permite hallar las rectas tangentes sin hacer uso de la definición de derivada. Además, permite encontrar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta a través de P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de la óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal a un lente.)

V EJEMPLO 3 Halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto (1, 1). Ilustre dibujando la curva y estas rectas.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

De este modo, la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

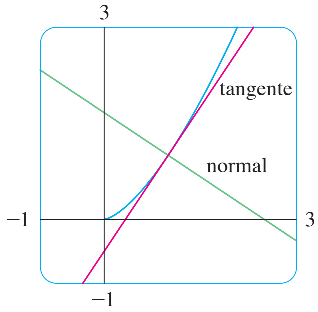


FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente de tal manera que su pendiente es el recíproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$. En estos términos, una ecuación de la recta normal es

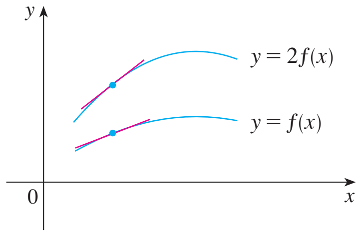
$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y las rectas tangente y normal.

Nuevas derivadas a partir de anteriores

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustracción o multiplicación por una constante, sus derivadas pueden calcularse en términos de la derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la formula siguiente se afirma que la *derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función*.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 3 de los límites)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

La siguiente regla señala que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas*.

Si se utiliza la notación con apóstrofos, puede escribir la regla de la suma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

La regla de la suma puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces, se obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicando la regla de la suma y la del múltiplo constante, se obtiene la siguiente fórmula.

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

Las reglas de múltiplo constante, la suma y la diferencia pueden combinarse con la regla de la potencia para derivar cualquier función polinomial, como se muestra en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 5

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\
&\qquad = \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\
&\qquad = 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\
&\qquad = 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6
\end{aligned}
$$

V EJEMPLO 6 Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4) \\
&= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)
\end{aligned}
$$

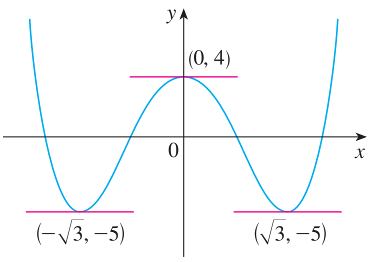


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus rectas tangentes horizontales

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la curva dada tiene rectas tangentes horizontales cuando $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son (0, 4), $(\sqrt{3}, -5)$ y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.)

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Hallar la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14\,\text{cm/s}^2$.

Funciones exponenciales

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que puede llevarlo delante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, entonces es derivable para cualquier x; así que

4 $$f'(x) = f'(0)a^x$$

En esta ecuación se afirma que *la razón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la función misma*. (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla que aparece a la izquierda, se da una evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores tienen una aproximación correcta a cuatro posiciones decimales.) Parece que los límites existen y

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, puede demostrarse que estos límites existen y que son correctos hasta seis cifras decimales, los valores son

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4

5 $$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las elecciones posibles para la base a de la ecuación 4, se tiene la formula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número a entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es costumbre denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presento e en la sección 1.5.) Apoyado en esto, se tiene la siguiente definición

En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante podremos demostrar que e con cinco dígitos (o posiciones) decimales es

$$e \approx 2.71828$$

Definición del número e

$$e \text{ es el número tal que } \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que, de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en (0, 1) tiene pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse las figuras 6 y 7.)

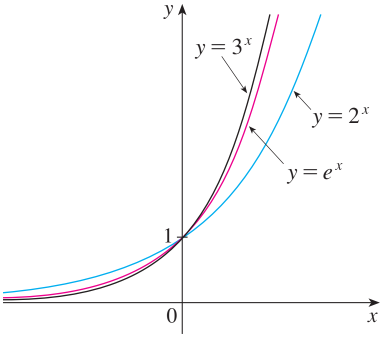


FIGURA 6

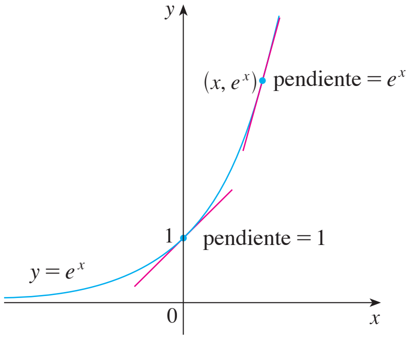


FIGURA 7

Si hacemos $a = e$ y, por tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

TEC Visual 3.1 utiliza el comportamiento de una pendiente para ilustrar esta fórmula.

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

De aquí se ve que la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

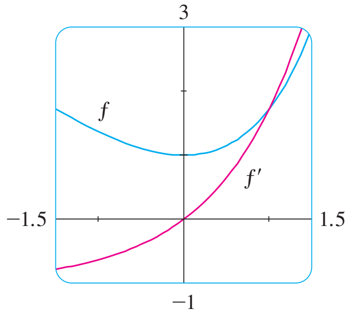


FIGURA 8

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', así que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una recta tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Asimismo, observe que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente.

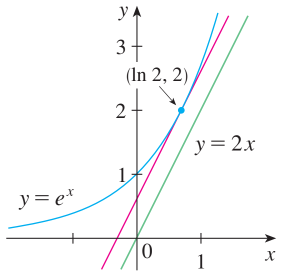


FIGURA 9

EJEMPLO 9 ¿En qué punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Puesto que $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, se tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.)

3.1 Ejercicios

1. a) ¿Cómo se define el número e?
b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2.7^h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2.8^h - 1}{h}$$

correctos hasta dos dígitos decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. a) Dibuje a mano la función $f(x) = e^x$, poniendo particular atención a la forma en que la gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto?
b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
c) ¿Cuál de las dos funciones en el inciso b) crece más rápidamente cuando x es muy grande?

3-32 Derive cada una de las siguientes funciones.

3. $f(x) = 2^{40}$

4. $f(x) = e^5$

5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$

6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = 1.4t^5 - 2.5t^2 + 6.7$

9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $g(t) = 2t^{-3/4}$

12. $B(y) = cy^{-6}$

13. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

14. $y = x^{5/3} - x^{2/3}$

15. $R(a) = (3a + 1)^2$

16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$

18. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $S(R) = 4\pi R^2$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

25. $j(x) = x^{2.4} + e^{2.4}$

26. $k(r) = e^r + r^e$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33-34 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

33. $y = \sqrt[4]{x}, \quad (1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x, \quad (1, 2)$

35-36 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x, \quad (0, 2)$

36. $y = x^2 - x^4, \quad (1, 0)$

37-38 Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto dado, a cada una de las siguientes curvas. Ilustre graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

37. $y = 3x^2 - x^3, \quad (1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}, \quad (1, 0)$

39-40 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y utilícelas para explicar por qué su respuesta es razonable.

39. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

40. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

41. a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para graficar la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ y $g(x) = x^e$ en el rectángulo de vista $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
b) Con la misma gráfica del inciso a) estime las pendientes y elabore un esbozo a mano de la gráfica de f'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)
c) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión para graficar f' con una calculadora graficadora. Compare con su esbozo del inciso b).

42. a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para graficar la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en el rectángulo de vista $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
b) Utilizando la gráfica del inciso a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la grafica de g'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)
c) Calcule $g'(x)$ y utilice esta expresión, con un dispositivo graficador, para dibujar g'. Compare con su boceto del inciso b).

43-44 Encuentre la primera y segunda derivada de cada una de las siguientes funciones.

43. $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$

44. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

45-46 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones. Verifique para ver si sus respuestas son razonables, comparando las gráficas de f, f' y f''.

45. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

46. $f(x) = e^x - x^3$

47. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Encuentre
a) la velocidad y la aceleración como funciones de t,
b) la aceleración después de 2 s y
c) la aceleración cuando la velocidad es cero.

48. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, donde s está en metros y t en segundos.
a) Encuentre la velocidad y la aceleración como funciones de t.
b) Encuentre la aceleración después de 1 s.
c) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración, en la misma pantalla.

49. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.
a) Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa $0.106\,m^3$ a 25 °C es 50 kPa. Exprese V como una función de P.
b) Calcule dV/dP cuando $P = 50$ kPa. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades?

50. Los neumáticos de automóvil deban ser inflados correctamente porque un alto inflado o un bajo inflado puede causar desgaste prematuro. Los datos de la tabla muestran la vida L (en miles de millas) para un determinado tipo de neumático a diversas presiones P (en lb/pulg²).

P	26	28	31	35	38	42	45
L	50	66	78	81	74	70	59

a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar la vida del neumático con una función cuadrática de la presión.
b) Utilice el modelo para estimar dL/dP cuando $P = 30$ y cuando $P = 40$. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades? ¿Cuál es el significado de los signos de las derivadas?

51. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la recta tangente es horizontal.

52. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = e^x - 2x$ tiene una recta tangente horizontal?

53. Demuestre que la curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ no tiene una recta tangente cuya pendiente es 2.

54. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la recta $y = 1 + 3x$.

55. Encuentre las ecuaciones de ambas rectas tangentes a la curva $y = 1 + x^3$ y paralela a la recta $12x - y = 1$.

56. ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$? Ilustre graficando la curva de ambas rectas.

57. Encuentre la ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que es paralela a la recta $x - 3y = 5$.

58. ¿Dónde la recta normal a la parábola $y = x - x^2$ en el punto (1, 0) interseca la parábola por segunda vez? Ilustre con un esbozo la gráfica.

59. Dibuje un diagrama que muestre que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersectan la parábola.

60. a) Encuentre ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
b) Demuestre que no hay una recta que pasa por el punto (2, 7) que es tangente a la parábola. A continuación, dibuje un diagrama para ver por qué.

61. Utilice la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

62. Encuentre la n-ésima derivada de cada una de las siguientes funciones calculando algunas derivadas y observando el patrón de recurrencia.
a) $f(x) = x^n$ b) $f(x) = 1/x$

63. Encuentre una polinomial P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2$.

64. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ es una **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida y y sus derivadas representadas por y' y y''. Encuentre constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación diferencial. (Las ecuaciones diferenciales serán estudiadas en detalle en el capítulo 9.)

65. Encuentre una ecuación cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene rectas tangentes horizontales en los puntos $(-2, 6)$ y (2, 0).

66. Encuentre una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$ y que pasa por el punto (2, 15).

67. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

¿Es f derivable en $x = 1$? Trace las gráficas de f y f'.

68. ¿En qué números es derivable la siguiente función g?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

69. a) ¿Para qué valores de x la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable? Encuentre una fórmula para f'.
b) Esboce las gráficas de f y f'.

70. ¿Dónde es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Proporcione la función para h' y trace las gráficas de h y h'.

71. Encuentre la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya recta tangente en (1, 1) tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

72. Supongamos que la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene una recta tangente cuando $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una recta tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 - 3x$. Encuentre los valores de a, b, c y d.

73. ¿Para qué valores de a y b la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

74. Encuentre el valor de c tal que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$

75. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre los valores de m y b que hacen que f sea derivable para toda x.

76. Se dibuja una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto p.
a) Demuestre que el punto medio del segmento de recta cortado de esta recta tangente por los ejes de coordenadas es P.
b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas siempre tiene la misma área, no importa dónde se encuentre P sobre la hipérbola.

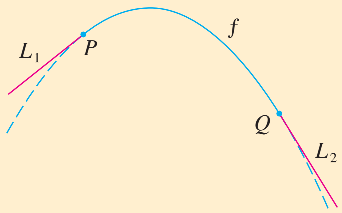
77. Evalúe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

78. Dibuje un diagrama que muestre dos rectas perpendiculares que se intersecan en el eje y y que son ambas tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Donde se intersecan estas rectas?

79. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas rectas que pasan por el punto $(0, c)$ son rectas normales a la parábola $y = x^2$? ¿Qué pasa si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Trace las parábolas $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Piensa que existe una recta que es tangente a ambas curvas? Si es así, encuentre su ecuación. Si no es así, ¿por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA



© Flashon Studio / Shutterstock

Suponga que se le solicita que diseñe el primer ascenso y descenso de una nueva montaña rusa. Después de estudiar fotografías de sus montañas rusas predilectas, decide hacer la pendiente de ascenso 0.8 y la de descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ mediante parte de una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que el trayecto sea uniforme, no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo que desea que los segmentos de recta L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. (Véase la figura.) Para simplificar las ecuaciones, decide situar el origen en P.

1. a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en a, b y c que aseguren que el trayecto sea suave en los puntos de transición.
b) Resuelva las ecuaciones del inciso a) para a, b y c para hallar una fórmula para $f(x)$.
c) Dibuje L_1, f y L_2 para verificar gráficamente que las transiciones sean suaves.
d) Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

2. La solución del problema 1 puede *parecer* suave, pero es posible que no *sienta* lo suave debido a que la pieza definida como función [consistente en $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 100$; y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente, usted decide mejorar su diseño utilizando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ únicamente en el intervalo $10 \leqslant x \leqslant 90$ y conectarlo con las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 10$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 90 < x \leqslant 100$$

a) Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus dos primeras derivadas coincidan en los puntos de transición.
SAC b) Resuelva las ecuaciones del inciso a) con un sistema algebraico computarizado para encontrar las fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.
c) Dibuje L_1, g, q, h y L_2 y compárelos con las gráficas del problema 1 inciso c).

Se requiere calculadora graficadora o computadora

SAC Se requiere un sistema algebraico computarizado

3.2 Reglas del producto y el cociente

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría tener la tentación de suponer —como Leibniz lo hizo hace tres siglos— que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por tanto, la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Así que, $(fg)' \neq f'g'$. La formula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

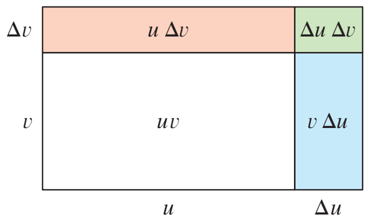


FIGURA 1
Geometría de la regla del producto

Antes de enunciar la regla del producto, vea como podría descubrirla. Empezamos suponiendo que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones positivas derivables. Entonces puede interpretarse el producto uv como el área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, entonces los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, puede interpretarse como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

1
$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \\ &= \text{la suma de las tres áreas sombreadas}\end{aligned}$$

Si dividimos entre Δx, se obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivada puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$, obtenemos la derivada de uv:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \\ &= u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \\ &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

2
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ puesto que f es derivable y, por tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observe que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) De modo que ha probado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones derivables u y v.

En notación con apóstrofos:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En palabras, la regla del producto expresa que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función*.

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 1 y su derivada f'. Advierta que $f'(x)$ es positiva cuando f es creciente y negativa cuando f es decreciente.

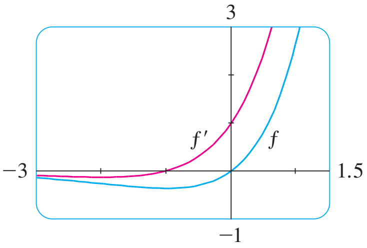


FIGURA 2

EJEMPLO 1

a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.
b) Halle la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

SOLUCIÓN

a) Por la regla del producto se tiene que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x)$$
$$= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$
$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x + 1)e^x$$

b) Aplicando a regla del producto una segunda vez, se obtiene

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x + 1)e^x]$$
$$= (x + 1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x + 1)$$
$$= (x + 1)e^x + e^x \cdot 1 = (x + 2)e^x$$

Las siguientes aplicaciones de la regla del producto dan

$$f'''(x) = (x + 3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^x$$

De hecho, cada derivada sucesiva agrega otro término e^x, así que

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$$

En el ejemplo 2, a y b son constantes. Es habitual en matemáticas el uso de las primeras letras del alfabeto, para representar las constantes y las últimas para representar variables.

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$

SOLUCIÓN 1 Utilizando la regla del producto, tenemos que

$$f'(t) = \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a + bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right)$$
$$= \sqrt{t} \cdot b + (a + bt) \cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2}$$
$$= b\sqrt{t} + \frac{a + bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a + 3bt}{2\sqrt{t}}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero utilizamos las leyes de los exponentes para reescribir $f(t)$, entonces podemos proceder directamente sin utilizar la regla del producto.

$$f(t) = a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2}$$
$$f'(t) = \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2}$$

lo cual es equivalente a la respuesta dada en la solución 1.

El ejemplo 2 muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones antes de derivar que utilizar directamente la regla del producto. En el ejemplo 1, sin embargo, la regla del producto es sólo un posible método.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Aplicando la regla del producto, tenemos que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$

$$= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x)\cdot \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

Así que

$$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \frac{2}{2\cdot 2} = 6.5$$

Regla del cociente

Encontramos una regla para derivar el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ en gran parte de la misma manera que hemos encontrado la regla del producto. Si x, u y v se incrementan por cantidades Δx, Δu y Δv, entonces el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

por tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta v \to 0$, porque $v = g(x)$ es derivable y, por consiguiente, continua. Así, al aplicar las leyes de los límites, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}(v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

En notación con apóstrofos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En palabras: en la regla del cociente se expresa que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador*.

La regla del cociente y las otras formulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Podemos utilizar un dispositivo de graficación para verificar que la respuesta al ejemplo 4 es verosímil. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función del ejemplo 4 y su derivada. Note que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

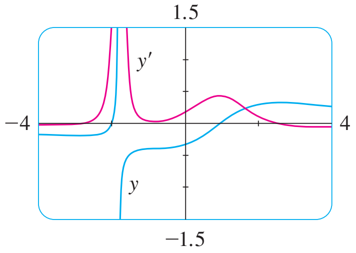


FIGURA 3

V EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $\left(1, \tfrac{1}{2}e\right)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

De modo que la pendiente de la recta tangente en $\left(1, \tfrac{1}{2}e\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $\left(1, \tfrac{1}{2}e\right)$ es horizontal, y su ecuación es $y = \tfrac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Advierta que la función es creciente y cruza su recta tangente en $\left(1, \tfrac{1}{2}e\right)$.]

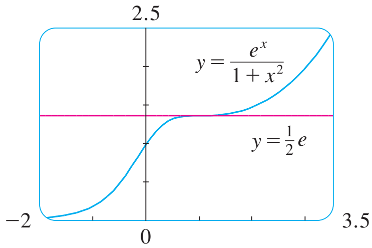


FIGURA 4

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil reescribir un cociente en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente, es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A continuación se resumen las fórmulas de derivación que ha aprendido hasta el momento.

Tabla de fórmulas de derivación

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 Ejercicios

1. Encuentre la derivada de $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

en dos maneras diferentes: utilizando la regla del cociente y simplificando primero. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3-26 Derive cada una de las siguientes funciones.

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{x}{e^x}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

7. $g(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 - 4x}$

8. $G(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$

9. $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = e^p(p + p\sqrt{p})$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27-30 Halle $f'(x)$ y $f''(x)$ de cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = x^4 e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

31-32 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

31. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$, $(1, 0)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33-34 Halle las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a cada una de las curvas dadas en el punto que se especifica.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $(1, 1)$

35. a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se llama **bruja de María Agnesi**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
b) Ilustre el inciso a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

36. a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

37. a) Si $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encuentre $f'(x)$.
b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

38. a) Si $f(x) = e^x/(2x^2 + x + 1)$, halle $f'(x)$.
b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las graficas de f y f'.

Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

39. a) Si $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, halle $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique si sus respuestas en el inciso a) son razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''.

40. a) Si $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, halle $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique para comprobar que sus respuestas en el inciso a) son admisibles al comparar las gráficas de f, f' y f''.

41. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, halle $f''(1)$.

42. Si $g(x) = x/e^x$, halle $g^{(n)}(x)$.

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes

a) $(fg)'(5)$ b) $(f/g)'(5)$ c) $(g/f)'(5)$

44. Suponga que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$.

a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ b) $h(x) = f(x)g(x)$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

45. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

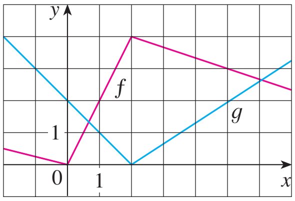
46. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

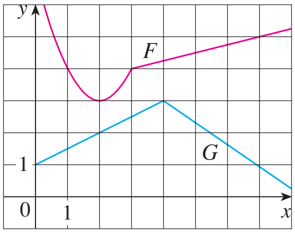
47. Si $g(x) = xf(x)$, donde $f(3) = 4$ y $f'(3) = -2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto donde $x = 3$.

48. Si $f(2) = 10$ y $f'(x) = x^2 f(x)$ para toda x, encuentre $f''(2)$.

49. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.
a) Encuentre $u'(1)$. b) Encuentre $v'(5)$.



50. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran
a) Encuentre $P'(2)$. b) Encuentre $Q'(7)$.



51. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = xg(x)$ b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

52. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = x^2 f(x)$ b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

54. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

55. Encuentre $R'(0)$, donde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Sugerencia: en vez de encontrar primero $R'(x)$, sea $f(x)$ el numerador y $g(x)$ el denominador de $R(x)$ y calcule $R'(0)$ de $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ y $g'(0)$.

56. Utilice el método del ejercicio 55 para calcular $Q'(0)$, donde

$$Q(x) = \frac{1 + x + x^2 + xe^x}{1 - x + x^2 - xe^x}$$

57. En este ejercicio, estime la proporción a la que se está creciendo el ingreso personal total en el área metropolitana de Richmond-Petersburg, Virginia. En 1999, la población de esta área era 961 400 y la población aumentaba en alrededor de 9 200 personas al año. El ingreso anual promedio era \$30 593 per cápita, y este promedio se incrementaba en cerca de \$1400 al año (ligeramente por arriba del promedio nacional de alrededor de \$1225 al año). Use la regla del producto y estas cifras para estimar la proporción en la que estaba aumentando el ingreso personal total en el área de Richmond-Petersburg en 1999. Explique el significado de cada término en la regla del producto.

58. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) que se vende es función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que $q = f(p)$. Entonces, el ingreso total que se percibe con el precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.
a) ¿Qué significa afirmar que $f(20) = 10\,000$ y $f'(20) = -350$?
b) Suponiendo los valores del inciso a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

59. a) Utilice la regla del producto dos veces para probar que si f, g y h son derivables, entonces $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

b) Tomando $f = g = h$ en el inciso a), demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

c) Utilice el resultado del inciso b) para derivar $y = e^{3x}$.

60. a) Si $F(x) = f(x)g(x)$, donde f y g son derivables en todos los órdenes, demuestre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

b) Halle fórmulas similares para F''' y $F^{(4)}$.

c) Intente una fórmula para $F^{(n)}$.

61. Halle expresiones para las primeras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. ¿Observa algún patrón en estas expresiones? Intente una fórmula para $f^{(n)}(x)$ y demuéstrela por medio de inducción matemática.

62. a) Si g es derivable la **regla del recíproco** indica que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Utilice la regla del cociente para demostrar la regla del recíproco.

b) Utilice la regla del recíproco para derivar la función del ejercicio 18.

c) Utilice la regla del recíproco para comprobar que la regla de la potencia es válida para números enteros negativos; es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los números enteros positivos n.

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas

En el apéndice D se da un repaso de las funciones trigonométricas.

Antes de iniciar esta sección, quizá necesite repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante que recuerde que cuando habla de la función f definida para todos los números reales x, mediante

$$f(x) = \text{sen } x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot se cumple con una convención similar. Recuerde de la sección 2.5 que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si traza la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ y utiliza la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la recta tangente a la curva seno para trazar la grafica de f' (véase el ejercicio 14 de la sección 2.8), parece que la gráfica de esta última es la misma que la curva coseno (véase la figura 1).

TEC Visual 3.3 muestra una animación de la figura 1.

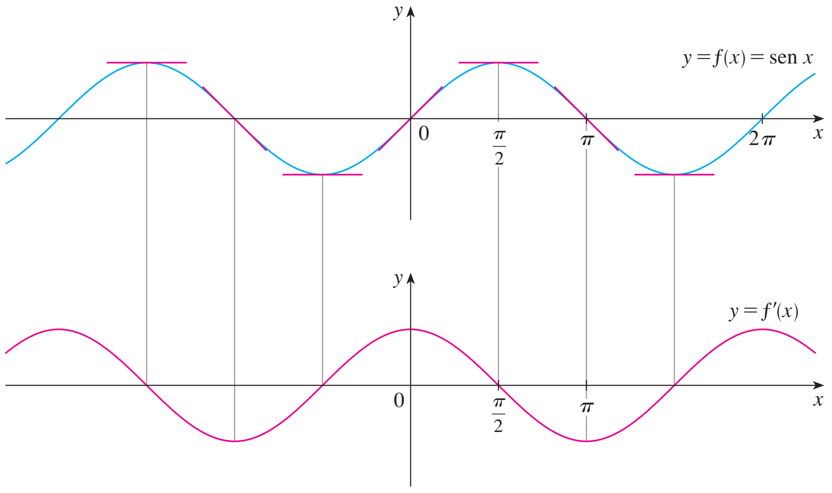


FIGURA 1

Intente confirmar la conjetura de que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada, tenemos

Hemos utilizado la fórmula de adición para el seno. Véase el apéndice D.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right]$$

1
$$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que se considera a x como constante al calcular un límite cuando $h \to 0$, se tiene

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2 se infiere que

2
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

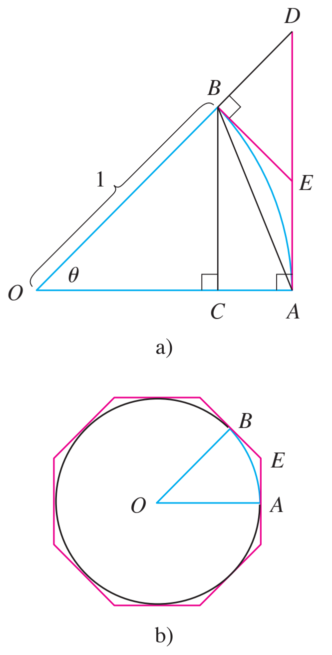


FIGURA 2

Ahora utilizaremos un argumento geométrico para demostrar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2a) se muestra un sector de circunferencia con centro en 0, ángulo central θ y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián, tenemos que arco $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Con base en el diagrama, se observa que

$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

En consecuencia $\qquad \operatorname{sen} \theta < \theta \qquad$ de manera que $\qquad \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$

Suponga que las tangentes en A y B se intersecan en E. Puede verse, con base en la figura 2b), que la circunferencia es menor que la longitud del polígono circunscrito, de modo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leqslant \tan \theta$ a partir de la definición de la longitud de arco, sin recurrir a la intuición geométrica, como se hizo aquí.)

Por tanto, tenemos que

$$\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

de modo que

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

Sabemos que $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$, así que, por el teorema de la compresión

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una función par, de modo que sus límites por la derecha y por la izquierda deben ser iguales y, por tanto,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

así que se ha demostrado la ecuación 2.

Podemos deducir el valor del límite restante en [1] como sigue:

Multiplique el numerador y el denominador por $\cos\theta + 1$ para poner la función de manera que pueda usar los límites que conoce.

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} \right) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} \\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} \right) \\
&= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} \\
&= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)}
\end{aligned}$$

3

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

Si ahora ponemos los límites [2] y [3] en [1], obtenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

Así que hemos demostrado la fórmula para la derivada de la función seno:

4

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

La figura 3 muestra las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Advierta que $y' = 0$ siempre que y tenga una recta tangente horizontal.

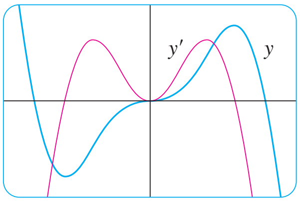


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, puede demostrarse (véase el ejercicio 20) que

5 $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

También puede derivar la función tangente utilizando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6 $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

También es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véanse los ejercicios 17-19). En la tabla siguiente aparecen todas las formulas de derivación de las funciones trigonométricas. Recuerde que son válidas sólo cuando x se mide en radianes.

Cuando memorice esta tabla, resulta útil notar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

SOLUCIÓN Por la regla del cociente se tiene que

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

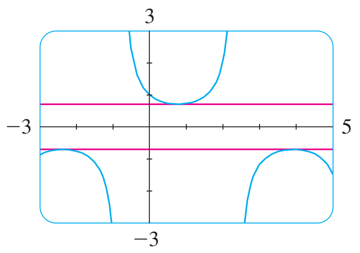


FIGURA 4
Las rectas tangentes horizontales del ejemplo 2

En la simplificación de la respuesta hemos utilizado la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Ya que $\sec x$ nunca es 0, $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4).

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, ondas, movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, pueden describirse por medio de las funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente se analiza un caso de movimiento armónico simple.

V EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm mas allá de su posición en reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

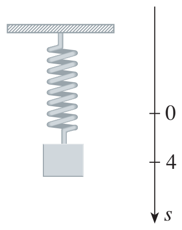


FIGURA 5

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

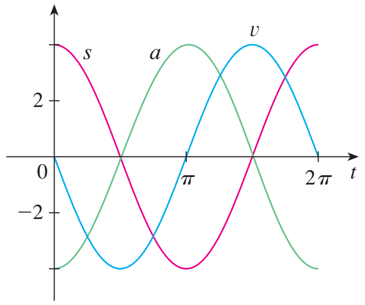


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de $\cos t$.

La rapidez es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6.

EJEMPLO 4 Hallar la vigésima séptima derivada de cos x.

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ son como sigue:

RP Busque un patrón

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Observamos que las derivadas sucesivas ocurren en un ciclo de longitud 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. En consecuencia,

$$f^{(24)} = \cos x$$

y, derivando tres veces más, se tiene

$$f^{(27)} = \operatorname{sen} x$$

La principal aplicación del límite en la ecuación 2 ha sido comprobar la fórmula de derivación de la función seno. Pero este límite también se aplica en la búsqueda de otros límites trigonométricos, como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicarla por 7 y dividirla entre 7:

Observe que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Si considera $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, conforme $x \to 0$, de este modo, mediante la ecuación 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} &= \frac{7}{4} \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right) \\ &= \frac{7}{4} \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

V **EJEMPLO 6** Calcule $\displaystyle \lim_{x \to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto el numerador como el denominador entre x:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} x \cot x &= \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to 0} \cos x}{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \\ &= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(según la continuidad del coseno y la ecuación 2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.3 Ejercicios

1-16 Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

2. $f(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x$

3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cot x$

4. $y = 2\sec x - \csc x$

5. $y = \sec\theta\,\tan\theta$

6. $g(\theta) = e^{\theta}(\tan\theta - \theta)$

7. $y = c\cos t + t^2 \operatorname{sen} t$

8. $f(t) = \dfrac{\cot t}{e^t}$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$

10. $y = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

13. $y = \dfrac{t\operatorname{sen} t}{1 + t}$

14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$

15. $f(x) = xe^x \csc x$

16. $y = x^2 \operatorname{sen} x\,\tan x$

17. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$

18. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$

19. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

20. Aplique la definición de derivada y demuestre que si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21-24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas, en el punto especificado.

21. $y = \sec x$, $(\pi/3, 2)$

22. $y = e^x\cos x$, $(0, 1)$

23. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$, $(\pi, -1)$

24. $y = x + \tan x$, (π, π)

25. a) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x\operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x + 6\cos x$ en el punto $(\pi/3, \pi + 3)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

27. a) Si $f(x) = \sec x - x$, encuentre $f'(x)$.
b) Compruebe para ver que su respuesta al inciso a) es razonable trazando las graficas de f y f' para $|x| < \pi/2$.

28. a) Si $f(x) = e^x\cos x$, obtenga $f'(x)$ y $f''(x)$.
b) Verifique que su respuesta del inciso a) sea razonable graficando f, f' y f''.

29. Si $H(\theta) = \theta\operatorname{sen}\theta$, halle $H'(\theta)$y $H''(\theta)$.

30. Si $f(t) = \csc t$, halle $f''(\pi/6)$.

31. a) Utilice la regla del cociente para derivar la función

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

b) Simplifique la expresión para $f(x)$ expresándola en términos de sen x y cos x, y enseguida halle $f'(x)$.
c) Demuestre que sus respuestas a los incisos a) y b) son equivalentes.

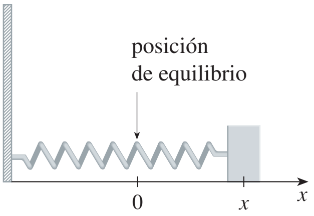
32. Suponga $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea $g(x) = f(x)\operatorname{sen} x$ y $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Halle
a) $g'(\pi/3)$ b) $h'(\pi/3)$

33-34 ¿Para qué valores de x la gráfica de cada una de las siguientes funciones tiene una recta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2\operatorname{sen} x$

34. $f(x) = e^x\cos x$

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada, en un movimiento armónico simple. (Véase la figura.) Su ecuación de movimiento es $x(t) = 8\operatorname{sen} t$, donde t está en segundos y x en centímetros.
a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
b) Encuentre la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?



36. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2\cos t + 3\operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tome la dirección positiva correspondiente hacia abajo.)
a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
b) Dibuje las funciones velocidad y aceleración.
c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
d) ¿Cuán lejos de su posición de equilibrio viaja la masa?
e) ¿Cuándo es máxima la magnitud de la velocidad?

37. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada sobre una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

38. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal, por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*.

a) Encuentre la razón de cambio de F respecto a θ.

b) ¿Cuándo es igual a 0 esta razón de cambio?

c) Si $W = 50$ lb y $\mu = 0.6$, dibuje la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de θ para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿Resulta coherente el valor con su respuesta al inciso b)?

39-48 Determine cada uno de los siguientes límites.

39. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ **40.** $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 6x}$

41. $\lim_{t \to 0} \frac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$ **42.** $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

43. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{5x^3 - 4x}$ **44.** $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x}{x^2}$

45. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$ **46.** $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ **48.** $\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

49-50 Encuentre la derivada que se muestra, mediante la búsqueda de las primeras derivadas y observando el patrón que aparece.

49. $\frac{d^{99}}{dx^{99}} (\operatorname{sen} x)$ **50.** $\frac{d^{35}}{dx^{35}} (x \operatorname{sen} x)$

51. Encuentre constantes A y B tales que la función $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

52. a) Evalúe $\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

b) Evalúe $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

c) Ilustre los incisos a) y b) graficando $y = x \operatorname{sen}(1/x)$.

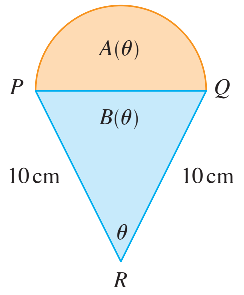
53. Derive cada una de las siguientes identidades trigonométricas para obtener una identidad nueva (o conocida) .

a) $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ b) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1 + \cot x}{\csc x}$

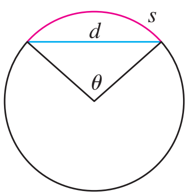
54. Un semicírculo con diámetro PQ descansa sobre un triángulo isósceles PQR para configurar una región en forma de cono para helados como el que se ilustra en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triangulo, halle

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



55. En la figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, los dos están subtendidos por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



56. Sea $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

a) Grafique f. ¿Qué tipo de discontinuidad parece tener en $x = 0$?

b) Calcule los límites por la izquierda y por la derecha en $x = 0$. ¿Confirman estos valores su respuesta al inciso a)?

3.4 Regla de la cadena

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que usted aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no le permiten calcular $F'(x)$.

Véase la sección 1.3 para un repaso de funciones compuestas.

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si hacemos $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces podemos escribir $y = F(x) = f(g(x))$; es decir, $F = f \circ g$. Sabemos cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que nos indique cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Esto parece verosímil si interpretamos las derivadas como razones de cambio. Consideremos du/dx como la razón de cambio de u respecto a x, dy/du como la razón de cambio de y respecto a u, y dy/dx como la razón de cambio de y respecto a x. Si u cambia al doble de rapidez de x y y varía tres veces más rápido que u, entonces parece razonable que y se modifique seis veces más rápido que x, y, por tanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena *Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto*

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

James Gregory

El primero en formular la regla de la cadena fue el matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien también diseñó el primer telescopio práctico. Gregory descubrió las ideas básicas del Cálculo en la misma época que Newton. Se convirtió en el primer profesor de Matemáticas en la Universidad de St. Andrews y más tarde realizó la misma actividad en la Universidad de Edimburgo. Pero un año después de aceptar ese cargo, falleció a la edad de 36 años.

COMENTARIOS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x; es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1 $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(Advierta que $\Delta u \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$ porque g es continua.)

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

El único defecto de este razonamiento es que en $\boxed{1}$ podría suceder que $\Delta u = 0$ (aun cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no podemos dividir entre 0. No obstante, este razonamiento *sugiere* por lo menos que la regla de la cadena es verdadera. Al final de esta sección se da una demostración completa de la regla de la cadena.

La regla de la cadena puede escribirse con apóstrofos

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque si dy/du y du/dx fueran cocientes, entonces podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx realmente como un cociente.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Utilizando la ecuación 2): Al principio de esta sección, expresamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tenemos

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

SOLUCIÓN 2 (Utilizando la ecuación 3): Si hacemos $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Al utilizar la fórmula 3, debemos tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y respecto a u). Por tanto, en el ejemplo 1, y puede considerarse como función de x $\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ y también como una función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{mientras que} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, trabajamos del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *derivamos la función exterior f [en la función interior g(x)] y, a continuación, multiplicamos por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\;\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{exterior}}}\;\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\\text{la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\\text{la función}\\\text{interior}}}$$

V EJEMPLO 2 Derive a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno, y la interior es la función elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\text{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado, y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{función}\\ \text{interior}}}{}^2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta puede dejarse como $2 \operatorname{sen} x \cos x$, o bien, escribirse como $\operatorname{sen} 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como fórmula del ángulo doble).

Véase la página de referencia 2 o el apéndice D.

En el ejemplo 2a), combinamos la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \operatorname{sen} u$, donde u es una función derivable de x, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Así que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas pueden combinarse con la regla de la cadena.

Hagamos explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces podemos escribir $y = f(u) = u^n$, donde $u = g(x)$. Si aplicamos la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Observe que la derivada en el ejemplo 1 pudimos calcularla tomando $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en $\boxed{4}$, se toman $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescribimos f como: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

De este modo
$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la regla de la cadena y la regla del cociente, obtenemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo debemos aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$
$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$
$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)$$
$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

En la figura 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Observe que y' es grande cuando y crece con rapidez, y $y' = 0$ cuando y tiene una recta tangente horizontal. De modo que la respuesta parece ser razonable.

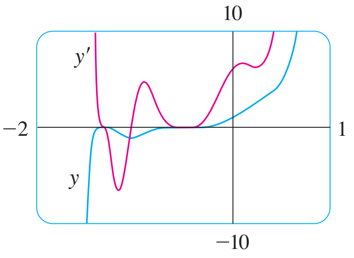


FIGURA 1

Observe que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, así que podemos factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\text{sen}\, x}$.

SOLUCIÓN En este caso la función interior es $g(x) = \text{sen}\, x$, y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por tanto, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\text{sen}\, x}\right) = e^{\text{sen}\, x}\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = e^{\text{sen}\, x}\cos x$$

Más generalmente, la regla de la cadena da:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln a)x}\right) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$$
$$= e^{(\ln a)x}\cdot \ln a = a^x \ln a$$

porque $\ln a$ es una constante. En consecuencia, tenemos la fórmula

No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5 $$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

En particular, si $a = 2$, obtenemos

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, dimos la estimación

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta 6 porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

La razón para el nombre "regla de la cadena" queda clara cuando se ve como analogía de agregar eslabones para alargar una cadena. Supongamos que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde f, g y h son funciones derivables. Entonces, para calcular la derivada de y respecto a t, utilizamos dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = \text{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x)$$

$$= \cos(\cos(\tan x))[-\text{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= -\cos(\cos(\tan x))\,\text{sen}(\tan x)\sec^2 x$$

Observe que se ha aplicado dos veces la regla de la cadena.

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es el triple de la función. De modo que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta)\\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\frac{d}{d\theta}(3\theta)\\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\end{aligned}$$

Cómo demostrar la regla de la cadena

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Según la definición de derivada, tenemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por consiguiente, si denotamos por medio de ε el cociente de diferencias y la derivada, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si definimos ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, entonces ε se convierte en función continua de Δx. De esta manera, para una función f derivable, podemos escribir

7 $$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \qquad \varepsilon \to 0 \ \text{cuando} \ \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite demostrar la regla de la cadena.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en $x = a$ y $y = f(u)$ es derivable en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x, y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, entonces podemos aplicar la ecuación 7 para escribir

8 $$\Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. De manera análoga,

9 $$\Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituimos la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtenemos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

así que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

A medida que $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 muestra que $\Delta u \to 0$. De modo que tanto $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Debido a eso

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)\,g'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$$

Esto demuestra la regla de la cadena.

3.4 Ejercicios

1-6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx de cada una de las siguientes funciones.

1. $y = \sqrt[3]{1 + 4x}$ **2.** $y = (2x^3 + 5)^4$

3. $y = \tan \pi x$ **4.** $y = \operatorname{sen}(\cot x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \sqrt{2 - e^x}$

7-46 Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$ **8.** $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$ **10.** $f(x) = \dfrac{1}{(1 + \sec x)^2}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$ **12.** $f(t) = \operatorname{sen}(e^t) + e^{\operatorname{sen} t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$ **14.** $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$ **16.** $y = e^{-2t} \cos 4t$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$ **22.** $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$ **24.** $y = 10^{1 - x^2}$

25. $y = 5^{-1/x}$ **26.** $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$ **28.** $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $F(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}$ **30.** $F(v) = \left(\dfrac{v}{v^3 + 1}\right)^6$

31. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$ **32.** $y = \sec^2(m\theta)$

33. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$ **34.** $y = x^2 e^{-1/x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$ **36.** $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$

37. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$ **38.** $y = e^{k \tan \sqrt{x}}$

39. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$ **40.** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$ **42.** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$ **44.** $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$ **46.** $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47-50 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones:

47. $y = \cos(x^2)$ **48.** $y = \cos^2 x$

49. $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ **50.** $y = e^{e^x}$

51-54 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$ **52.** $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$ **54.** $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$

55. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

56. a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ se llama *curva nariz de bala*. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 1)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

57. a) Si $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encuentre $f'(x)$.
b) Verifique que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

58. La función $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\ 2x)$, $0 \leq x \leq \pi$, surge en aplicaciones a la sintonía de frecuencia modulada (FM).
a) Utilice una gráfica de f producida por un dispositivo de graficación para trazar un boceto aproximado de la gráfica de f'.
b) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión, junto con un dispositivo graficador, para graficar f'. Compare con su boceto del inciso a).

59. Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de la función $f(x) = 2\ \text{sen}\ x + \text{sen}^2 x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

60. Determine las coordenadas x de todos los puntos de la curva $y = \text{sen}\ 2x - 2\ \text{sen}\ x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

61. Si $F(x) = f(g(x))$, donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$, halle $F'(5)$.

62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, halle $h'(1)$.

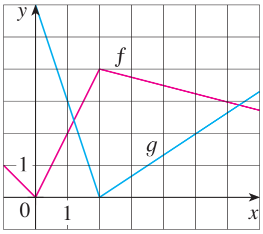
63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

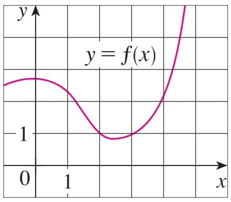
a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.
b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.
a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.
b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

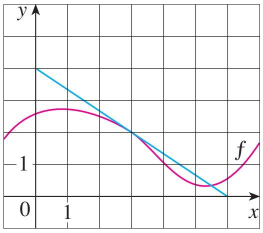
65. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran; sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. Si no existe, explique por qué.
a) $u'(1)$ b) $v'(1)$ c) $w'(1)$



66. Si f es la función cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.
a) $h'(2)$ b) $g'(2)$



67. Si $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde f es la gráfica que se muestra, evalúe $g'(3)$.



68. Suponga que f es derivable sobre $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para a) $F'(x)$ y b) $G'(x)$.

69. Suponga que f es derivable sobre $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para a) $F'(x)$ y b) $G'(x)$.

70. Sea $g(x) = e^{cx} + f(x)$ y $h(x) = e^{kx}f(x)$, donde $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$, y $f''(0) = -2$.
a) Encuentre $g'(0)$y $g''(0)$ en términos de c.
b) En términos de k, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto donde $x = 0$.

71. Si $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, encuentre $r'(1)$.

72. Si g es una función dos veces derivable y $f(x) = xg(x^2)$, halle f'' en términos de g, g' y g''.

73. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, encuentre $F'(0)$.

74. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, halle $F'(1)$.

75. Demuestre que la función $y = e^{2x}(A\cos 3x + B\ \text{sen}\ 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$.

76. ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

77. Encuentre la 50a. derivada de $y = \cos 2x$.

78. Encuentre la 1000a. derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

79. El desplazamiento de una partícula sobre una cuerda vibrante está dada por la ecuación $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\text{sen}(10\pi t)$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula después de t segundos.

80. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple*.
a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

81. Cefeida, una estrella variable, tiene una brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0, y cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de Delta

Cephei en el tiempo t, medido en días, se ha modelado mediante la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

a) Halle la razón de cambio de la brillantez después de t días.
b) Encuentre, con una aproximación de dos cifras decimales, la razón de aumento después de un día.

82. En el ejemplo 4 de la sección 1.3, obtuvimos un modelo para la duración de la luz diurna (en horas) en Filadelfia en el t-ésimo día del año

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Utilice este modelo para comparar cómo aumentan las horas de luz diurna en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

83. El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t} \operatorname{sen} 2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad después que transcurren t segundos y grafique las funciones de posición y de velocidad para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

84. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la sección 9.4 veremos que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]
a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} p(t)$.
b) Halle la rapidez de esparcimiento del rumor.
c) Grafique p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$, con t medido en horas. Utilice la gráfica para estimar cuánto tiempo transcurrirá para que 80% de la población escuche el rumor.

85. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de las derivadas dv/dt y dv/ds.

86. Se bombea aire dentro de un globo esférico para el clima. En cualquier tiempo t, el volumen del globo es $V(t)$, y su radio es $r(t)$.
a) ¿Qué representan las derivadas dV/dr y dV/dt?
b) Exprese dV/dt en términos de dr/dt.

87. El flash (unidad de destello) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se activa el obturador. Los datos siguientes describen la carga que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos).

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

a) Halle, usando una calculadora graficadora o una computadora, un modelo exponencial para la carga.
b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara de destello. Con el resultado del inciso a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2 de la sección 2.1.

88. En la tabla se da la población de estadounidenses, desde 1790 hasta 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3 929 000	1830	12 861 000
1800	5 308 000	1840	17 063 000
1810	7 240 000	1850	23 192 000
1820	9 639 000	1860	31 443 000

a) Use una calculadora graficadora o una computadora para ubicar los datos con una función exponencial. Dibuje los puntos correspondientes a los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bien ajustan?
b) Estime las tasas de crecimiento de la población en 1800 y 1850 promediando las pendientes de las rectas secantes.
c) Use el modelo exponencial del inciso a) para estimar las tasas de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso b).
d) Utilice el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38 558 000. ¿Puede explicar la discrepancia?

SAC **89.** Los sistemas algebraicos computarizados (SAC) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga; en consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.
a) Use un SAC para hallar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Después, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.
b) Utilice un SAC para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las rectas tangentes horizontales?

SAC **90.** a) Use un SAC para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.
b) ¿En dónde tiene la gráfica de f rectas tangentes horizontales?
c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso b)?

91. Mediante la regla de la cadena demuestre lo siguiente.
a) La derivada de una función par es una función impar.
b) La derivada de una función impar es una función par.

92. Utilice la regla de la cadena y la regla del producto para obtener una demostración alternativa de la regla del cociente. [*Sugerencia:* escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

93. a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

b) Plantee una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que es similar a la del inciso a).

94. Suponga que $y = f(x)$ es una curva que siempre queda arriba del eje x y nunca tiene una recta tangente horizontal, donde f es derivable para toda x. ¿Para qué valor de y la razón de cambio de y^5 respecto a x es 80 veces la razón de cambio de y respecto a x?

95. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, entonces

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da un argumento para justificar la convención de que siempre se use el radián cuando se manejen funciones trigonométricas en Cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usara el grado como medida.)

96. a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

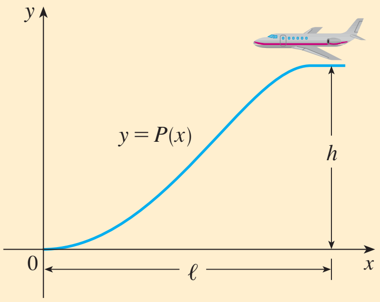
b) Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde f no es derivable?
c) Si $g(x) = \operatorname{sen}|x|$, halle $g'(x)$ y dibuje las gráficas de g y g'. ¿En dónde g no es derivable?

97. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

98. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g tienen tercera derivada, obtenga una fórmula para d^3y/dx^3 parecida a la que se proporciona en el ejercicio 97.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿DÓNDE DEBERÍA UN PILOTO INICIAR EL ATERRIZAJE?



En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión, que satisface las condiciones siguientes:

i) La altura de crucero es h cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante v a todo lo largo del descenso.

iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe sobrepasar una constante k (la cual es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Encuentre un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga la condición i), imponiendo condiciones adecuadas sobre $P(x)$ y $P'(x)$ en el inicio del descenso y el contacto con la pista.

2. Use las condiciones ii) y iii) para demostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponga que una aerolínea comercial decide no permitir que la aceleración vertical de un avión sea mayor que $k = 860\,\text{mi/h}^2$. Si la altitud de crucero de un avión es de 35000 pies y la rapidez de 300 mi/h, ¿a qué distancia del aeropuerto debe el piloto iniciar el descenso?

4. Trace la grafica de la trayectoria de aproximación si se satisfacen las condiciones que se enuncian en el problema 3.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

3.5 Derivación implícita

La mayor parte de las funciones que hemos visto hasta ahora pueden describirse expresando una variable explícitamente en términos de otra variable; por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o bien} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

o bien

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de ese tipo para y como una función explícita (o varias funciones) de x. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación 1 para y, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, de modo que dos de las funciones determinadas por la ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son las semicircunferencias superior e inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. (Véase la figura 1.)

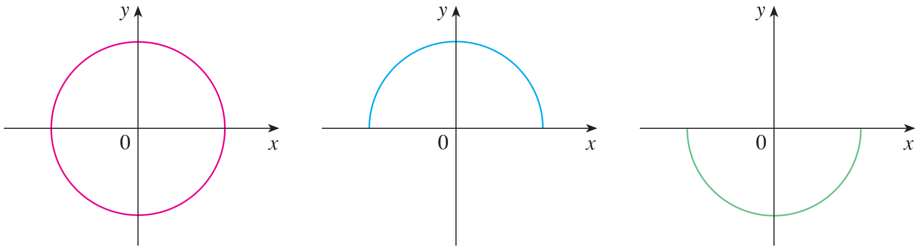


FIGURA 1 a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil resolver explícitamente la ecuación 2 para y como función x. (Con un sistema algebraico para computadora no hay dificultad, pero las expresiones que se obtienen son muy complicadas). Sin embargo, $\boxed{2}$ es la ecuación de una curva llamada **folium de Descartes**, ilustrada en la figura 2 y, que de manera implícita define a y como varias funciones de x. En la figura 3 se muestran las gráficas de esas tres funciones. Cuando se dice que f es una función definida implícitamente por la ecuación 2, se da a entender que la ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f.

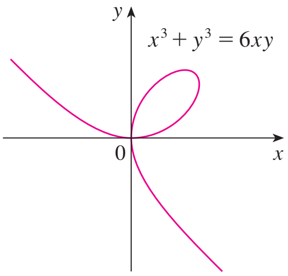


FIGURA 2 Folium de Descartes

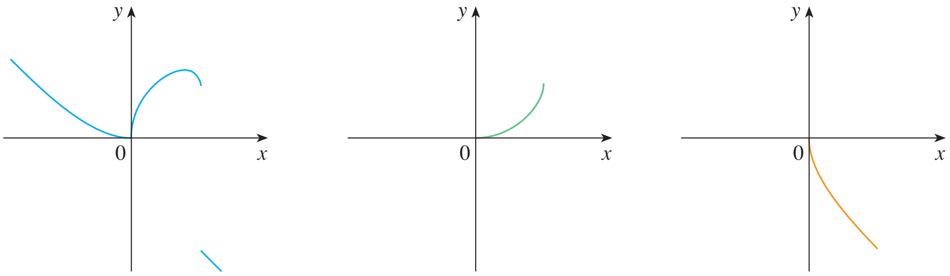


FIGURA 3 Gráficas de tres funciones definidas por el folium de Descartes

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x a fin de hallar la derivada de y. En lugar de ello, aplicaremos el método de **derivación implícita**. Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios de esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente como una función derivable de x, de modo que puede aplicarse el método de derivación implícita.

V EJEMPLO 1

a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, en el punto (3, 4).

SOLUCIÓN 1

a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, así que hay que utilizar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por tanto,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora resolvemos esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

b) En el punto (3, 4) se tiene que $x = 3$ y $y = 4$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Por tanto, la ecuación de la tangente a la circunferencia, en (3, 4), es

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

b) Al resolver $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto (3, 4) se encuentra en la semicircunferencia superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y, por consiguiente, considere la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Al aplicar la regla de la cadena a la función f, se tiene

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

En el ejemplo 1 se ilustra que aun cuando es posible resolver una ecuación explícita para y en términos de x puede ser más fácil aplicar la derivación implícita.

De modo que $$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

y, como en la solución 1, la ecuación de la recta tangente es $3x + 4y = 25$.

NOTA 1 La expresión $dy/dx = -x/y$ en la solución 1 da la derivada en términos tanto de x como de y. Esto es correcto sin importar cuál función y queda determinada por la ecuación dada. Por ejemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

en tanto que para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

V EJEMPLO 2

a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

b) Halle la recta tangente al folium de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$, en el punto (3, 3).

c) ¿En cuál punto en el primer cuadrante es horizontal la recta tangente?

SOLUCIÓN

a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ respecto a x, considerando a y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3, y la regla del producto en el término $6xy$, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o bien $$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora resolvemos para y': $$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

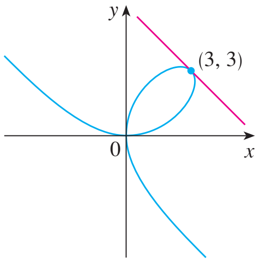


FIGURA 4

b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

un vistazo a la figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en (3, 3). De este modo, la ecuación de la recta tangente al folium en (3, 3) es

$$y - 3 = -1(x - 3) \quad \text{o bien} \quad x + y = 6$$

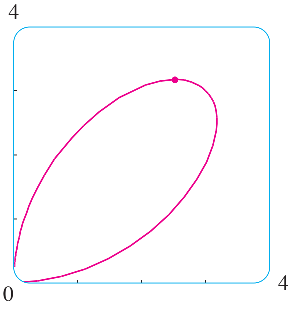


FIGURA 5

c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Si utilizamos la expresión para y' del inciso a), vemos que $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$ (siempre que $y^2 - 2x \neq 0$). Al sustituir $y = \frac{1}{2}x^2$en la ecuación de la curva, obtenemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

lo cual se simplifica para quedar $x^6 = 16x^3$. Ya que $x \neq 0$ en el primer cuadrante, tenemos $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, entonces $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Por tanto, la recta tangente es horizontal en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$ lo cual es aproximadamente (2.5198, 3.1748). Al estudiar la figura 5, es claro que la respuesta es razonable.

NOTA 2 Existe una fórmula para obtener las tres raíces de una ecuación cúbica, que es semejante a la fórmula cuadrática, pero mucho más complicada. Si utilizamos esta fórmula (o un sistema algebraico computarizado) para resolver la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$ para y en términos de x, obtenemos tres funciones determinadas por la ecuación:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

y

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Éstas son las tres funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3.) Usted puede ver que el método de la derivación implícita ahorra una cantidad enorme de trabajo en casos como éste. Más aún, la derivación implícita funciona con igual facilidad para funciones como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

en las cuales es *imposible* resolver para y en términos de x.

Abel y Galois

En 1824, el matemático noruego Niels Abel demostró que no puede darse una fórmula general para la obtención de las raíces de una ecuación de quinto grado. Tiempo después, el matemático francés Evariste Galois demostró que es imposible hallar una fórmula general para las raíces de una ecuación de n-ésimo grado (en términos de operaciones algebraicas sobre los coeficientes), si n es cualquier entero mayor que 4.

EJEMPLO 3 Encuentre y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Si derivamos implícitamente respecto a x y consideramos que y es una función de x, obtenemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Note que en el lado izquierdo hemos aplicado la regla de la cadena y, en el derecho, la regla de la cadena y la regla del producto). Si agrupamos los términos que contienen a y', obtenemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Por lo que

$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

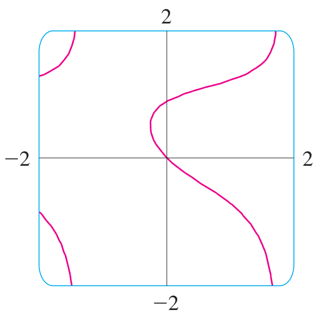


FIGURA 6

En la figura 6, trazada con el comando de construcción de gráficas en forma implícita de un sistema algebraico computarizado, se muestra parte de la curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como comprobación de nuestro cálculo, observe que $y' = -1$, cuando $x = y = 0$ y, al parecer de la gráfica, la pendiente es aproximadamente -1 en el origen.

Las figuras 7, 8 y 9 muestran tres curvas más, producidas por computadora. En los ejercicios 41-42 tendrá usted oportunidad de crear y analizar curvas atípicas de esta naturaleza.

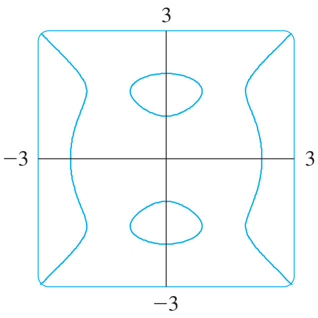


FIGURA 7
$(y^2 - 1)(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 4)$

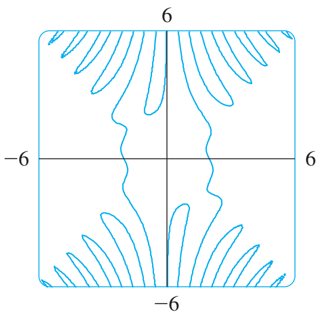


FIGURA 8
$(y^2 - 1)\operatorname{sen}(xy) = x^2 - 4$

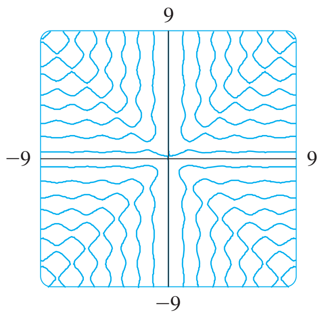


FIGURA 9
$y \operatorname{sen} 3x = x \cos 3y$

En el siguiente ejemplo se muestra cómo encontrar la segunda derivada de una función que está definida implícitamente.

EJEMPLO 4 Hallar y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUCIÓN Derivando la ecuación de manera implícita respecto a x, obtenemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolviendo para y'

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \tag{3}$$

La figura 10 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del ejemplo 4. Observe que es una versión extendida y achatada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, por esta razón algunas veces se le llama *circunferencia gruesa*. Empieza muy escarpada a la izquierda, pero rápidamente se hace muy plana. Esto puede verse en la expresión

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

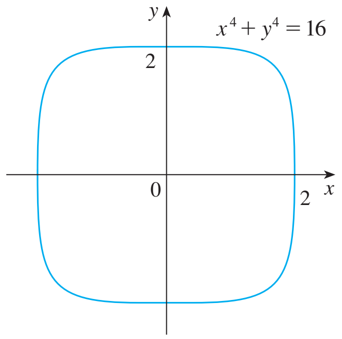


FIGURA 10

Para hallar y'' derivamos esta expresión para y' aplicando la regla del cociente, considerando que y es una función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si ahora sustituimos la ecuación 3 en esta expresión, obtenemos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero los valores de x y y deben satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$, por lo que la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\frac{x^2}{y^7}$$

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas se repasan en la sección 1.6. En la sección 2.5 analizamos su continuidad, y en la sección 2.6, sus asíntotas. Aquí usamos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, suponiendo que estas funciones son derivables. [En efecto, si f es una función uno a uno derivable, puede demostrarse que su función inversa f también es derivable, excepto donde sus rectas tangentes son verticales. Esto es posible porque la gráfica de una función derivable no tiene vértices ni bucles y, por esta razón, si la reflejamos respecto a $y = x$, la gráfica de su función inversa tampoco tiene vértices ni bucles.]

Recuerde la definición de la función arco seno:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \quad \text{significa} \quad \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Al derivar implícitamente $\operatorname{sen} y = x$ respecto a x, obtenemos

$$\cos y\,\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$, debido a que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

El mismo método puede utilizarse para hallar una fórmula para la derivada de *cualquier* función inversa. Véase el ejercicio 77.

De manera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

En la figura 11 se muestra la gráfica de $f(x) = \tan^{-1}x$ y su derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Observe que f es creciente y $f'(x)$ es siempre positiva. El hecho de que $\tan^{-1}x \to \pm\pi/2$ conforme $x \to \pm\infty$ se refleja en el hecho de que $f'(x) \to 0$ a medida que $x \to \pm\infty$.

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semejante. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$. Si derivamos esta última ecuación implícitamente respecto a x, tenemos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

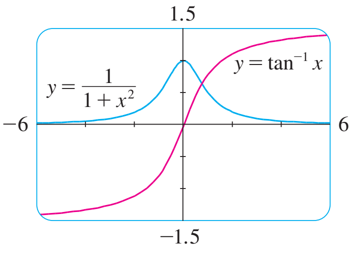


FIGURA 11

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

V EJEMPLO 5 Derive a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$ y b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1 - x^2}}$$

Recuerde que arctan x es una notación alternativa para $\tan^{-1}x$.

b)
$$f'(x) = x\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \arctan\sqrt{x}$$

Las funciones trigonométricas inversas que se presentan con mayor frecuencia son las que acabamos de analizar. Las derivadas de las cuatro restantes se presentan en la tabla siguiente. Las demostraciones de las fórmulas se dejan como ejercicios.

Las fórmulas para las derivadas de $\csc^{-1}x$ y $\sec^{-1}x$ dependen de las definiciones que se apliquen para estas funciones. Véase el ejercicio 64.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

3.5 Ejercicios

1-4 a) Encuentre y' por derivación implícita.
b) Resuelva la ecuación explícita para y y derive para obtener y' en términos de x.
c) Compruebe la coherencia de sus soluciones en los incisos a) y b) sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso a).

1. $9x^2 - y^2 = 1$ **2.** $2x^2 + x + xy = 1$

3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ **4.** $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5-20 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$ **6.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$ **8.** $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ **10.** $xe^y = x - y$

11. $y \cos x = x^2 + y^2$ **12.** $\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} y$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ **14.** $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$ **16.** $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$ **18.** $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$ **20.** $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

21. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, encuentre $f'(1)$.

22. Si $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, determine $g'(0)$.

23-24 Considere a y como la variable independiente y a x como la variable dependiente y utilice la derivación implícita para calcular dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y \sec x = x \tan y$

25-32 Utilice la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

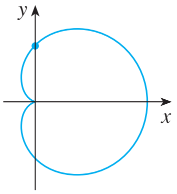
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$

26. $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y$, (π, π)

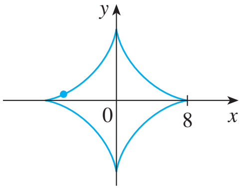
27. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

28. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbola)

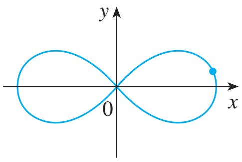
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$(0, \frac{1}{2})$
(cardioide)



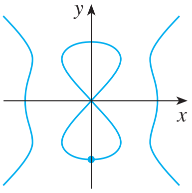
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva del diablo)



33. a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama **kampila de Eudoxo**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 2)$.
b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente, en una pantalla común. (Si su dispositivo graficador puede trazar gráficas de curvas definidas implícitamente, entonces utilice esa capacidad. Si no es así, puede dibujar esta curva trazando sus mitades superior e inferior por separado.)

34. a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, -2)$.
b) ¿En cuáles puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales?
c) Ilustre los incisos a) y b) graficando la curva y las rectas tangentes, en una pantalla común.

35-38 Halle y'' por derivación implícita.

35. $9x^2 + y^2 = 9$ **36.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

37. $x^3 + y^3 = 1$ **38.** $x^4 + y^4 = a^4$

39. Si $xy + e^y = e$, encuentre el valor de y'' en el punto donde $x = 0$.

40. Si $x^2 + xy + y^3 = 1$, encuentre el valor de y''' en el punto donde $x = 1$.

SAC **41.** Es posible crear formas caprichosas con las capacidades de los sistemas algebraicos computarizados, a fin de construir gráficas en forma implícita.
a) Trace la gráfica de la curva con ecuación

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

¿En cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Estime las coordenadas x de estos puntos.
b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(0, 1)$ y $(0, 2)$.
c) Halle las coordenadas x exactas de los puntos mencionados en el inciso a).
d) Diseñe curvas incluso más caprichosas modificando la ecuación del inciso a).

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

SAC **42.** a) La curva con ecuación

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

se ha relacionado a un carretón que rebota. Utilice un sistema algebraico computarizado para la curva y descubra por qué.

b) ¿En cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Encuentre las coordenadas x de estos puntos.

43. Halle los puntos de la lemniscata del ejercicio 31 donde la recta tangente sea horizontal.

44. Demuestre por derivación implícita que la recta tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

45. Formule una ecuación para la recta tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0).

46. Demuestre que la suma de las intersecciones en x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ es igual a c.

47. Mediante la derivación implícita demuestre que cualquier recta tangente en un punto P a una circunferencia con centro O es perpendicular al radio OP.

48. La regla de la potencia puede demostrarse por medio de la derivación implícita para el caso donde n es un número racional, $n = p/q$, y $y = f(x) = x^n$ es una función derivable. Si $y = x^{p/q}$, entonces $y^q = x^p$. Mediante la derivación implícita demuestre que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

49-60 Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones. Simplifique donde sea posible.

49. $y = (\tan^{-1}x)^2$

50. $y = \tan^{-1}(x^2)$

51. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1}x$

53. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arccos x$

54. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

56. $F(\theta) = \text{arcsen}\sqrt{\text{sen}\,\theta}$

57. $y = x\,\text{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\text{sen}^{-1}t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right),\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ a > b > 0$

60. $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

61-62 Encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{arcsen}\,x$

62. $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

63. Demuestre la fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ por el mismo método utilizado para demostrar $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

64. a) Una manera de definir $\sec^{-1}x$ es decir que $y = \sec^{-1}x \Longleftrightarrow \sec y = x$ y $0 \leqslant y < \pi/2$, o bien, $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Demuestre que, con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

b) Otro modo de definir $\sec^{-1}x$ que se utiliza a veces es decir que $y = \sec^{-1}x \Longleftrightarrow \sec y = x$ y $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Demuestre que, con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

65-68 Dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias dadas de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí; es decir, cualquier curva en una familia es ortogonal a cualquier curva en la otra familia. Dibuje ambas familias de curvas usando los mismos ejes de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2,\quad ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax,\quad x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2,\quad x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3,\quad x^2 + 3y^2 = b$

69. Demuestre que la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y la hipérbola $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ son trayectorias ortogonales si $A^2 < a^2$ y $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (la elipse y la hipérbola tienen los mismos focos).

70. Encuentre el valor del número a tal que las familias de curvas $y = (x + c)^{-1}$ y $y = a(x + k)^{1/3}$ son trayectorias ortogonales.

71. a) La *ecuación de van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V es el volumen y T es la temperatura del gas. La constante R es la constante universal de los gases, y a y b son constantes positivas que son características de un gas particular. Si T permanece constante, utilice derivación implícita para obtener dV/dP.

b) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión de 1 mol de dióxido de carbono a un volumen

de $V = 10\,\text{L}$ y una presión de $P = 2.5\,\text{atm}$. Utilice $a = 3.592$ $\text{L}^2\text{-atm/mol}^2$ y $b = 0.04267\,\text{L/mol}$.

72. a) Utilice derivación implícita para encontrar y' si $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.
SAC b) Grafique la curva del inciso a). ¿Qué observa? Demuestre que lo que ve es correcto.
c) Tomando en cuenta el inciso b), ¿qué puede decir acerca de la expresión para y' que encontró en el inciso a)?

73. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa una "elipse girada"; es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en que esta elipse cruza el eje x y demuestre que las rectas tangentes en estos puntos son paralelas.

74. a) ¿Dónde la recta normal a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$, en el punto $(-1, 1)$, interseca la elipse por segunda vez?
b) Ilustre el inciso a) graficando la elipse y la recta normal.

75. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

76. Halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 3)$.

77. a) Suponga que f es una función uno a uno derivable y que su función inversa f también es derivable. Utilice la derivación implícita para demostrar que

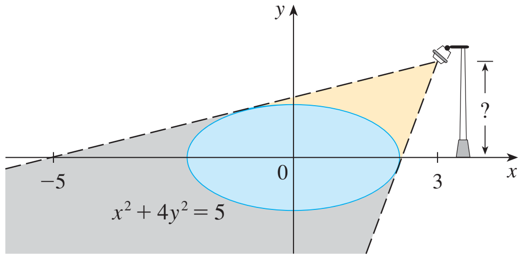
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el denominador no sea 0.
b) Si $f(4) = 5$ y $f'(4) = \frac{2}{3}$, encuentre $(f^{-1})'(5)$.

78. a) Demuestre que $f(x) = x + e^x$ es uno a uno.
b) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(1)$?
c) Utilice la fórmula del ejercicio 77a) para hallar $(f^{-1})'(1)$.

79. La **función de Bessel** de orden 0, $y = J(x)$, satisface la ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos los valores de x, y su valor en 0 es $J(0) = 1$.
a) Encuentre $J'(0)$.
b) Utilice la derivación implícita para encontrar $J''(0)$.

80. En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leqslant 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿qué tan arriba del eje x está colocada la lámpara?



PROYECTO DE LABORATORIO SAC FAMILIA DE CURVAS IMPLÍCITAS

En este proyecto exploraremos las formas cambiantes de curvas implícitamente definidas cuando varían las constantes en una familia y determinaremos las funciones comunes a todos los miembros de la familia.

1. Consideremos la familia de curvas

$$y^2 - 2x^2(x + 8) = c[(y + 1)^2(y + 9) - x^2]$$

a) Graficando las curvas con $c = 0$ y $c = 2$, determine cuántos puntos de intersección hay. (Puede usted hacer acercamientos con el *zoom* para encontrarlos.)
b) Ahora agregue las curvas con $c = 5$ y $c = 10$ a sus gráficas del inciso a). ¿Qué observa? ¿Qué pasa con otros valores de c?

2. a) Grafique varios miembros de la familia de curvas

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = 1$$

Describa cómo cambia la gráfica cuando cambia el valor de c.
b) ¿Qué sucede con la curva cuando $c = -1$? Describa lo que aparece en la pantalla. ¿Puede probarlo algebraicamente?
c) Encuentre y' por derivación implícita. Para el caso $c = -1$, ¿es coherente la expresión y' con lo que descubrió en el inciso b)?

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

3.6 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección utilizaremos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ y, en particular, de la función logaritmo natural $y = \ln x$. [A partir de sus gráficas, es posible probar que las funciones logarítmicas son derivables (véase la figura 12 de la sección 1.6).]

1 $$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Entonces

$$a^y = x$$

La fórmula 3.4.5 establece que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Si mediante la fórmula (3.4.5) derivamos esta ecuación de manera implícita respecto a x, obtenemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

y, por consiguiente, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Si en la fórmula 1 ponemos $a = e$, entonces el factor $\ln a$ en el lado derecho se convierte en $\ln e = 1$ y se obtiene la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2 $$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si se comparan las fórmulas 1 y 2, se evidencia una de las razones principales por la que se usan los logaritmos naturales (logaritmos con base e) en el Cálculo. La fórmula de derivación es más sencilla cuando $a = e$, porque $\ln e = 1$.

V EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para utilizar la regla de la cadena, hacemos $u = x^3 + 1$. Entonces $y = \ln u$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

En general, si combinamos la fórmula 2 con la regla de la cadena como en el ejemplo 1, obtenemos

3 $$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\text{sen } x)$.

SOLUCIÓN Utilizando [3], se tiene que

$$\frac{d}{dx}\ln(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cos x = \cot x$$

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, de modo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \text{sen } x)$.

SOLUCIÓN Si usamos la fórmula 1 con $a = 10$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \text{sen } x) \\ &= \frac{1}{(2 + \text{sen } x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \text{sen } x) \\ &= \frac{\cos x}{(2 + \text{sen } x)\ln 10} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\ &= \frac{x - 2 - \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función f del ejemplo 5, junto con la gráfica de su derivada. Proporciona una comprobación visual de nuestro cálculo. Note que $f'(x)$ es grande negativa cuando f está decreciendo con rapidez.

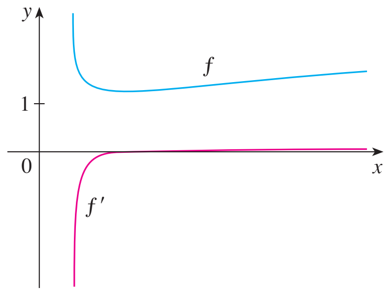


FIGURA 1

SOLUCIÓN 2 Si primero simplificamos la función dada aplicando las leyes de los logaritmos, entonces la derivación se vuelve más fácil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right] \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right) \end{aligned}$$

(Esta respuesta puede dejarse como está, pero si usara un denominador común, vería que da la misma respuesta en la solución 1).

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$ del ejemplo 6 y la de su derivada $f'(x) = 1/x$. Note que cuando x es pequeño, la gráfica de $y = \ln|x|$ está inclinada y, por consiguiente, $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

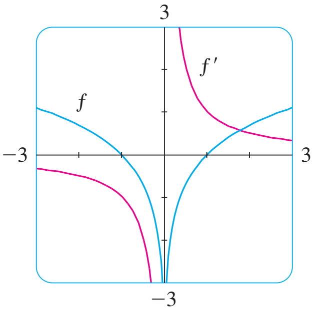


FIGURA 2

V EJEMPLO 6 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$:

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se sigue que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$.

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 6:

4 $$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias puede simplificarse tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos, para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente respecto a x, resulta que

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Puesto que tenemos una expresión explícita para y, podemos sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Si no hubiéramos utilizado la derivación logarítmica en el ejemplo 7, habríamos tenido que aplicar tanto la regla del cociente como la regla del producto. El proceso de cálculo habría sido horrendo.

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para y'.

Si $f(x) < 0$ para algunos valores de x, entonces $\ln f(x)$ no está definida, pero podemos escribir $|y| = |f(x)|$ y utilizar la ecuación 4. Este procedimiento se ilustra demostrando la versión general de la regla de la potencia, como se prometió en la sección 3.1.

Regla de la potencia Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$. Utilizando la derivación logarítmica:

Si $x = 0$, podemos demostrar directamente que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ a partir de la definición de derivada.

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n \ln|x| \qquad x \neq 0$$

Por tanto,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

así que,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Debe distinguir con cuidado la regla de la potencia $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, donde la base es variable y el exponente constante, de la regla para derivar funciones exponenciales $[(a^x)' = a^x \ln a]$, donde la base es constante y el exponente es variable.

En general, se tienen cuatro casos para exponentes y bases:

Base constante, exponente constante 1

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0 \qquad (a$ y b son constantes)

Base variable, exponente constante 2

2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

Base constante, exponente variable 3

3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

Base variable, exponente variable 4

4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, podemos aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue.

V EJEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Dado que la base y el exponente son variables, utilizamos la derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

La figura 3 ilustra el ejemplo 8 mostrando las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

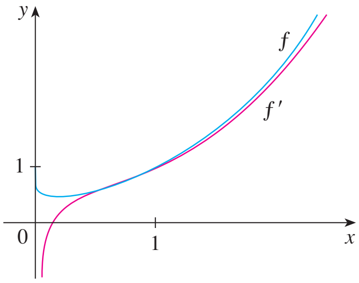


FIGURA 3

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

El número e como un límite

Hemos demostrado que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$. Debido a esto, $f'(1) = 1$. Utilizaremos este hecho para expresar el número e como un límite.

A partir de la definición de derivada como un límite, tenemos que

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

Ya que $f'(1) = 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Luego, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial, tenemos que

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

5
$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

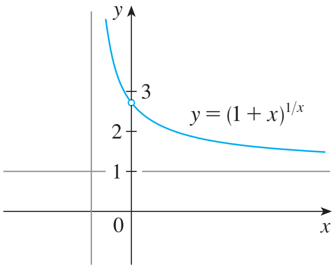


FIGURA 4

x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

En la figura 4 se ilustra la fórmula 5 mediante la gráfica de la función $y = (1+x)^{1/x}$ y una tabla para valores pequeños de x. Con esto se ilustra una aproximación correcta hasta siete dígitos decimales

$$e \approx 2.7182818$$

Si hacemos $n = 1/x$ en la fórmula 5, entonces $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y, por consiguiente, una expresión alternativa para e es

6
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

3.6 Ejercicios

1. Explique por qué en Cálculo se usa con mucha más frecuencia la función logarítmica natural $y = \ln x$, que las otras funciones logarítmicas, $y = \log_a x$.

2-22 Derive cada una de las siguientes funciones.

2. $f(x) = x \ln x - x$
3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$
4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$
5. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$
6. $y = \dfrac{1}{\ln x}$
7. $f(x) = \log_{10}(x^3 + 1)$
8. $f(x) = \log_5(xe^x)$
9. $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$
10. $f(u) = \dfrac{u}{1 + \ln u}$
11. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$
12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
13. $G(y) = \ln \dfrac{(2y + 1)^5}{\sqrt{y^2 + 1}}$
14. $g(r) = r^2 \ln(2r + 1)$
15. $F(s) = \ln \ln s$
16. $y = \ln|1 + t - t^3|$
17. $y = \tan[\ln(ax + b)]$
18. $y = \ln|\cos(\ln x)|$
19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
20. $H(z) = \ln\sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$
21. $y = 2x \log_{10}\sqrt{x}$
22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23-26 Encuentre y' y y'' en cada una de las siguientes funciones.

23. $y = x^2 \ln(2x)$
24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
25. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
26. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

27-30 Derive f y encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$
28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$
29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Si $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, determine $f'(1)$.

32. Si $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, determine $f'(0)$.

33-34 Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$
34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

35. Si $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = (\ln x)/x$, en los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1/e)$. Ilustre lo anterior dibujando la curva y sus rectas tangentes.

37. Sea $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. ¿Para qué valores de c se cumple que $f'(\pi/4) = 6$?

38. Sea $f(x) = \log_a(3x^2 - 2)$. ¿Para qué valor de a se cumple que $f'(1) = 3$?

39-50 Utilice la derivación logarítmica para hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

39. $y = (x^2 + 2)^2(x^4 + 4)^4$
40. $y = \dfrac{e^{-x}\cos^2 x}{x^2 + x + 1}$
41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$
42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$
43. $y = x^x$
44. $y = x^{\cos x}$
45. $y = x^{\operatorname{sen} x}$
46. $y = \sqrt{x}^{\,x}$
47. $y = (\cos x)^x$
48. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$
49. $y = (\tan x)^{1/x}$
50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Halle y' si $x^y = y^x$.

53. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

54. Encuentre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

55. Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

56. Demuestre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para cualquier $x > 0$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales

Sabemos que si $y = f(x)$, entonces la derivada dy/dx puede interpretarse como la razón de cambio de y respecto a x. En esta sección se analizan algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Con base en la sección 2.7, recuerde la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x varía de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

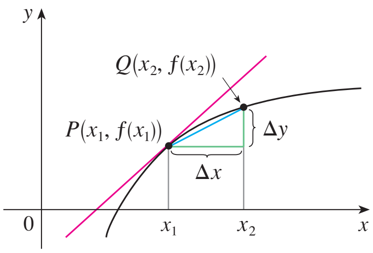
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = razón de cambio promedio
$m = f'(x_1)$ = razón de cambio instantánea

FIGURA 1

es la **razón de cambio promedio de *y* respecto a *x*** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual puede interpretarse como la **razón de cambio instantánea de *y* respecto a *x***, o sea, la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la sección 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas por las de x.) Veamos ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y en las sociales.

Física

Si $s = (t)$ es la función posición de una partícula que se mueve en una línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ representa el promedio de la velocidad en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo). La razón de cambio instantáneo de la velocidad respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se discutió en las secciones 2.7 y 2.8, pero ahora que conocemos las formulas de derivación, podemos resolver con más facilidad problemas que involucran el movimiento de objetos.

V EJEMPLO 1 La posición de una partícula está dada por la siguiente función

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
d) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.
g) Halle la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.

h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo la disminuye?

SOLUCIÓN

a) La función velocidad es la derivada de la función posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$; esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.

d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$; es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los intervalos de tiempo $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

e) En la figura 2 se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje s), aplicando la información del inciso d).

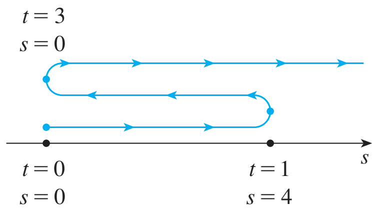


FIGURA 2

f) A partir de los incisos d) y e), necesitamos calcular las distancias recorridas durante los intervalos de tiempo [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m.

g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

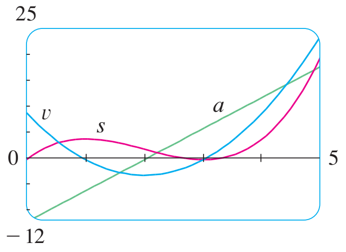


FIGURA 3

h) La figura 3 muestra las gráficas de s, v y a.

i) La rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, la rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se está moviendo.) De la figura 3 se ve que esto sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula disminuye su rapidez cuando v y a tienen signos opuestos; es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula.

TEC En Module 3.7 puede ver una animación de la figura 4 con una expresión para s que puede elegir usted mismo.

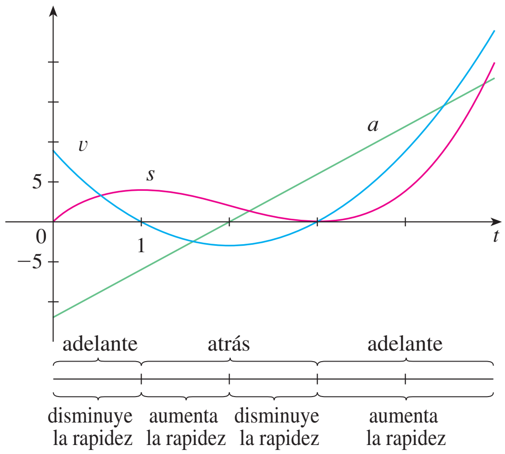


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, entonces su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea, sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es $m = f(x)$, como se muestra en la figura 5.

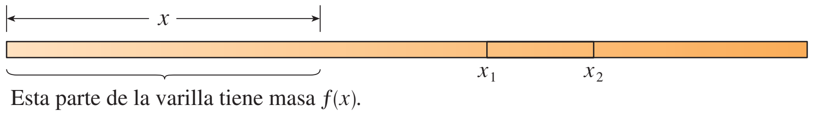


FIGURA 5

La masa de la parte de la varilla que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$ está dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, de modo que la densidad promedio de esa sección de la varilla es

$$\text{densidad promedio} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$ (es decir, $x_2 \to x_1$), calculamos la densidad promedio sobre un intervalo cada vez más pequeño. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estas densidades promedio cuando $\Delta x \to 0$; es decir, la densidad lineal es la razón de cambio de masa respecto a la longitud. En forma simbólica,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

De este modo, la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, donde x se mide en metros y m en kilogramos, entonces la densidad promedio de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48\,\text{kg/m}$$

en tanto que la densidad en $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50\,\text{kg/m}$$

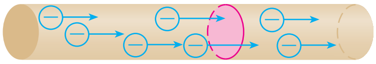


FIGURA 6

V EJEMPLO 3 Siempre que las cargas eléctricas se mueven, hay corriente. En la figura 6 se muestra parte de un alambre con electrones que se mueven a través de una superficie plana, sombreada en rojo. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, entonces la corriente promedio durante este intervalo de tiempo se define como

$$\text{corriente promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si tomamos el límite de esta corriente promedio sobre lapsos de tiempo más y más pequeños, obtenemos lo que se llama **corriente** I en un instante dado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Así, la corriente es la rapidez con que la carga fluye por una superficie; se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (a menudo coulombs por segundo, llamados amperes).

La velocidad, la densidad y la corriente no son las únicas razones de cambio de importancia para la física. Otras incluyen la potencia (la rapidez a la cual se realiza trabajo), la relación de flujo de calor, el gradiente de temperatura (la razón de cambio de la temperatura respecto a la posición) y la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva en la física nuclear.

Química

EJEMPLO 4 El resultado de una reacción química en la formación de una o más sustancias (11amadas *productos*) a partir de uno o más materiales (*reactivos*). Por ejemplo, la "ecuación"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de agua. Consideremos la reacción

$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles ($1 \text{ mol} = 6.022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro y se denota con [A]. La concentración varía durante una reacción, de modo que [A], [B] y [C] son funciones del

tiempo (t). La rapidez promedio de reacción del producto C en un intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ es

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero los químicos tienen más interés en la **rapidez de reacción instantánea**, la cual se obtiene tomando el límite de la rapidez promedio de reacción cuando el intervalo Δt tiende a 0:

$$\text{rapidez de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}$$

Dado que la concentración del producto aumenta a medida que la reacción avanza, la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$ será positiva, y así la rapidez de reacción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción; por eso, para que la rapidez de reacción de A y B sean números positivos, ponemos signos negativos delante de las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Dado que $[\mathrm{A}]$ y $[\mathrm{B}]$ disminuyen con la misma rapidez que $[\mathrm{C}]$ crece, tenemos que

$$\text{rapidez de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

De modo más general, resulta que para una reacción de la forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \to c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

tenemos que

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La rapidez de reacción puede determinarse a partir de datos y con métodos gráficos. En algunos casos existen fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo, que permiten calcular la rapidez de reacción (véase el ejercicio 22).

EJEMPLO 5 Una de las cantidades de interés en termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a una temperatura constante, entonces su volumen V depende de su presión P. Podemos considerar la razón de cambio del volumen respecto a la presión: a saber, la derivada dV/dP. Conforme P crece, V decrece, de modo que $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

En estos términos, β mide qué tan rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25 °C está relacionado con la presión P (en kilopascales) mediante la ecuación

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio de V respecto a P cuando $P = 50$ kPa, es

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2\,500} = -0.00212 \text{ m}^3/\text{kPa}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\frac{5.3}{50}} = 0.02 \text{ (m}^3/\text{kPa)/m}^3$$

Biología

EJEMPLO 6 Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, así que la razón de crecimiento promedio durante el periodo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{razón de crecimiento promedio} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **razón de crecimiento instantánea** se obtiene a partir de esta razón de crecimiento promedio al hacer que el periodo Δt tienda a 0:

$$\text{razón de crecimiento promedio} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

En términos estrictos, esto no es muy exacto porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ sería una función escalón que es discontinua siempre que ocurre un nacimiento o una muerte y, por tanto, no es derivable. Sin embargo, para una población grande de animales o plantas, es posible reemplazar la gráfica con una curva de aproximación uniforme como en la figura 7.

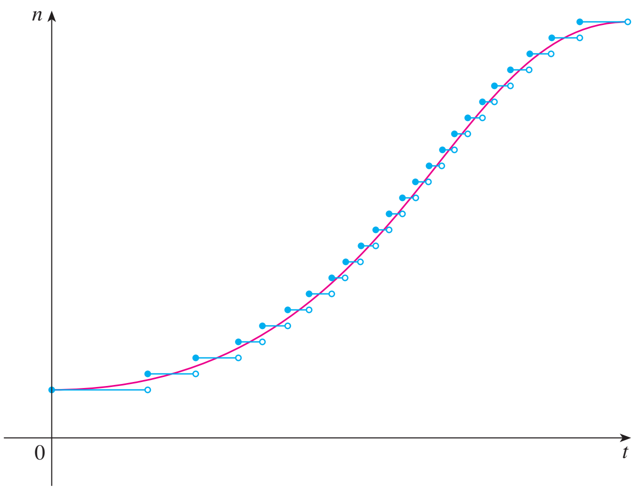
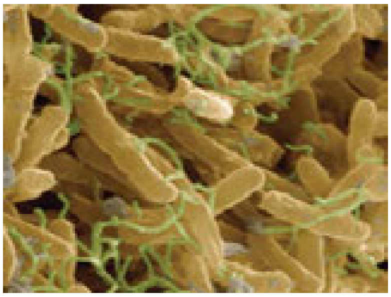


FIGURA 7
Una curva suave que se aproxima a una función de crecimiento



© Eye of Science / Photo Researchers, Inc.

Las bacterias *E.coli* tienen aproximadamente dos micrómetros (μm) de longitud y 0.75 μm de ancho. La imagen fue obtenida con un microscopio electrónico de barrido.

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, entonces

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

y, en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la sección 3.4 se demostró que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Así que la razón de crecimiento de la población de bacterias en el tiempo t, es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por ejemplo, suponga que inicia con una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. Entonces, la razón de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias crece en una cantidad de casi 1109 bacterias por hora.

EJEMPLO 7 Cuando consideramos el flujo de sangre por un vaso sanguíneo, como una vena o una arteria, este vaso puede tomar la forma de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l como se ilustra en la figura 8.

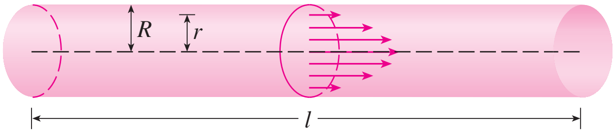


FIGURA 8
Flujo de sangre dentro de una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia r al eje, hasta que v se vuelve 0 en la pared. La relación entre v y r está dada por la ley del **flujo laminar** descubierta por el físico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. En ésta se afirma que

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

Para información más detallada, véase W. Nichols y M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 5a. ed. (Nueva York, 2005).

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, entonces v es función de r, con dominio $[0, R]$.

La razón de cambio promedio de la velocidad, al moverse desde $r = r_1$ hacia afuera hasta $r = r_2$, está dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si hacemos que $\Delta r \to 0$, obtenemos el **gradiente de velocidad**; es decir, la razón de cambio instantánea de la velocidad respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Utilizando la ecuación 1, obtenemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las arterias humanas más pequeñas, puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm y $P = 4000$ dinas/cm^2, lo cual da

$$v = \frac{4000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2)$$
$$\approx 1.85 \times 10^4(6.4 \times 10^{-5} - r^2)$$

En $r = 0.002$ cm la sangre fluye a una rapidez de

$$v(0.002) \approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6})$$
$$= 1.11 \text{ cm/s}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74 \text{(cm/s)/cm}$$

Para tener una idea de lo que esto significa, cambie las unidades de centímetros a micrómetros (1 cm = 10 000 μm). Entonces el radio de la arteria es de 80 μm. La velocidad en el eje central es de 11 850 μm/s, la cual disminuye hasta 11110 μm/s a una distancia de $r = 20\,\mu$m. El hecho de que $dv/dr = -74\,(\mu\text{m/s})/\mu\text{m}$ significa que cuando $r = 20\,\mu$m, la velocidad disminuye en una cantidad de casi 74 μm/s por cada micrómetro que se aleja del centro.

Economía

V EJEMPLO 8 Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al producir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el número de artículos producidos se incrementa desde x_1 hasta x_2, entonces el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, y la razón de cambio promedio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

El límite de esta cantidad conforme $\Delta x \to 0$, es decir, la razón de cambio instantánea del costo los economistas le llaman **costo marginal** respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Dado que x suele tomar solo valores enteros, quizá no tenga sentido hacer que Δx tienda a 0, pero siempre podrá remplazar $C(x)$ con una función suave de aproximación uniforme, como en el ejemplo 6.]

Si tomamos $\Delta x = 1$ y n grande (de modo que Δx sea pequeño en comparación con n), tenemos que

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Así, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la $(n + 1)$-ésima unidad].

A menudo resulta apropiado representar con un polinomio una función de costo total

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (alquiler, calefacción, mantenimiento) y los demás términos representan el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender en parte de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y a las faltas de eficiencia relacionadas con las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0.01x^2$$

Entonces, la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{artículo}$$

Esto da la cantidad a la cual se incrementan los costos respecto al nivel de producción cuando $x = 500$ y predice el costo del artículo 501.

El costo real de producir el artículo 501 es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\qquad - [10\,000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Note que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

Los economistas también estudian la demanda, el ingreso y la utilidad marginales, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Éstas se consideran en el capítulo 4, después de desarrollar las técnicas para hallar los valores máximos y mínimos de funciones.

Otras ciencias

Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la razón a la cual una masa incrustada de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la proporción a la cual el

agua fluye hacia dentro o hacia fuera de una represa. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población en una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo tiene interés por la razón de cambio de la presión atmosférica respecto a la altura. (Véase el ejercicio 17 de la sección 3.8.)

En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudian la curva del aprendizaje, la cual presenta en forma de gráfica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprende una habilidad, como función del tiempo de capacitación t. Tiene un interés particular la razón a la cual mejora el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir, dP/dt.

En sociología, el cálculo diferencial se aplica al análisis de la divulgación de rumores (o de innovaciones, novedades o moda). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que conoce un rumor en el momento t, entonces la derivada dp/dt denota la razón de divulgación de ese rumor. (Véase el ejercicio 84 de la sección 3.4.)

Una sola idea, varias interpretaciones

La velocidad, la densidad, la corriente, la potencia y el gradiente de temperatura, en física; la velocidad de reacción y la compresibilidad, en química; la rapidez de crecimiento y el gradiente de velocidad de la sangre, en biología; el costo marginal y la utilidad marginal, en economía; la rapidez de flujo del calor, en geología; la rapidez de mejora del rendimiento, en psicología, y la rapidez de divulgación de un rumor, en sociología, son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.

Esta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas descansa en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diferentes en cada ciencia. Cuando desarrollemos las propiedades del concepto matemático, de una vez y por todas, podrá dar la vuelta y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo expresó de manera sucinta: "Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los vinculan".

3.7 Ejercicios

1-4 Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, donde t se mide en segundos y s en pies.

a) Encuentre la velocidad en el instante t.
b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
d) ¿Cuándo se mueve hacia la dirección positiva?
e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
f) Dibuje un diagrama, como el de la figura 2, a fin de ilustrar el movimiento de la partícula.
g) Halle la aceleración en el tiempo t y después de 3 s.
h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
i) ¿Cuándo la partícula aumenta su rapidez? ¿Cuándo disminuye?

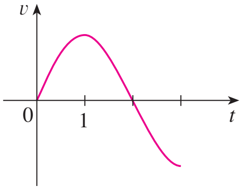
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$

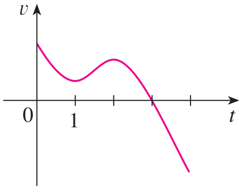
2. $f(t) = 0.01t^4 - 0.04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4), \quad t \leqslant 10$

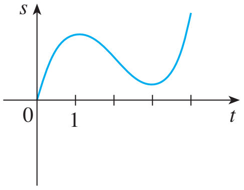
4. $f(t) = te^{-t/2}$

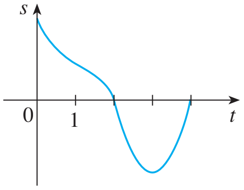
5. Se muestran las graficas de los funciones *velocidad* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo incrementa su rapidez cada partícula? ¿Cuándo disminuyen su rapidez? Explique:

a)


b)


6. Se muestran las funciones *posición* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo incrementa su rapidez cada una de las partículas? ¿Cuándo la disminuyen? Explique.

a)


b)


Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

7. La altura (en metros) de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba, desde un punto 2 m por encima del nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5 m/s es $h = 2 + 24.5t - 4.9t^2$ después de t segundos.
a) Encuentre la velocidad después de 2 segundos y después de 4 segundos.
b) ¿Cuándo alcanza el proyectil su altura máxima?
c) ¿Cuál es su altura máxima?
d) ¿En qué momento cae al suelo?
e) ¿Con qué velocidad cae al suelo?

8. Si un balón es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 pies/s, entonces su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.
a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el balón?
b) ¿Cuál es la velocidad del balón cuando está 96 pies por encima del suelo en su camino ascendente? ¿En su camino en descenso?

9. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba desde la superficie de Marte, con una velocidad de 15 m/s, su altura después de t segundos es $h = 15t - 1.86t^2$.
a) ¿Cuál es la velocidad de la roca después de que transcurren 2 s?
b) ¿Cual es la velocidad de la roca una vez que ha alcanzado 25 m durante el ascenso? ¿Y en su descenso?

10. Una partícula se mueve de acuerdo con la función posición

$$S = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t \qquad t \geqslant 0$$

a) ¿En qué momento la partícula tiene una velocidad de 20 m/s?
b) ¿En qué momento su aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de este valor de t?

11. a) Una compañía fabrica *chips* para computadora a partir de placas cuadradas de silicio. Se desea conservar la longitud del lado de esas placas muy próxima a 15 mm y, asimismo, saber cómo cambia el área $A(x)$ de ellas cuando varía la longitud x del lado. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.
b) Demuestre que la rapidez de cambio del área de uno de los cuadrados respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro. Trate de explicar geométricamente por qué esto es cierto, dibujando un cuadrado cuya longitud x del lado se incrementa en una cantidad Δx. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δx es pequeño?

12. a) Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x por lado, calcule dV/dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.
b) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es cierto; básese en el ejercicio 11b) para establecer una analogía.

13. a) Encuentre la razón de cambio promedio del área de un círculo respecto a su radio r cuando éste cambia de
i) 2 a 3 ii) 2 a 2.5 iii) 2 a 2.1
b) Encuentre la razón de cambio instantánea cuando $r = 2$.
c) Demuestre que la razón de cambio del área de un círculo respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto dibujando un círculo cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área ΔA si Δr es pequeño?

14. Se deja caer una piedra en un lago, lo que crea una onda circular que viaja hacia afuera con una rapidez de 60 cm/s. Encuentre la razón a la cual aumenta el área dentro del círculo después de a) 1 s, b) 3 s y c) 5 s. ¿Qué puede concluir?

15. Se está inflando un globo esférico. Encuentre la razón de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) respecto al radio r, cuando éste es de a) 1 pie, b) 2 pies y c) 3 pies. ¿A qué conclusiones llega?

16. a) El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Encuentre la razón de cambio promedio de V respecto a r, cuando éste cambia de
i) 5 a 8 μm ii) 5 a 6 μm iii) 5 a 5.1 μm
b) Halle la razón de cambio instantánea de V respecto a r, cuando $r = 5\ \mu$m.
c) Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 13c).

17. La masa de parte de una varilla metálica que se encuentra entre su extremo izquierdo y un punto x metros a la derecha es $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (véase el ejemplo 2) cuando x es a) 1 m, b) 2 m y c) 3 m. ¿En dónde es más alta la densidad y dónde es más baja?

18. Si un tanque contiene 5 000 galones de agua, la cual se drena desde el fondo del tanque en 40 min, entonces la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el tanque después de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \tfrac{1}{40}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encuentre la rapidez de drenado de agua después de a) 5 min, b) 10 min, c) 20 min y d) 40 min. ¿En qué momento fluye el agua más rápido hacia afuera? ¿Con mayor lentitud? Resuma sus hallazgos.

19. La cantidad de carga, Q, en coulombs c) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando a) $t = 0.5$ s y b) $t = 1$ s. [Véase el ejemplo 3. La unidad de corriente es el ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué momento la corriente es la más baja?

20. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.
a) Encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?
b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

21. La fuerza F que actúa sobre un cuerpo con masa m y velocidad v es igual a la razón de cambio del momentum o cantidad de movimiento: $F = (d/dt)(mv)$. Si m es constante, esto se convierte en $F = ma$, donde $a = dv/dt$ es la aceleración. Pero en la teoría de la relatividad, la masa de una partícula varía con v como sigue: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. Demuestre que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

22. Algunas de las mareas más altas en el mundo se producen en la Bahía de Fundy en la costa atlántica de Canadá. En el cabo de Hopewell, la profundidad del agua durante la marea baja es aproximadamente dos metros y durante la marea alta es cerca de doce metros. El periodo natural de oscilación es un poco más de doce horas, y el 30 de junio de 2009, la marea alta se produjo a las 6:45. Esto ayuda a explicar el siguiente modelo para la profundidad del agua D (en metros) en función del tiempo t (en horas después de la medianoche) ese día:

$$D(t) = 7 + = \cos[0.503(t - 6.75)]$$

¿Con qué rapidez fue subiendo la marea (o cayendo) en los siguientes momentos?

a) 15:00 b) 6:00
c) 9:00 d) mediodía

23. La ley de Boyle establece que, cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.

a) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión.
b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.
c) Demuestre que la compresibilidad isotérmica (véase el ejemplo 5) se expresa mediante $\beta = 1/P$.

24. Si en el ejemplo 4 una molécula del producto C está formada por una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B y la concentración inicial de A y B tienen un valor común $[A] = [B] = a$ moles/L, entonces

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.

a) Encuentre la rapidez de reacción en el tiempo t.
b) Demuestre que si $x = [C]$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

c) ¿Qué pasa con la concentración conforme $t \to \infty$?
d) ¿Qué sucede con la velocidad de reacción conforme $t \to \infty$?
e) ¿Qué significan los resultados de los incisos c) y d) en términos prácticos?

25. En el ejemplo 6 consideramos una población de bacterias que se duplica cada hora. Supongamos que otra población de bacterias se triplica cada hora y comienza con 400 bacterias. Encuentre una expresión para el número n de bacterias después de t horas y utilícela para estimar la tasa de crecimiento de la población de bacterias después de 2.5 horas.

26. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio aumenta rápidamente al principio, pero finalmente se nivela. La población es modelada por la función

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

donde t es medido en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 celdas y está aumentando a un ritmo de 12 células/hora. Encuentre los valores de a y b. De acuerdo con este modelo, ¿qué sucede con la población de levadura a largo plazo?

27. La tabla da la población del mundo en el siglo XX.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1 860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 280
1940	2 300	2000	6 080
1950	2 560		

a) Estime la tasa de crecimiento poblacional en 1920 y en 1980 mediante el promedio de las pendientes de dos rectas secantes.
b) Utilice una calculadora graficadora o computadora para encontrar una función cúbica (una polinomial de tercer grado) que modele los datos.
c) Utilice el modelo del inciso b) para encontrar un modelo para la tasa de crecimiento de la población en el siglo XX.
d) Utilice el inciso c) para estimar las tasas de crecimiento en 1920 y 1980. Compare con sus estimaciones del inciso a).
e) Estime la tasa de crecimiento en 1985.

28. La tabla muestra cómo varía la edad promedio del primer matrimonio de la mujer japonesa en la última mitad del siglo XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1980	25.2
1955	23.8	1985	25.5
1960	24.4	1990	25.9
1965	24.5	1995	26.3
1970	24.2	2000	27.0
1975	24.7		

a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con una función polinomial de cuarto grado.
b) Utilice el inciso a) para encontrar un modelo para $A'(t)$.
c) Estime la tasa de cambio de la edad de matrimonio de la mujer en 1990.
d) Grafique los puntos de datos y los modelos para A y A'.

29. Considere la ley de flujo laminar del ejemplo 7. Considere también un vaso sanguíneo con radio 0.01 cm, longitud 3 cm, diferencia de presión de 3 000 Dinas/cm^2 y una viscosidad de $\eta = 0.027$.

a) Encuentre la velocidad de la sangre a lo largo de la línea central $r = 0$, en un radio $r = 0.005$ cm y en la pared $r = R = 0.01$ cm.

b) Encuentre el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$ y $r = 0.01$.
c) ¿Donde es más mayor la velocidad? ¿Dónde está el mayor cambio de velocidad?

30. La frecuencia de vibración de una cuerda de violín está dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el capítulo 11 en D. E. Hall, Musical Acoustic, 3a. ed. (Pacific Grove, California, 2002).]

a) Encuentre la rapidez de cambio de la frecuencia respecto a
  i) la longitud (cuando T y ρ son constantes),
  ii) la tensión (cuando L y ρ son constantes) y
  iii) la densidad lineal (cuando L y T son constantes).
b) El tono de una nota (qué tan altas o bajas son las notas) está determinado por la frecuencia f. (Cuanto mayor sea la frecuencia, mayor será el tono.) Utilice los signos de los derivadas en el inciso a) para determinar lo que sucede con el tono de una nota
  i) cuando se reduce la longitud efectiva colocando un dedo sobre la cuerda, haciendo que vibre sólo una porción menor que la cuerda,
  ii) cuando se incrementa la tensión girando la llave de ajuste,
  iii) cuando aumenta la densidad lineal por cambiar la cuerda.

31. El costo en dólares de producir x yardas de un determinado tejido es

$$C(x) = 1\,200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

a) Encuentre la función de costo marginal.
b) Obtenga $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
c) Compare $C'(200)$ con el costo de fabricar la yarda 201 de tela.

32. La función de costo de producción de una mercancía es

$$C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$$

a) Obtenga e interprete $C'(100)$.
b) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

33. Si $p(x)$ es el valor total de la producción cuando hay x trabajadores en una planta, entonces la *productividad promedio* de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

a) Obtenga $A'(x)$. ¿Por qué quiere la empresa contratar a más trabajadores si $A'(x) > 0$?
b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

34. Si R denota la reacción del cuerpo a cierto estímulo de esfuerzo x, la *sensibilidad* S se define como la rapidez de cambio de la reacción respecto a x. Un ejemplo concreto es que cuando el brillo x de una fuente de luz aumenta, el ojo reacciona disminuyendo la zona R de la pupila. La fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

ha sido utilizada para modelar la dependencia de R sobre x cuando R se mide en milímetros cuadrados y x se mide en unidades apropiadas de brillo.

a) Encuentre la sensibilidad.
b) Ilustre el inciso a) graficando R y S como funciones de x. Haga comentarios relacionados con los valores de R y S en bajos niveles de brillo. ¿Esto es lo que esperaría?

35. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en kelvin), la presión P (en atmósferas) y el volumen V (en litros) es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante del gas. Suponga que, en cierto instante, $P = 8.0$ atm y está aumentando a razón de 0.10 atm/min y $V = 10$ L y está disminuyendo a razón de 0.15 L/min. Encuentre la razón de cambio de T respecto al tiempo en ese instante si $n = 10$ mol.

36. En una granja piscícola se introduce una población de peces en un estanque y se cosechan con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población se expresa con la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la tasa de nacimientos de peces, P_c es la población máxima que el estanque puede contener (llamada *capacidad de contención*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.

a) ¿Cuál valor de dP/dt correspondiente a una población estable?
b) Si el estanque puede sostener 10 000 peces, la tasa de nacimiento es del 5% y la cantidad de cosecha es de 4%, encuentre el nivel estable de la población.
c) Si β se eleva hasta 5%, ¿qué sucede?

37. En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los modelos *depredador-presa* para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado mediante las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \quad \text{y} \quad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

a) ¿Cuáles valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
b) ¿Cómo se representaría matemáticamente la afirmación "Los caribúes van hacia la extinción"?
c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ y $d = 0.0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones (C, W) que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en armonía o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

3.8 Crecimiento y decaimiento exponenciales

En muchos fenómenos naturales, las cantidades crecen o decrecen en una cantidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, si $y = f(t)$ es el número de individuos en una población de animales o bacterias en el tiempo t, entonces parece razonable esperar que la razón de crecimiento $f'(t)$ sea proporcional a la población $f(t)$; es decir, $f'(t) = kf(t)$ para alguna constante k. A propósito, bajo condiciones ideales (ambientes sin límites, nutrición adecuada, inmunidad a las enfermedades) el modelo matemático conocido por la ecuación $f'(t) = kf(t)$ predice, sin duda, con precisión lo que realmente sucede. Otro ejemplo sucede en física nuclear donde la masa de una sustancia radiactiva decae en una cantidad proporcional a su masa. En química la velocidad de una reacción de primer orden unimolecular es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta de ahorros con interés compuesto se incrementa de manera continua en una cantidad proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la razón de cambio de y respecto a t es proporcional a su tamaño $y(t)$ en cualquier tiempo, entonces

1 $$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es una constante. Algunas veces la ecuación 1 se llama **ley de crecimiento natural** (*si* $k > 0$) o **ley de decaimiento natural** (*si* $k < 0$). También, a la expresión 1 se le denomina **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida, y y su derivada dy/dt.

No es difícil intuir una solución de la ecuación 1. Esta ecuación pide hallar una función cuya derivada es un múltiplo constante de sí misma. En este capítulo encontraremos tales funciones. Cualquier función exponencial en la forma $y(t) = Ce^{kt}$, donde C es una constante, satisface

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Veremos en la sección 9.4 que *cualquier* función que satisface $dy/dt = ky$ debe ser en la forma $y = Ce^{kt}$. Para ver el significado de la constante C, observe que

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

En consecuencia, C es el valor inicial de la función:

2 **Teorema** Las únicas soluciones de la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ son las funciones exponenciales

$$y(t) = y(0)e^{kt}$$

Crecimiento de población

¿Cuál es el significado de la constante de proporcionalidad k? En el panorama del crecimiento de la población, cuando $P(t)$ es el tamaño de una población en el tiempo t, escribimos

3 $$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

La cantidad

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

es la rapidez de crecimiento dividida entre el tamaño de la población; a aquélla se le denomina la **rapidez** o **tasa de crecimiento relativa**. De acuerdo con 3, en lugar de decir "la

rapidez o tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población" podríamos decir "la razón o tasa de crecimiento relativo es constante". Por tanto, [2] indica que una población con crecimiento relativo constante debe crecer en forma exponencial. Note que la tasa de crecimiento relativa k aparece como el coeficiente de t en la función exponencial Ce^{kt}. Por ejemplo, si

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

donde t se mide en años, entonces la rapidez de crecimiento relativo es $k = 0.02$ y el crecimiento de población a una rapidez relativa es de 2% por cada año. Si la población en el tiempo 0 es P_0, entonces la expresión para la población es

$$P(t) = P_0e^{0.02t}$$

V EJEMPLO 1 Utilice el hecho de que la población mundial fue 2 560 millones en 1950 y 3 040 millones en 1960, para modelar la población del mundo en la segunda mitad del siglo XX. (Suponga que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población). ¿Cuál es la rapidez de crecimiento relativa? Utilice el modelo para estimar la población mundial en 1993 y, del mismo modo, predecir la población en el año 2020.

SOLUCIÓN Mida el tiempo t en años y haga $t = 0$ en el año 1950. Medimos la población $P(t)$ en millones de personas. Entonces, $P(0) = 2\,560$ y $P(10) = 3\,040$. Ya que estamos suponiendo que $dP/dt = kP$, el teorema 2 proporciona

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2\,560e^{kt}$$

$$P(10) = 2\,560e^{10k} = 3\,040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3\,040}{2\,560} \approx 0.017185$$

La rapidez de crecimiento relativo es casi 1.7% por cada año, y el modelo es

$$P(t) = 2\,560e^{0.017185t}$$

Se estima que en 1993 la población mundial fue

$$P(43) = 2\,560e^{0.017185(43)} \approx 5\,360 \text{ millones}$$

El modelo predice que en 2020 la población será

$$P(70) = 2\,560e^{0.017185(70)} \approx 8\,524 \text{ millones}$$

La gráfica en la figura 1 muestra que el modelo ya es bastante exacto para finales del siglo XX (los puntos representan la población actual); de esta manera, la estimación para 1993 es completamente confiable, pero la predicción para el 2020 es aventurada.

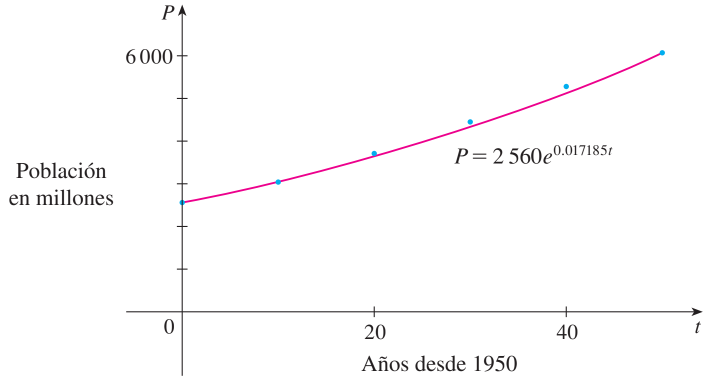


FIGURA 1
Un modelo para el crecimiento de la población mundial en la segunda mitad del siglo XX

Decaimiento radiactivo

Una sustancia radiactiva decae emitiendo radiación de manera espontanea. Si $m(t)$ es la masa que queda a partir de una masa inicial m_0 de la sustancia después del tiempo t, entonces la rapidez de decaimiento relativo

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

es constante. (Ya que dm/dt es negativa, la rapidez de desintegración relativa es positiva.) Se sigue que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde k es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas decaen en una cantidad proporcional a la masa restante. Esto significa que podemos utilizar $\boxed{4}$ para demostrar que la masa decae de manera exponencial:

$$m(t) = m_0 e^{tk}$$

Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos del **tiempo de vida media**: el tiempo que se requiere para que la mitad de cualquier cantidad conocida se desintegre.

V EJEMPLO 2 El tiempo de vida media del radio-226 es 1590 años.

a) Una muestra de radio-226 tiene una masa de 100 mg. Halle una fórmula para la masa de la muestra que permanece después de t años.

b) Halle la masa exacta en miligramos, después de 1000 años.

c) ¿Cuándo se reducirá la masa a 30 mg?

SOLUCIÓN

a) Sea $m(t)$ la masa de radio-226 (en miligramos) que permanece después de t años. Entonces $dm/dt = km$ y $y(0) = 100$, así que $\boxed{2}$ da

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

A fin de determinar el valor de k, utilizamos el hecho de que $y(1590) = \frac{1}{2}(100)$. Así,

$$100e^{1590k} = 50 \qquad e^{1590k} = \tfrac{1}{2}$$

y

$$1590k = \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

En consecuencia

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

Podemos utilizar el hecho de que $e^{\ln 2} = 2$ para escribir la expresión para $m(t)$ en la forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

b) La masa después de 1000 años es

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65\,\text{mg}$$

c) Queremos encontrar el valor de t tal que $m(t) = 30$, es decir,

$$100e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \text{ o bien } e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

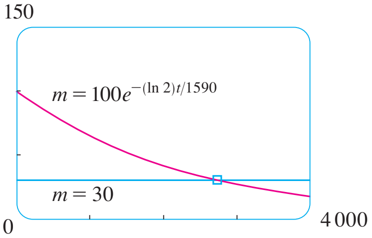


FIGURA 2

Resolviendo esta ecuación para t tomando el logaritmo natural de ambos lados:

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

Por tanto,
$$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762 \text{ años}$$

Para una verificación del ejemplo 2, utilice un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de $m(t)$ de la figura 2 junto con la recta horizontal $m = 30$. Estas curvas se intersecan cuando $t \approx 2800$, y ello está de acuerdo con la respuesta del inciso c).

Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su ambiente, siempre que esta diferencia no sea muy grande. (Esta ley también se aplica al calentamiento.) Si se hace $T(t)$ la temperatura del objeto en el tiempo t y T_s la temperatura del ambiente, entonces podemos formular la ley de enfriamiento de Newton como una ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

donde k es una constante. Esta ecuación no es completamente la misma que la ecuación 1, así que hacemos el cambio de variable $y(t) = T(t) - T_s$. Ya que T_s es constante, tenemos que $y'(t) = T'(t)$, así que la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Por tanto, podemos utilizar [2] para hallar una expresión para y en la que podemos encontrar T.

EJEMPLO 3 Una botella con una bebida gasificada a temperatura ambiente (72 °F) se coloca dentro de un refrigerador donde la temperatura es 44 °F. Después de media hora la bebida se ha enfriado hasta 61 °F.

a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida después de otra media hora?
b) ¿Cuánto tardará la bebida en enfriarse a 50 °F?

SOLUCIÓN

a) Sea $T(t)$ la temperatura de la bebida después de t minutos. La temperatura ambiente es $T_s = 44$ °F, por consiguiente, la ley de enfriamiento de Newton establece que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

Si hacemos $y = T - 44$, entonces $y(0) = T(0) - 44 = 72 - 44 = 28$, así que y satisface

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

y mediante [2] tenemos que

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

Tenemos que $T(30) = 61$, así que $y(30) = 61 - 44 = 17$ y

$$28e^{30k} = 17 \qquad e^{30k} = \tfrac{17}{28}$$

Tomando logaritmos, tenemos que

$$k = \frac{\ln\left(\frac{17}{28}\right)}{30} \approx -0.01663$$

Así que

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)} \approx 54.3$$

Por tanto, después de la otra mitad de la hora, la bebida se ha enfriado a casi 54 °F.

b) Tenemos $T(t) = 50$ cuando

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50$$

$$e^{-0.01663t} = \tfrac{6}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{-0.01663} \approx 92.6$$

La bebida se enfría a 50 °F después de casi 1 hora 33 minutos.

Observe que en el ejemplo 3, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28 \cdot 0 = 44$$

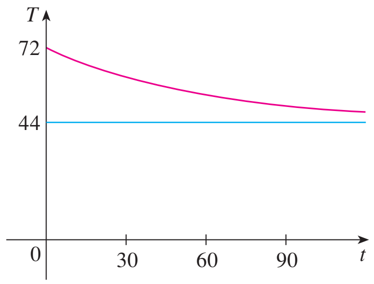


FIGURA 3

lo cual se esperaba. La gráfica de la función temperatura se muestra en la figura 3.

Interés compuesto continuamente

EJEMPLO 4 Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés compuesto anualmente, entonces, después de 1 año la inversión es valorada en 1000(1.06) = 1060 dólares, después de 2 años su valor es [1000(1.06)]1.06 = 1123.60 dólares y después de t años su valor es $1000(1.06)^t$ dólares. En general, si se invierte una cantidad A_0 a una tasa de interés r ($r = 0.06$, en este ejemplo), entonces, después de t años su valor es de $A_0(1 + r)^t$. No obstante, por lo general el interés es compuesto con más frecuencia; es decir, n veces al año. Por tanto, en cada periodo de capitalización, la tasa de interés es r/n y hay nt periodos en t años, así que el valor de la inversión es

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por ejemplo, una inversión de 1 000 dólares después de 3 años a 6% de interés estarán valorados en

$$\$1000(1.06)^3 = \$1191.02 \quad \text{compuesto al año}$$

$$\$1000(1.03)^6 = \$1194.05 \quad \text{compuesto cada seis meses}$$

$$\$1000(1.015)^{12} = \$1195.62 \quad \text{compuesto cada tres meses}$$

$$\$1000(1.005)^{36} = \$1196.68 \quad \text{compuesto cada mes}$$

$$\$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = \$1197.20 \quad \text{compuesto diario}$$

Podemos ver que el pago del interés se incrementa cuando el número de periodos compuesto (n) se incrementa. Si hacemos que $n \to \infty$, entonces estará componiendo el interés **continuamente**, y el valor de la inversión será

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad \text{(donde } m = n/r\text{)} \end{aligned}$$

Pero el límite en esta expresión es igual al número e (véase la ecuación 3.6.6). Así que, componiendo en forma continua con una tasa de interés r, la cantidad después de t años es

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

Si derivamos esta función, obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = rA_0 e^{rt} = rA(t)$$

la cual dice que, componiendo continuamente el interés, la tasa de incremento de una inversión es proporcional a su tamaño.

Regresando al ejemplo de 1000 dólares invertidos por 3 años a 6% de interés anual, el valor de la inversión será

$$A(3) = \$1000e^{(0.06)3} = \$1197.22$$

Observe cómo se acerca esto a la cantidad calculada por componer diariamente 1197.20 dólares, pero es más fácil calcular la cantidad si aplicamos la composición continua.

3.8 Ejercicios

1. Una población de protozoarios se desarrolla con una tasa de crecimiento relativo constante de 0.7944 por miembro por cada día. En el día cero la población consiste de dos miembros. Encuentre el tamaño de la población después de 6 días.

2. Un habitante común del intestino humano es la bacteria *Escherichia coli*. Una célula de esta bacteria en un caldo nutriente se divide en dos células cada 20 minutos. La población inicial de un cultivo es de 60 células
a) Halle la tasa de crecimiento relativo.
b) Encuentre una expresión para el número de células después de t horas.
c) Calcule el número de células después de 8 horas.
d) Establezca la tasa de crecimiento después de 8 horas.
e) ¿Cuándo alcanzará la población 20 000 células?

3. Un cultivo de bacterias al inicio contiene 100 células y crece en una cantidad proporcional a su tamaño. Después de 1 hora la población se ha incrementado a 420.
a) Establezca una expresión para el número de bacterias después de t horas.
b) Calcule el número de bacterias después de 3 horas.
c) Encuentre la tasa de crecimiento después de 3 horas.
d) ¿Cuándo alcanza la población 10 000?

4. Un cultivo de bacterias crece con una tasa de crecimiento relativo constante. Después de 2 horas existen 400 bacterias y después de 6 horas la cuenta es de 25 600.
a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo? Exprese su respuesta en porcentaje.
b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?
c) Encuentre una expresión para el número de bacterias después de t horas.
d) Encuentre el número de células después de 4.5 horas.
e) Encuentre la tasa de crecimiento después de 4.5 horas.
f) ¿Cuándo alcanzará la población 50 000?

5. La tabla proporciona estimados de la población mundial, en millones, desde 1750 hasta el 2000.
a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de población para 1750 y 1800 para predecir la población mundial en 1900 y en 1950. Compare con las cifras actuales.
b) Utilice el modelo exponencial y las cifras de población para 1850 y 1900 para predecir la población mundial en 1950. Compare con la población actual.
c) Emplee el modelo exponencial y las cifras de población en 1900 y 1950 para predecir la población mundial en el 2000. Compare con la población actual e intente explicar la discrepancia.

Año	Población	Año	Población
1750	790	1900	1 650
1800	980	1950	2 560
1850	1 260	2000	6 080

6. La tabla proporciona la población de India, en millones, para la segunda mitad del siglo XX.

Año	Población
1951	361
1961	439
1971	548
1981	683
1991	846
2001	1 029

a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de censo para 1951 y 1961 para predecir la población en el 2001. Compare con las cifras actuales.
b) Utilice el modelo exponencial y las cifras del censo para 1961 y 1981 para predecir la población en el 2001. Compare con la población actual. Después utilice este modelo para predecir la población en los años 2010 y 2020.
c) Grafique ambas funciones exponenciales de los incisos a) y b) junto con una gráfica de la población actual. ¿Alguno de estos modelos es razonable?

7. Los experimentos muestran que si la reacción química

$$N_2O_5 \to 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

se realiza a 45 °C, la velocidad de reacción del pentóxido de dinitrógeno es proporcional a su concentración como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(Véase el ejemplo 4 en la sección 3.7.)
a) Halle una expresión para la concentración $[N_2O_5]$ después de t segundos si la concentración inicial es C.
b) ¿Cuánto tiempo le toma a la reacción para reducir la concentración de N_2O_5 a 90% de su valor original?

8. El estroncio-90 tiene un tiempo de vida media de 28 días.
a) Una muestra tiene originalmente una masa de 50 mg. Establezca una fórmula para la masa que queda después de t días.
b) Calcule la masa restante después de 40 días.
c) ¿Cuánto tiempo le toma a la muestra reducir su masa a 2 mg?
d) Bosqueje la gráfica de la función masa.

9. El tiempo de vida media del cesio-137 es de 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 100 mg.
a) Establezca la masa que permanece después de t años.
b) ¿Cuánto de la muestra permanece después de 100 años?
c) ¿Después de cuánto tiempo permanece únicamente 1 mg?

10. Una muestra de tritio-3 se desintegró a 94.5% de su cantidad original después de 1 año.
a) ¿Cuál es el tiempo de vida media del tritio-3?
b) ¿Cuánto tardaría en decaer a 20% de su cantidad original?

11. Los científicos pueden establecer la edad de objetos antiguos mediante el método de *datación por radiocarbono*. El bombardeo de la atmósfera superior por los rayos cósmicos convierte al nitrógeno en un isótopo radioactivo de carbono, ^{14}C, con un tiempo de vida media aproximado de 5 730 años. La vegetación absorbe dióxido de carbono a través de la atmósfera, y la vida animal asimila ^{14}C a través de la cadena alimenticia. Cuando una planta o un animal mueren, se detiene la sustitución de su carbono, y la cantidad de ^{14}C inicia su disminución a través de la desintegración radiactiva. En consecuencia el nivel de radiactividad también decae de manera exponencial.

En un fragmento de pergamino se descubrió que había aproximadamente setenta y cuatro por ciento tanta radioactividad ^{14}C como en el material con el que se hace el pergamino que hay sobre la Tierra hoy en día. Estime la edad del pergamino.

12. Una curva pasa a través del punto (0, 5) y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en cualquier punto P es dos veces la coordenada y de P. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

13. De un horno se toma un pavo rostizado cuando su temperatura ha alcanzado 185 °F y se coloca sobre una mesa en un espacio donde la temperatura es 75 °F.
a) Si la temperatura del pavo es 150 °F después de media hora, ¿cuál es la temperatura 45 minutos después?
b) ¿Cuándo se enfriará el pavo a 100 °F?

14. En una investigación de asesinato, la temperatura del cadáver fue de 32.5 °C a las 13:30 y de 30.3 °C una hora más tarde. La temperatura corporal normal es 37.0 °C y la temperatura del ambiente era de 20.0 °C. ¿Cuándo tuvo lugar el asesinato?

15. Cuando se saca una bebida fría del refrigerador, su temperatura es 5 °C. Después de 25 minutos dentro de una habitación a 20 °C su temperatura se incrementa a 10 °C.
a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida 50 minutos después?
b) ¿Cuándo estará su temperatura a 15 °C?

16. Una taza de café recién preparado tiene 95 °C de temperatura en una habitación a 20 °C. Cuando la temperatura es de 70 °C, se enfría con una rapidez de 1 °C por cada minuto. ¿Cuándo sucede esto?

17. La rapidez de cambio de la presión atmosférica P respecto a la altitud h es proporcional a P, siempre que la temperatura sea constante. A 15 °C la presión es 101.3 kPa al nivel del mar y 87.14 kPa en $h = 1000$ m.
a) ¿Cuál es la presión a una altitud de 3 000 m?
b) ¿Cuál es la presión en la cima del monte McKinly, a una altitud de 6 187 m?

18. a) Si se prestan 1000 dólares a 8% de interés, calcule la cantidad que se debe al final de 3 años si el interés es compuesto: i) anual, ii) trimestral, iii) mensual, iv) semanal, v) diario, vi) por hora y vii) de manera continua.
b) Suponga que se prestan 1000 dólares y el interés es compuesto de manera continua. Si $A(t)$ es la cantidad que se debe después de t años, donde $0 \leqslant t \leqslant 3$, grafique $A(t)$ en una pantalla común, para cada una de las tasas de interés 6, 8 y 10 por ciento.

19. a) Si invierten 3 000 dólares a 5% de interés, calcule el valor de la inversión al final de 5 años si el interés es compuesto i) anual, ii) semestral, iii) mensual, iv) semanal, v) por día y vi) de manera continua.
b) Si $A(t)$ es la cantidad de la inversión al tiempo t para el caso de composición continua, establezca una ecuación diferencial y una condición inicial que satisfaga $A(t)$.

20. a) ¿Cuánto transcurrirá para que una inversión se duplique en valor si la tasa de interés anual es de 6% compuesto de manera continua?
b) ¿Cuál es la tasa de interés anual equivalente?

3.9 Razones relacionadas

Si estamos inflando un globo, tanto su volumen como su radio se incrementan, y sus razones de incremento están relacionadas entre sí. Pero es mucho más fácil medir de modo directo la rapidez de aumento de volumen que la rapidez de crecimiento del radio.

En un problema de razones de cambio relacionadas, la idea es calcular la razón de cambio de una cantidad en términos de la razón de cambio de otra cantidad (la cual podría medirse con más facilidad). El procedimiento es determinar una ecuación que relacione las dos cantidades y aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros respecto al tiempo.

V EJEMPLO 1 Se infla un globo esférico y su volumen crece a razón de 100 cm^3/s. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

RP De acuerdo con los principios de la resolución de problemas estudiados en la página 75, el primer paso es entender el problema. Ahí está incluida la lectura cuidadosa del problema, la identificación de los datos con que se conoce y lo que se desconoce y la introducción de una notación conveniente.

SOLUCIÓN Empezamos por identificar dos aspectos:

la *información dada:*

la razón de incremento del volumen del globo es 100 cm^3/s

y *lo que se desconoce:*

la rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Con objeto de expresar estas cantidades en forma matemática, introduzca una *notación* sugerente:

sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que se debe tener presente es que las razones de cambio son derivadas. En este problema, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo t. La rapidez de incremento del volumen respecto al tiempo es la derivada dV/dt, y la rapidez del incremento del radio es dr/dt. Por tanto, replantee lo que conoce y lo que desconoce de la manera siguiente:

$$\textit{Conocido:} \qquad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Desconocido:} \qquad \frac{dr}{dt} \quad \text{cuando } r = 25 \text{ cm}$$

RP La segunda etapa de la resolución de problemas es concebir un plan para relacionar la información conocida con la desconocida.

Con objeto de relacionar dV/dt y dr/dt, primero relacionamos V y r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

A fin de utilizar la información dada, derive respecto a t a ambos miembros de la ecuación. Para derivar el lado derecho necesita aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora resuelva para la cantidad desconocida:

Observe que, aunque dV/dt es constante, dr/dt no lo es.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Si sustituimos $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo se incrementa a razón de $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s.

EJEMPLO 2 Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de 1 pie/s, ¿qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

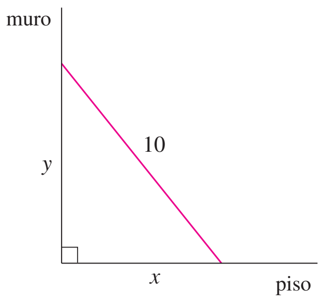


FIGURA 1

SOLUCIÓN Primero dibuje un esquema y ponga los datos como se muestra en la figura 1. Sea x pies la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y pies la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones del tiempo t (medido en segundos).

Sabemos que $dx/dt = 1$ pie/s, y se pide determinar dy/dt cuando $x = 6$ pies (véase figura 2). En este problema, la relación entre x y y la define el teorema de pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros aplicando la regla de la cadena tenemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

y al resolver esta ecuación para determinar la rapidez deseada, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

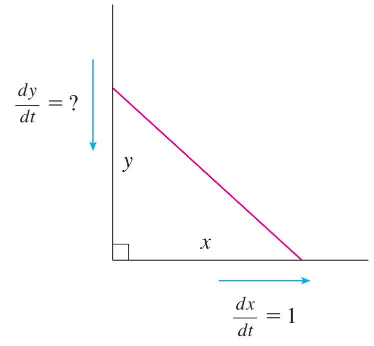


FIGURA 2

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$ y al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, llegamos a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4} \text{ pies/s}$$

El hecho de que dy/dt sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo está *decreciendo* a razón de $\frac{3}{4}$ pies/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo de la pared a razón de $\frac{3}{4}$ pies/s.

EJEMPLO 3 Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m, y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a razón de 2 m³/min, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

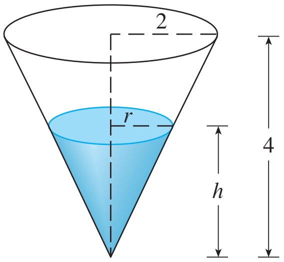


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero elabore un diagrama del cono y denote la información como en la figura 3. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura en el tiempo t, respectivamente, donde t se mide en minutos.

Sabemos que $dV/dt = 2\,\text{m}^3/\text{min}$, y se nos pide determinar dh/dt cuando h es 3 m. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

pero es muy útil expresar V sólo en función de h. Con objeto de eliminar r, recurra a los triángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora podemos derivar cada miembro respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3\,\text{m}$ y $dV/dt = 2\,\text{m}^3/\text{min}$ tenemos que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua está subiendo a razón de $8/(9\pi) \approx 0.28\,\text{m/min}$.

RP Reflexione: ¿qué ha aprendido de los ejemplos 1 a 3 que lo ayude a resolver problemas futuros?

Estrategia de resolución de problemas Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 75 y adaptarlos a las razones de cambio relacionadas, luego de lo que aprendió en los ejemplos 1 a 3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, utilice las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución, como en el ejemplo 3.
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

ADVERTENCIA: un error común es la sustitución de la información numérica conocida (por cantidades que varían con el tiempo) muy pronto. La sustitución se efectúa sólo *después* de la derivación. (El paso 7 va después del paso 6.) Es decir, en el ejemplo 3 se tratan valores generales de h hasta que finalmente sustituye $h \neq 3$ en la última etapa. (Si hubiera sustituido $h \neq 3$ desde antes, habría obtenido $dV/dt = 0$, lo cual es evidentemente erróneo.)

Los ejemplos siguientes son ilustraciones adicionales de la estrategia.

V EJEMPLO 4 El automóvil A se dirige hacia el oeste a 50 millas/h y el automóvil B viaja hacia el norte a 60 millas/h. Ambos se dirigen hacia la intersección de los dos caminos. ¿Con qué rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a 0.3 millas y el automóvil B está a 0.4 millas de la intersección?

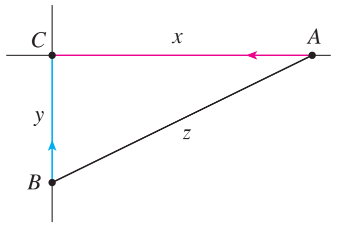


FIGURA 4

SOLUCIÓN Dibuje la figura 4, donde C es la intersección de los caminos. En un tiempo dado t, sea x la distancia entre el automóvil A y C, sea y la distancia del automóvil B a C y sea z la distancia entre los vehículos, donde x, y y z se miden en millas.

Sabemos que $dx/dt = -50$ millas/h y $dy/dt = -60$ millas/h. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z la proporciona el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados respecto a t obtenemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5$ millas, de modo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ mi/h}$$

Los vehículos se aproximan entre sí a razón de 78 millas/h.

V EJEMPLO 5 Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con qué rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

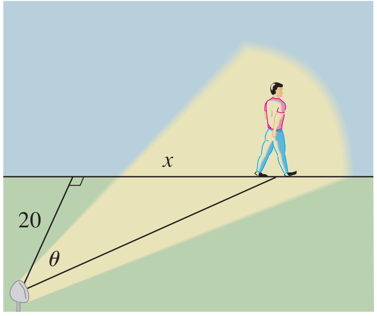


FIGURA 5

SOLUCIÓN Trace la figura 5 y haga que x sea la distancia desde el hombre hasta el punto sobre la trayectoria que esté más cercana al faro. Sea θ el ángulo entre el rayo desde el faro y la perpendicular a la trayectoria.

Sabemos que $dx/dt = 4$ pies/s, y se pide calcular $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona x y θ puede escribirse a partir de la figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan\theta \qquad x = 20\tan\theta$$

Al derivar respecto a t ambos miembros, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

por lo que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{20}\cos^2\theta\,(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 15$, la longitud del rayo es 25, así que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El faro gira con una rapidez de 0.128 rad/s.

3.9 Ejercicios

1. Si V es el volumen de un cubo con arista x, y el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, exprese dV/dt en términos de dx/dt.

2. a) Si A es el área de un círculo cuyo radio es r, y el círculo se expande a medida que pasa el tiempo, exprese dA/dt en términos de dr/dt.
b) Suponga que se derrama aceite de un depósito agrietado y que se extiende siguiendo una circular. Si el radio del derrame de aceite se incrementa con una rapidez constante de 1 m/s, ¿qué tan rápido se incrementa el área del derrame cuando el radio es de 30 m?

3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de 6 cm/s. ¿Con qué rapidez se incrementa el área del cuadrado cuando su área es de 16 cm²?

4. El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho a razón de 3 cm/s. Cuando el largo es 20 cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

5. Un tanque cilíndrico con 5 m de radio se está llenando con agua a razón de 3 cm³/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de agua?

6. El radio de una esfera se incrementa a razón de 4 mm/s. ¿Qué tan rápido se incrementa el volumen cuando el diámetro es de 80 mm?

7. Suponga que $y = \sqrt{2x + 1}$, donde x y y son funciones de t.
a) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = 4$.
b) Si $dy/dt = 5$, encuentre dx/dt cuando $x = 12$.

8. Suponga que $4x^2 + 9y^2 = 36$, donde x y y son funciones de t.
a) Si $dy/dt = \frac{1}{3}$, encuentre dx/dt cuando $x = 2$ y $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
b) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = -2$ y $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

9. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $dx/dt = 5$ y $dy/dt = 4$, encuentre dz/dt cuando $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

10. Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola $xy = 8$. Cuando alcanza el punto $(4, 2)$, la coordenada y se incrementa con una rapidez de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto en movimiento en ese instante?

11-14
a) ¿Qué cantidades se conocen en el problema?
b) ¿Qué cantidades se desconocen?
c) Trace un diagrama de la situación para cualquier tiempo t.
d) Plantee una ecuación que relacione las cantidades.
e) Termine de resolver el problema.

11. Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla y a una rapidez de 500 millas/h pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez con la que se incrementa la distancia desde el avión a la estación cuando éste se encuentra a 2 millas de la estación.

12. Si una bola de nieve se derrite de tal modo que el área superficial disminuye a razón de 1 cm²/min, calcule la rapidez con la que disminuye el diámetro cuando éste es 10 cm.

13. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de 15 pies de altura. Un hombre de 6 pies de estatura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 5 pies/s a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido se desplaza la punta de su sombra cuando el hombre está a 40 pies del poste?

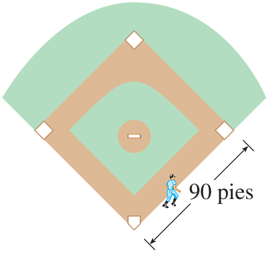
14. A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

15. Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 millas/h y el otro hacia el oeste a 25 millas/h. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los automóviles dos horas después?

16. Una foco sobre el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde el foco hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s, ¿qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre la pared cuando está a 4 m del edificio?

17. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 4 pies/s desde un punto P. Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 5 pies/s desde un punto a 500 pies directo al este de P. ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?

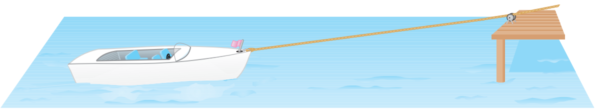
18. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 pies/s.
a) ¿Con qué rapidez decrece su distancia desde la segunda base cuando está a medio camino de la primera base?
b) ¿Con qué rapidez se incrementa su distancia desde la tercera base en el mismo momento?



19. La altura de un triángulo se incrementa a razón de 1 cm/min, mientras que el área del triángulo aumenta a razón de

$2\,cm^2/min$. ¿Con qué rapidez cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área es de $100\,cm^2$?

20. Un bote se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa y que pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando éste se encuentra a 8 m de éste?



21. A mediodía, el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 35 km/h, y el barco B va hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

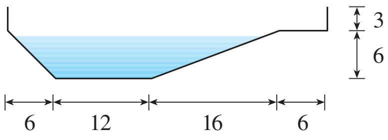
22. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = 2\,\text{sen}(\pi x/2)$. Cuando la partícula pasa por el punto $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, su coordenada x se incrementa a razón de $\sqrt{10}$ cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia desde la partícula al origen en este instante?

23. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a razón de $10\,000\,cm^3/min$ al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a razón constante. El depósito mide 6 m de altura, y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a razón de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, calcule la razón a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

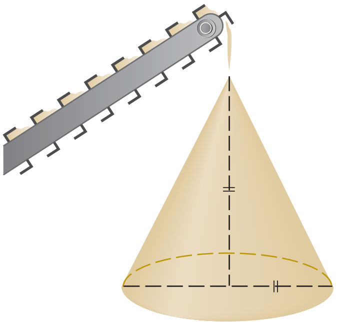
24. Se tiene un canal de 10 pies de largo con extremos en forma de triángulos isósceles con 3 pies de ancho en la parte superior y con una altura de 1 pie. Si el canal se está llenando de agua a razón de $12\,pies^3/min$, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando ésta se encuentra a 6 pulgadas de profundidad?

25. Un canal de agua tiene 10 m de longitud y una sección transversal en forma de un trapecio isósceles con 30 cm de ancho en la parte inferior, 80 cm de ancho en la parte superior, y una altura de 50 cm. Si el canal se llena con agua a razón de $0.2\,m^3/min$, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando ésta se encuentra a 30 cm de profundidad?

26. Una piscina mide 20 pies de ancho, 40 pies de largo, 3 pies de profundidad en el extremo de poco fondo y 9 pies de profundidad en la parte más honda. En la figura se muestra una sección transversal de la piscina. Si ésta se está llenando a razón de $0.8\,pies^3/min$, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando tiene 5 pies en el punto más hondo?



27. Se descarga grava por medio de una banda transportadora a razón de $30\,pies^3/min$, y el grosor de granos es tal que forma una pila en forma de cono cuyo diámetro y altura son siempre iguales. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de la pila cuando ésta mide 10 pies de alto?



28. Un papalote que está a 100 pies por arriba de la superficie de la tierra se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 8 pies/s. ¿Con qué rapidez disminuye el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 200 pies de cuerda?

29. Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m, y el ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.06 rad/s. Calcule la razón a la cual el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados de longitud constante es $\pi/3$.

30. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo entre el muro y la escalera en el ejemplo 2, cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

31. La parte superior de una escalera se desliza por una pared a una rapidez vertical de 0.15 m/s. En el momento en que la parte inferior de la escalera está a 3 m de la pared, se desliza alejándose de ésta con una rapidez de 0.2 m/s. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

32. Un grifo está llenando un recipiente hemisférico de 60 cm de diámetro, con agua a razón de 2 L/min. Encuentre la rapidez a la que está aumentando el agua en el recipiente cuando está medio lleno. [Utilice los siguientes hechos: $1\,L = 1000\,cm^3$. El volumen de la parte de una esfera con radio r desde la parte inferior a una altura h es $V = \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$, como lo demostraremos en el capítulo 6].

33. La ley de Boyle establece que, cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es de $600\,cm^3$, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa a razón de 20 kPa/min ¿Con qué rapidez disminuye el volumen en ese instante?

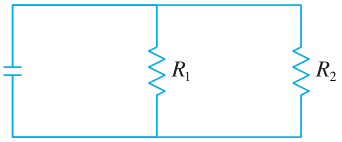
34. Cuando el aire se expande en forma adiabática, (no gana ni pierde calor), su presión P y su volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es $400\,cm^3$ y que la presión es 80 kPa y está disminuyendo a razón de 10 kPa/min. ¿Con qué rapidez se incrementa el volumen en este instante?

35. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como se muestra en la figura, entonces la resistencia total R, medida en ohms (Ω) está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si R_1 y R_2 se incrementan a razón de $0.3\,\Omega/s$ y $0.2\,\Omega/s$,

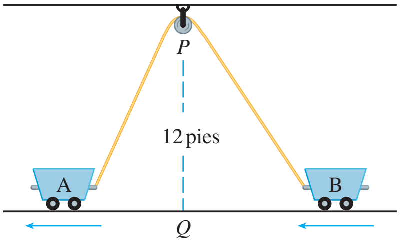
respectivamente, ¿qué tan rápido cambia R cuando $R_1 = 80\,\Omega$ y $R_2 = 100\,\Omega$?



36. El peso B del cerebro en función del peso del cuerpo W en los peces ha sido modelado mediante la función potencia $B = 0.007\,W^{2/3}$, donde B y W se dan en gramos. Un modelo para el peso corporal en función de la longitud del cuerpo L (medido en centímetros), es $W = 0.12\,L^{2.53}$. Si en 10 millones de años la longitud promedio de ciertas especies de peces evolucionaron de 15 a 20 cm a rapidez constante, ¿qué tan rápido creció el cerebro de estas especies cuando la longitud promedio era de 18 cm?

37. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 2°/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60°?

38. Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 39 pies de longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto Q está en el suelo a 12 pies directamente abajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de Q a una rapidez de 2 pies/s. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia Q en el instante en que el carro A está a 5 pies de Q?



39. Una cámara de televisión se instala a 4 000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la rapidez correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 600 pies/s cuando se ha elevado 3 000 pies.

a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?

b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

40. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km de distancia del punto P más cercano que se encuentra en una playa recta, y su luz da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P?

41. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de seguimiento en la superficie de la Tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está disminuyendo a razón de $\pi/6$ rad/min. ¿Con qué rapidez está viajando el avión en ese instante?

42. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando a razón de una revolución cada 2 min. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m del nivel del suelo?

43. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altitud de 1 km y se eleva con un ángulo de 30°. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?

44. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 mi/h, y la otra camina hacia el noreste a 2 mi/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?

45. Un individuo corre por una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. Un amigo del corredor está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

46. La manecilla de los minutos de un reloj mide 8 mm de largo y la manecilla de las horas mide 4 mm de largo. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las puntas de las manecillas cuando es 13:00?

3.10 Aproximaciones lineales y diferenciales

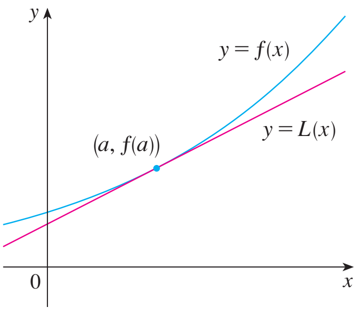


FIGURA 1

Hemos visto que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, observamos que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2 en la sección 2.7.) Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Por tanto, recurrimos a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

En otras palabras, utilizamos la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

1 $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

2 $$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se le llama **linealización** de f en a.

V EJEMPLO 1 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son sobreestimaciones o subestimaciones?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

y tenemos que $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Si ponemos estos valores en la ecuación 2, la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación lineal correspondiente $\boxed{1}$ es

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ está cerca de 1)}$$

En particular, tenemos que

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

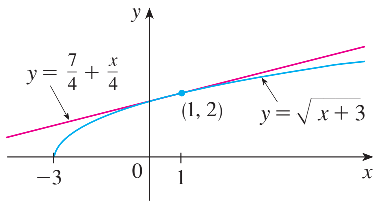


FIGURA 2

En la figura 2 se ilustra la aproximación lineal. En efecto, la recta tangente es una buena aproximación a la función dada cuando x esta cerca de 1. También vemos que las aproximaciones son sobreestimaciones porque la recta tangente se encuentra por arriba de la curva.

Por supuesto, una calculadora podría dar aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal da una aproximación *sobre todo un intervalo*.

En la tabla siguiente se comparan las estimaciones de la aproximación lineal del ejemplo 1 con los valores reales. Observe en esta tabla, y también en la figura 2, que la aproximación con la recta tangente da buenas estimaciones cuando x está cerca de 1, pero la precisión de la aproximación disminuye cuando x está más lejos de 1.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

¿Qué tan buena es la aproximación obtenida en el ejemplo 1? El ejemplo siguiente muestra que usando una calculadora graficadora o una computadora es posible determinar un intervalo a lo largo del cual una aproximación lineal proporciona una precisión específica.

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5? ¿Qué puede decir de una exactitud con una diferencia menor que 0.1?

SOLUCIÓN Una exactitud con una diferencia menor que 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

De modo equivalente, podríamos escribir

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

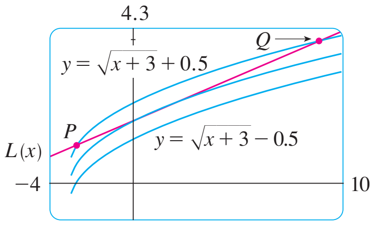


FIGURA 3

Esto expresa que la aproximación lineal debe encontrarse entre las curvas que se obtienen al desplazar la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. En la figura 3 se muestra la recta tangente $y = (7 + x)/4$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y en Q. Al hacer un acercamiento y usar el cursor, en la computadora estimamos que la coordenada x de P se aproxima a -2.66, y la coordenada x de Q es más o menos 8.66. Así, con base en la gráfica, la aproximación

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

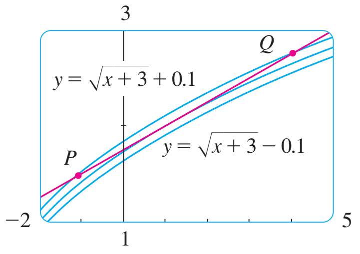


FIGURA 4

es exacta con una diferencia menor que 0.5 cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Se ha redondeado para quedar dentro del margen de seguridad).

De manera análoga, en la figura 4 vemos que la aproximación es exacta con una diferencia menor que 0.1 cuando $-1.1 < x < 3.9$.

Aplicaciones en la física

Las aproximaciones lineales se usan con frecuencia en la física. Al analizar las consecuencias de una ecuación, a veces un físico necesita simplificar una función sustituyéndola con una aproximación lineal. Por ejemplo, al derivar una fórmula para el periodo de un péndulo, los libros de texto de física obtienen la expresión $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial, y luego sustituyen sen θ por θ haciendo la observación de que sen θ está muy cerca de θ si éste no es demasiado grande. [Véase, por ejemplo, *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), p. 431.] Podemos comprobar que la linealización de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$, de manera que la aproximación lineal en 0 es

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(véase el ejercicio 42). Así que, en efecto, la derivación de la fórmula para el periodo de un péndulo utiliza la aproximación a la recta tangente para la función seno.

Otro ejemplo se presenta en la teoría de la óptica, donde los rayos de luz que llegan con ángulos bajos en relación con el eje óptico se llaman *rayos paraxiales*. En la óptica paraxial (o gaussiana) tanto sen θ como cos θ se sustituyen con sus linealizaciones. En otras palabras, las aproximaciones lineales

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \qquad \text{y} \qquad \cos \theta \approx 1$$

se utilizan porque θ está cerca de 0. Los resultados de los cálculos que se efectúan con estas aproximaciones se convierten en la herramienta teórica básica que se utiliza para diseñar lentes. [Véase *Optics*, 4a. edición, por Eugene Hecht (San Francisco: Addison Wesley, 2002), p. 154.]

En la sección 11.11 aparecen varias aplicaciones de la idea de aproximación lineal a la física.

Diferenciales

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

Si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una razón de diferenciales.

3
$$dy = f'(x)dx$$

Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f, y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

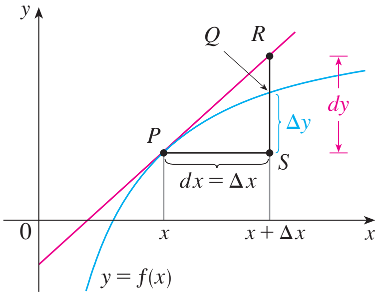


FIGURA 5

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por consiguiente, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

EJEMPLO 3 Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x cambia a) de 2 a 2.05 y b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN

a) Tenemos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

En general, $$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

La figura 6 muestra la función del ejemplo 3 y una comparación de dy y Δy cuando $a = 2$. El rectángulo de vista es $[1.8, 2.5]$ por $[6, 18]$.

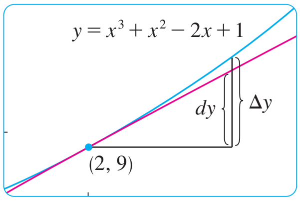


FIGURA 6

b) $$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]\,0.01 = 0.14$$

Observe que, en el ejemplo 3, la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña. Observe también que es más fácil calcular dy que Δy. En el caso de funciones más complicadas, sería imposible calcular exactamente Δy. En estos casos, la aproximación mediante diferenciales es especialmente útil.

En la notación de diferenciales, la aproximación lineal $\boxed{1}$ puede escribirse como

$$f(a + dx) \approx f(\mathrm{a}) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ del ejemplo 1, tenemos que

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, entonces

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y $$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

igual a lo que halló en el ejemplo 1.

Nuestro ejemplo final ilustra el uso de diferenciales al estimar los errores que ocurren debido a mediciones aproximadas.

V EJEMPLO 4 Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en la medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

SOLUCIÓN Si el radio de la esfera es r, entonces el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el error en el valor medido de r se denota por medio de $dr = \Delta r$, entonces el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, el cual puede aproximarse mediante el diferencial

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se convierte en

$$dV = 4\pi(21)^2\, 0.05 \approx 277$$

El error máximo en el volumen calculado es de alrededor de 277 cm^3.

NOTA Si bien el posible error en el ejemplo 4 puede parecer bastante grande, el **error relativo** ofrece un mejor panorama del error; se calcula dividiendo el error entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Por esto, el error relativo en el volumen es aproximadamente tres veces el error relativo en el radio. En el ejemplo 4, el error relativo en el radio es $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de alrededor de 0.007 en el volumen. Los errores pueden expresarse asimismo como **errores de porcentaje** de 0.24% en el radio y 0.7% en el volumen.

3.10 Ejercicios

1-4 Encuentre la linealización $L(x)$ de cada una de las siguientes funciones en $x = a$.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2, \quad a = -1$

2. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

4. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

5. Encuentre la aproximación lineal a la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$ en $a = 0$ y úsela para hacer una aproximación a los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Ilustre graficando f y la recta tangente.

6. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ en $a = 0$ y utilícela para hacer una aproximación a los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustre graficando g y la recta tangente.

7-10 Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. A continuación determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es exacta hasta un valor menor que 0.1.

7. $\ln(1 + x) \approx x$

8. $(1 + x)^{-3} \approx 1 - 3x$

9. $\sqrt[4]{1 + 2x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

10. $e^x \cos x \approx 1 + x$

11-14 Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones.

11. a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ b) $y = \ln\sqrt{1 + t^2}$

12. a) $y = s/(1 + 2s)$ b) $y = e^{-u} \cos u$

13. a) $y = \tan \sqrt{t}$ b) $y = \dfrac{1 - v^2}{1 + v^2}$

14. a) $y = e^{\tan \pi t}$ b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15-18 a) Encuentre la diferencial dy y b) evalúe dy para los valores dados de x y dx en cada una de las siguientes funciones.

15. $y = e^{x/10}, \quad x = 0, \quad dx = 0.1$

16. $y = \cos \pi x, \quad x = \frac{1}{3}, \quad dx = -0.02$

17. $y = \sqrt{3 + x^2}, \quad x = 1, \quad dx = -0.1$

18. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}, \quad x = 2, \quad dx = 0.05$

19-22 Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego elabore un diagrama como el de la figura 5 en el que se muestren los segmentos de recta con longitudes dx, dy y Δy.

19. $y = 2x - x^2, \quad x = 2, \quad \Delta x = -0.4$

20. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad \Delta x = 1$

21. $y = 2/x, \quad x = 4, \quad \Delta x = 1$

22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0.5$

23-28 Utilice la aproximación lineal (o diferenciales) para estimar cada uno de los siguientes números dados.

23. $(1.999)^4$

24. $e^{-0.015}$

25. $\sqrt[3]{1\,001}$

26. $1/4.002$

27. $\tan 44°$

28. $\sqrt{99.8}$

29-31 Explique, en términos de aproximaciones lineales o diferenciales, por qué es razonable la aproximación de cada uno de los siguientes números.

29. $\sec 0.08 \approx 1$

30. $(1.01)^6 \approx 1.06$

31. $\ln 1.05 \approx 0.05$

32. Sean $\quad f(x) = (x - 1)^2 \quad g(x) = e^{-2x}$

y $\quad h(x) = 1 + \ln(1 - 2x)$

a) Encuentre la linealización de f, g y h en $a = 0$. ¿Qué observa? ¿Cómo explica lo que sucedió?

b) Grafique f, g y h y su aproximación lineal. ¿Para cuál función es mejor la aproximación lineal? ¿Para cuál es peor? Explique.

33. Se encontró que la arista de un cubo es 30 cm, con un posible error en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible, el error relativo y el porcentaje de error al calcular a) el volumen del cubo y b) el área superficial del cubo.

34. Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.

a) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.

b) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el porcentaje de error?

35. La circunferencia de una esfera se midió como 84 cm, con un posible error de 0.5 cm.

a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?

b) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

36. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

37. a) Utilice diferenciales para determinar una fórmula para el volumen aproximado de un cascarón cilíndrico de altura h, radio interno r y espesor Δr.

b) ¿Cuál es el error que hay al utilizar la fórmula del inciso a)?

38. Se sabe que un lado de un triángulo rectángulo es de 20 cm de longitud, y se mide el ángulo opuesto como 30°, con un posible error de $\pm 1°$.

a) Utilice diferenciales para estimar el error al calcular la longitud de la hipotenusa.

b) ¿Cuál es el porcentaje de error?

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

39. Si una corriente I pasa a través de un resistor con resistencia R, la ley de Ohm establece que la caída de voltaje es $V = RI$. Si V es constante y R se mide con un cierto error, utilice diferenciales para demostrar que el cálculo de I es aproximadamente el mismo (en magnitud) que el error relativo en R.

40. Cuando la sangre fluye por un vaso sanguíneo, el flujo F (el volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado) es proporcional a la cuarta potencia del radio R de ese vaso:

$$F = kR^4$$

(Ésta se conoce como ley de Poiseuille; en la sección 8.4 se muestra el porqué es verdadera.) Una arteria parcialmente obstruida puede expandirse por medio de una operación llamada angioplastia, en la cual un catéter provisto de un globo en la punta se infla dentro del vaso a fin de ensancharlo y restituir el flujo sanguíneo normal.

Demuestre que el cambio relativo en F es alrededor de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectará un aumento de 5% en el radio al flujo de sangre?

41. Establezca las reglas siguientes para trabajar con diferenciales (donde c es una constante y u y v son funciones de x).

a) $dc = 0$

b) $d(cu) = c\,du$

c) $d(u + v) = du + dv$

d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. En la página 431 de *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), al derivar la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el periodo de un péndulo de longitud L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial del breve movimiento del péndulo. Luego dice "para ángulos pequeños, el valor de θ en radianes está muy cerca del valor de sen θ; difieren menos que 2% hasta alrededor de 20°".

a) Compruebe la aproximación lineal en θ para la función seno:

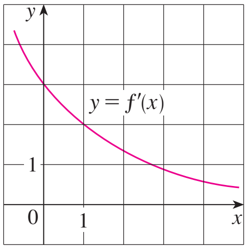
$$\operatorname{sen} x \approx x$$

b) Utilice un dispositivo graficador para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren menos de 2%. Enseguida compruebe la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados.

43. Suponga que la única información acerca de una función f es que $f(1) = 5$ y la gráfica de su *derivada* es como se muestra.

a) Use una aproximación lineal para estimar $f(0.9)$ y $f(1.1)$.

b) ¿Sus estimaciones para el inciso a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.



44. Suponga que no tiene una fórmula para $g(x)$, pero sabe que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x.

a) Use una aproximación lineal para estimar $g(1.95)$ y $g(2.05)$.

b) ¿Sus estimaciones para el inciso a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.

PROYECTO DE LABORATORIO — POLINOMIOS DE TAYLOR

La aproximación por medio de una recta tangente de $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$ cerca de $x = a$ porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma razón de cambio (derivada) en $x = a$. Para tener una mejor aproximación que una lineal, intentemos una aproximación de segundo grado (cuadrática) $P(x)$. En otras palabras, aproximemos una curva mediante una parábola, en lugar de utilizar una recta. Para tener la seguridad de que la aproximación es buena, establecemos lo siguiente:

i) $P(a) = f(a)$ (P y f deben tener el mismo valor en $x = a$.)

ii) $P'(a) = f'(a)$ (P y f deben tener la misma razón de cambio en $x = a$.)

iii) $P''(a) = f''(a)$ (Las pendientes de P y f deben tener la misma razón de cambio en $x = a$.)

1. Encuentre la aproximación cuadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para la función $f(x) = \cos x$, que satisfaga las condiciones i), ii) y iii), con $a = 0$. Grafique P, f y la aproximación lineal $L(x) = 1$ en una pantalla común. Comente qué tan bien las funciones P y L se aproximan a f.

2. Determine los valores de x para los que la aproximación cuadrática $f(x) \approx P(x)$ del problema 1 es exacta con una diferencia menor que 0.1. [*Sugerencia:* grafique $y = P(x)$, $y = \cos x - 0.1$ y $y = \cos x + 0.1$ en una pantalla común.]

Se requiere calculadora graficadora o computadora

3. Para obtener una aproximación de una función f mediante una función cuadrática P cerca de un número $x = a$, lo mejor es escribir P en la forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Demuestre que la función cuadrática que satisface las condiciones i), ii) y iii) es

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encuentre la aproximación para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ cerca de $a = 1$. Trace las gráficas de f, la aproximación cuadrática y la aproximación lineal del ejemplo 2 de la sección 3.10 en una pantalla común. ¿Qué podría concluir?

5. En lugar de quedar conforme con una aproximación lineal o con una cuadrática para $f(x)$, cerca de $x = a$, intente hallar mejores aproximaciones con polinomios de grado más alto. Busque un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus n primeras derivadas tengan los mismos valores en $x = a$ como f y sus n primeras derivadas. Derive repetidas veces y haga $x = a$ para demostrar que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ y, en general,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Se llama **polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrado en $x = a$**.

6. Encuentre el polinomio de Taylor de octavo grado, centrado en $a = 0$, para la función $f(x) = \cos x$. Grafique f junto con los polinomios de Taylor T_2, T_4, T_6 y T_8, en rectángulos de vista $[-5, 5]$ por $[-1.4, 1.4]$ y comente qué tan bien se aproximan a f.

3.11 Funciones hiperbólicas

Ciertas combinaciones pares e impares de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} surgen tan a menudo en las matemáticas y sus aplicaciones que merecen recibir un nombre especial. En muchos aspectos son similares a las funciones trigonométricas y tienen la misma relación con la hipérbola que las funciones trigonométricas tienen con la circunferencia. Por esta razón, se les llama en forma colectiva **funciones hiperbólicas**, y de manera individual se les conoce como **seno hiperbólico**, **coseno hiperbólico**, y así sucesivamente

Definición de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico pueden trazarse mediante la suma gráfica como en las figuras 1 y 2.

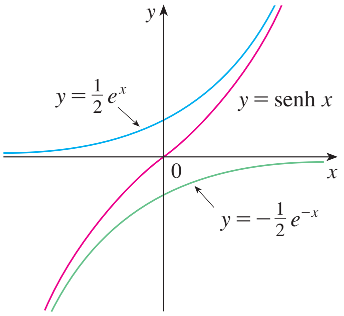


FIGURA 1
$y = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

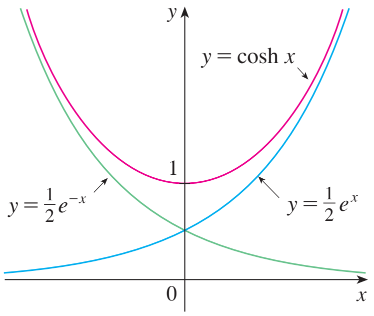


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

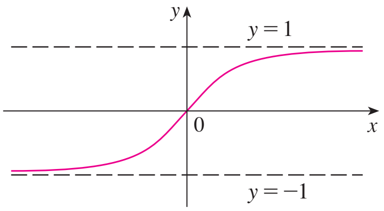


FIGURA 3
$y = \tanh x$

Observe que el dominio de senh es $\mathbb{R}$, y el rango es $\mathbb{R}$, pero que cosh tiene por dominio $\mathbb{R}$ y rango $[1, \infty)$. En la figura 3 se muestra la gráfica de tanh, con sus asíntotas horizontales $y = \pm 1$. (Véase el ejercicio 23.)

Algunos de los usos matemáticos de las funciones hiperbólicas se tratan en el capítulo 7. Las aplicaciones en la ciencia y la ingeniería se tienen siempre que una entidad física como la luz, velocidad, electricidad o la radiactividad, se absorbe o se extingue en forma gradual, puesto que el decaimiento puede representarse mediante funciones hiperbólicas. La aplicación más famosa es el uso del coseno hiperbólico para describir la forma de un cable colgante. Puede demostrarse que si un cable pesado y flexible (como los que se usan para las líneas telefónicas o eléctricas) se tiende entre dos puntos a la misma altura, entonces el cable toma la forma de una curva con ecuación $y = c + a\cosh(x/a)$ que se denomina *catenaria* (véase la figura 4). (Esta palabra proviene de la palabra latina *catena* que significa "cadena".)

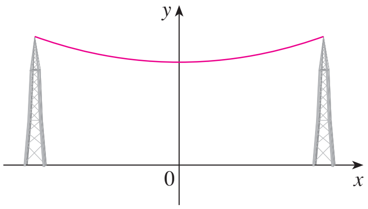


FIGURA 4
Catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$

Otras aplicaciones de las funciones hiperbólicas aparecen en la descripción de las olas del mar: la velocidad de una ola con longitud L que se mueve a través de un cuerpo de agua con profundidad d se modela por la función

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

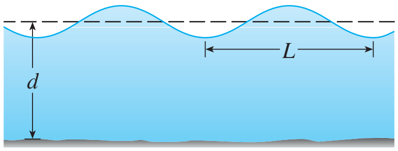


FIGURA 5
Ola oceánica idealizada

donde g es la aceleración debida a la gravedad (véanse la figura 5 y el ejercicio 49).

Las funciones hiperbólicas satisfacen un número de identidades que son similares a las muy bien conocidas identidades trigonométricas. A continuación se enlistan algunas de ellas, y la mayoría de las demostraciones se deja para los ejercicios.

Identidades hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

© 2006 Getty Images

El arco Gateway en St. Louis se diseñó utilizando una función coseno hiperbólico (ejercicio 48).

V EJEMPLO 1 Demuestre que a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ y b) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

SOLUCIÓN

a)
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

b) Empecemos con la identidad demostrada en el inciso (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Si dividimos los dos lados por $\cosh^2 x$, obtenemos

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

o bien
$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

La identidad demostrada en el ejemplo 1a) proporciona una pista sobre el nombre de funciones "hiperbólicas".

Si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ queda sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ porque $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. De hecho, t puede interpretarse como la medida en radianes de $\angle POQ$ de la figura 6. Ésta es la razón por la que las funciones trigonométricas se denominan algunas veces funciones *circulares*.

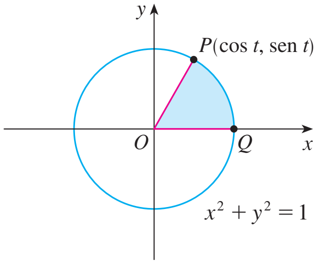


FIGURA 6

De manera similar, si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ queda en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ porque $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ y $\cosh t \geqslant 1$. Pero ahora t no representa la medida de un ángulo. Resulta que t representa el doble del área del sector hiperbólico sombreado de la figura 7, de la misma manera que en el caso trigonométrico t representa el doble del área del sector circular sombreado en la figura 6.

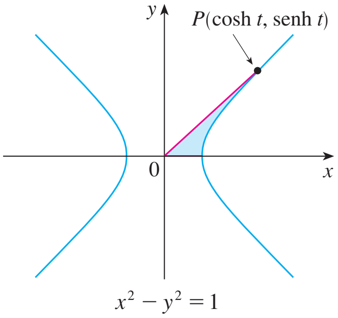


FIGURA 7

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son fáciles de calcular. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

En la tabla 1 siguiente se da una lista de las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas. El resto de las demostraciones se dejan como ejercicios. Observe la similitud con las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas, pero advierta que los signos son diferentes en algunos casos.

1 Derivadas de las funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

EJEMPLO 2 Cualquiera de estas reglas de derivación puede combinarse con la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh \sqrt{x}\right) = \operatorname{senh} \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{\operatorname{senh} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Funciones hiperbólicas inversas

De acuerdo con las figuras 1 y 3, senh x y tanh x son funciones uno a uno por lo que tienen funciones inversas denotadas por $\operatorname{senh}^{-1}x$ y $\tanh^{-1}x$. En la figura 2 se observa que cosh x no es uno a uno, pero que cuando queda restringida al dominio $[0, \infty)$ se transforma en uno a uno. La función coseno hiperbólico inversa se define como la inversa de esta función restringida.

2

$$y = \operatorname{senh}^{-1}x \iff \operatorname{senh} y = x$$
$$y = \cosh^{-1}x \iff \cosh y = x \quad \text{y} \quad y \geqslant 0$$
$$y = \tanh^{-1}x \iff \tanh y = x$$

Las funciones hiperbólicas inversas que faltan se definen de manera similar (véase el ejercicio 28).

Las funciones $\operatorname{senh}^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$ y $\tanh^{-1}x$ se grafican en las figuras 8, 9 y 10 con ayuda de las figuras 1, 2 y 3.

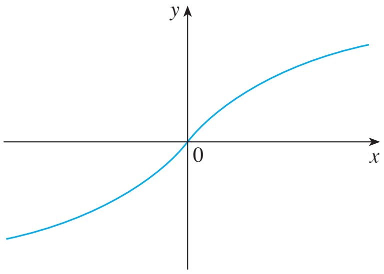


FIGURA 8 $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
dominio $= \mathbb{R}$ rango $= \mathbb{R}$

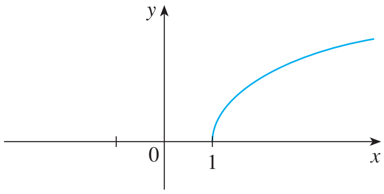


FIGURA 9 $y = \cosh^{-1} x$
dominio $= [1, \infty)$ rango $= [0, \infty)$

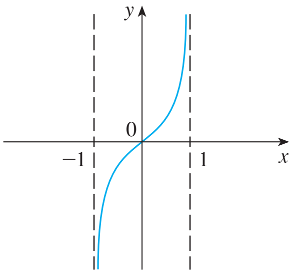


FIGURA 10 $y = \tanh^{-1} x$
dominio $= (-1, 1)$ rango $= \mathbb{R}$

Puesto que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no sorprende que las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos. En particular, se tiene que:

La fórmula 3 se demuestra en el ejemplo 3. En los ejercicios 26 y 27 se piden las demostraciones de las fórmulas 4 y 5.

3 $$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

EJEMPLO 3 Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

SOLUCIÓN Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. En tal caso

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

por lo que $$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

o bien, si multiplicamos por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Esto es ni más ni menos que una ecuación cuadrática en e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática, obtenemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $e^y > 0$, pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (porque $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Así que el signo menos es inadmisible, por lo que tenemos que

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Por tanto, $$y = \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

(Véase el ejercicio 25, donde se ilustra otro método.)

6 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Observe que, al parecer, las fórmulas para las derivadas de $\tanh^{-1}x$ y $\coth^{-1}x$ son idénticas, pero los dominios de estas funciones no tienen números comunes: $\tanh^{-1}x$ se define para $|x| < 1$, mientras que $\coth^{-1}x$ se define para $|x| > 1$.

Las funciones hiperbólicas inversas son derivables porque las funciones hiperbólicas también lo son. Las fórmulas de la tabla 6 pueden demostrarse por el método de las funciones inversas o mediante la derivación de las fórmulas 3, 4 y 5.

V EJEMPLO 4 Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Entonces $\operatorname{senh} y = x$. Si se deriva esta ecuación en forma implícita respecto a x, obtenemos

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Puesto que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ y $\cosh y \geqslant 0$, se tiene $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUCIÓN 2 De acuerdo con la ecuación 3 (demostrada en el ejemplo 3) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

V EJEMPLO 5 Determine $\dfrac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)]$.

SOLUCIÓN Con la ayuda de la tabla 6 y de la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)] &= \frac{1}{1-(\operatorname{sen} x)^2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\\ &= \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x\end{aligned}$$

3.11 Ejercicios

1-6 Calcule el valor numérico de las siguientes expresiones.

1. a) senh 0 b) cosh 0

2. a) tanh 0 b) tanh 1

3. a) senh(ln 2) b) senh 2

4. a) cosh 3 b) cosh(ln 3)

5. a) sech 0 b) $\cosh^{-1} 1$

6. a) senh 1 b) $\operatorname{senh}^{-1} 1$

7-19 Demuestre las siguientes identidades.

7. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
(Esto demuestra que senh x es una función impar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Esto demuestra que cosh x es una función par.)

9. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$

10. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

11. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

12. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

13. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

14. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

15. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

17. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$ (para cualquier número real n).

20. Si $\tanh x = \frac{12}{13}$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

21. Si $\cosh x = \frac{5}{3}$ y $x > 0$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

22. a) Utilice las gráficas de senh x, cosh x y tanh x de las figuras 1 a 3 para dibujar las gráficas de csch x, sech x y coth x.

Se requiere calculadora graficadora o computadora   **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

b) Verifique las gráficas que trazó en el inciso a) mediante una calculadora graficadora o una computadora.

23. Utilice las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar cada uno de los límites siguientes.

a) $\lim_{x\to\infty} \tanh x$ b) $\lim_{x\to-\infty} \tanh x$

c) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{senh} x$ d) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x$

e) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$ f) $\lim_{x\to\infty} \coth x$

g) $\lim_{x\to 0^+} \coth x$ h) $\lim_{x\to 0^-} \coth x$

i) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{csch} x$

24. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 1 para las derivadas de las funciones a) $\cosh x$, b) $\tanh x$, c) $\operatorname{csch} x$, d) $\operatorname{sech} x$ e) $\coth x$.

25. Encuentre una solución alternativa para el ejemplo 3 haciendo $y = \operatorname{senh}^{-1}x$ y luego usando el ejercicio 9 y el ejemplo 1a) en donde y reemplaza a x.

26. Demuestre la ecuación 4.

27. Demuestre la ecuación 5 utilizando a) el método del ejemplo 3 y b) el ejercicio 18 en donde y reemplaza a x.

28. Para cada una de las funciones siguientes i) proporcione una definición como la de $\boxed{2}$, ii) trace la gráfica y encuentre una fórmula similar a la ecuación 3.

a) $\operatorname{csch}^{-1}x$ b) $\operatorname{sech}^{-1}x$ c) $\coth^{-1}x$

29. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 6 para las derivadas de las funciones siguientes.

a) $\cosh^{-1}x$ b) $\tanh^{-1}x$ c) $\operatorname{csch}^{-1}x$

d) $\operatorname{sech}^{-1}x$ e) $\coth^{-1}x$

30-45 Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifique tanto como sea posible.

30. $f(x) = \tanh(1 + e^{2x})$

31. $f(x) = x \operatorname{senh} x - \cosh x$

32. $g(x) = \cosh(\ln x)$

33. $h(x) = \ln(\cosh x)$

34. $y = x \coth(1 + x^2)$

35. $y = e^{\cosh 3x}$

36. $f(t) = \operatorname{csch} t\,(1 - \ln \operatorname{csch} t)$

37. $f(t) = \operatorname{sech}^2(e^t)$

38. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

39. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

40. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

41. $y = \cosh^{-1}\sqrt{x}$

42. $y = x \tanh^{-1}x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

43. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

44. $y = \operatorname{sech}^{-1}(e^{-x})$

45. $y = \coth^{-1}(\sec x)$

---

46. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\sqrt[4]{\dfrac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}} = \frac{1}{2}e^{x/2}$

47. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\arctan(\tanh x) = \operatorname{sech} 2x$.

48. El arco Gateway en St. Louis fue diseñado por Eero Saarinen y construido empleando la ecuación

$$y = 211.49 - 20.96 \cosh 0.03291765x$$

para la curva central del arco, donde x y y se miden en metros y $|x| \leqslant 91.20$.

a) Grafique la curva central.
b) ¿Cuál es la altura del arco en su centro?
c) ¿En qué punto la altura es de 100 m?
d) ¿Cuál es la pendiente del arco en el punto del inciso c)?

49. Si las olas del mar con longitud L se mueven con velocidad v en un cuerpo de agua con profundidad d, entonces

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (véase la figura 5). Explique por qué la aproximación

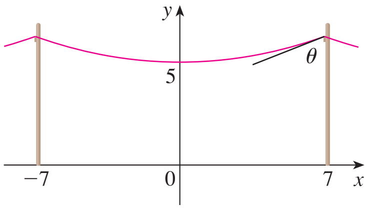
$$v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

es apropiada en aguas profundas.

50. Un cable flexible colgante siempre forma una catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$, donde c y a son constantes y $a > 0$ (véase la figura 4 y el ejercicio 52). Grafique varios miembros de la familia de las funciones $y = a\cosh(x/a)$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando a varía?

51. Un cable de teléfono cuelga entre dos postes que están separados entre sí 14 m y forma la catenaria $y = 20\cosh(x/20) - 15$, donde x y y se miden en metros.

a) Encuentre la pendiente de esta curva donde se encuentra con el poste derecho.
b) Calcule el ángulo θ entre el cable y el poste.



52. Mediante los principios de la física puede demostrarse que cuando un cable cuelga entre dos postes toma la forma de una curva $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, g es la aceleración de la gravedad y T es la tensión del cable en su punto más bajo. El sistema coordenado se elige en forma adecuada. Compruebe que la función

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

es una solución de esta ecuación diferencial.

53. Un cable con densidad lineal $\rho = 2\,\text{kg/m}$ se sujeta desde la parte alta de dos postes que están separados 200 m.

a) Utilice el ejercicio 52 para calcular la tensión T que hay en el cable cuando está en su punto más bajo a 60 m del suelo ¿Qué tan alto son los postes?

b) Si se duplica la tensión, ¿cuál es el nuevo punto bajo del cable? ¿Qué tan altos son ahora los polos?

54. Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\text{senh}\, x}{e^x}$.

55. a) Demuestre que cualquier función de la forma

$$y = A\ \text{senh}\ mx + B \cosh mx$$

satisface la ecuación diferencial $y'' = m^2y$.

b) Determine $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$ y $y'(0) = 6$.

56. Si $x = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$, demuestre que $\sec\theta = \cosh x$.

57. ¿En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1?

58. Investigue la familia de funciones

$$f_n(x) = \tanh(n\ \text{sen}\ x)$$

donde n es un entero positivo. Describa qué pasa con la gráfica de f_n cuando n es muy grande.

59. Demuestre que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces existen números α y β tales que $ae^x + be^{-x}$ es igual a $\alpha\ \text{senh}(x + \beta)$ o a $\alpha \cosh(x + \beta)$. En otras palabras, casi toda función de la forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ es una función seno hiperbólico o coseno hiperbólico desplazada o estirada.

3 Repaso

Verificación de conceptos

1. Exprese cada una de las siguientes reglas de derivación, tanto en símbolos como en palabras.

a) Regla de la potencia
b) Regla del múltiplo constante
c) Regla de la suma
d) Regla de la diferencia
e) Regla del producto
f) Regla del cociente
g) Regla de la cadena

2. Obtenga las derivadas de cada una de las siguientes funciones.

a) $y = x^n$ b) $y = e^x$ c) $y = a^x$
d) $y = \ln x$ e) $y = \log_a x$ f) $y = \text{sen}\ x$
g) $y = \cos x$ h) $y = \tan x$ i) $y = \csc x$
j) $y = \sec x$ k) $y = \cot x$ l) $y = \text{sen}^{-1}x$
m) $y = \cos^{-1}x$ n) $y = \tan^{-1}x$ o) $y = \text{senh}\ x$
p) $y = \cosh x$ q) $y = \tanh x$ r) $y = \text{senh}^{-1}x$
s) $y = \cosh^{-1}x$ t) $y = \tanh^{-1}x$

3. a) ¿Cómo se define el número e?

b) Exprese e como un límite.

c) ¿Por qué en Cálculo se usa la función exponencial natural, $y = e^x$, con más frecuencia que las demás funciones exponenciales, $y = a^x$?

d) ¿Por qué en Cálculo se usa la función logarítmica natural, $y = \ln x$, más que las demás funciones logarítmicas, $y = \log_a x$?

4. a) Explique cómo funciona la derivación implícita.

b) Explique cómo funciona la derivación logarítmica.

5. Proporcione varios ejemplos de cómo la derivada puede ser interpretada como una razón de cambio en física, química, biología, economía y otras ciencias.

6. a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de crecimiento natural.

b) ¿En qué circunstancias es éste un modelo adecuado para el crecimiento de la población?

c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

7. a) Escriba una expresión para la linealización de f en $x = a$.

b) Si $y = f(x)$, escriba una expresión para la diferencial dy.

c) Si $dx = \Delta x$, dibuje un esquema para mostrar el significado geométrico de Δy y dy.

Exámen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o mencione un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Si $y = e^2$, entonces $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. La derivada de una función polinomial es una función polinomial.

12. Si $f(x) = (x^6 - x^4)^5$, entonces $f^{(31)}(x) = 0$.

13. La derivada de una función racional es una función racional.

14. La ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en $(-2, 4)$ es $y - 4 = 2x(x + 2)$.

15. Si $g(x) = x^5$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

Ejercicios

1-50 Calcule y' en cada una de las siguientes funciones.

1. $y = (x^2 + x^3)^4$

2. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

3. $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{\sqrt{x}}$

4. $y = \dfrac{\tan x}{1 + \cos x}$

5. $y = x^2 \operatorname{sen} \pi x$

6. $y = x \cos^{-1} x$

7. $y = \dfrac{t^4 - 1}{t^4 + 1}$

8. $xe^y = y \operatorname{sen} x$

9. $y = \ln(x \ln x)$

10. $y = e^{mx} \cos nx$

11. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

12. $y = (\arcsen 2x)^2$

13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

14. $y = \ln \sec x$

15. $y + x \cos y = x^2 y$

16. $y = \left(\dfrac{u - 1}{u^2 + u + 1}\right)^4$

17. $y = \sqrt{\arctan x}$

18. $y = \cot(\csc x)$

19. $y = \tan\left(\dfrac{t}{1 + t^2}\right)$

20. $y = e^{x \sec x}$

21. $y = 3^{x \ln x}$

22. $y = \sec(1 + x^2)$

23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$

30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$

31. $y = x \tan^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

33. $y = \ln|\sec 5x + \tan 5x|$

34. $y = 10^{\tan \pi\theta}$

35. $y = \cot(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$

37. $y = \operatorname{sen}\left(\tan \sqrt{1 + x^3}\right)$

38. $y = \arctan\left(\arcsen \sqrt{x}\right)$

39. $y = \tan^2(\operatorname{sen} \theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}\,(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

43. $y = x \operatorname{senh}(x^2)$

44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$

48. $y = x \tanh^{-1}\sqrt{x}$

49. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$

50. $y = \operatorname{sen}^2\left(\cos\sqrt{\operatorname{sen} \pi x}\right)$

---

51. Si $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, encuentre $f''(2)$.

52. Si $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, halle $g''(\pi/6)$.

53. Encuentre y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

54. Determine $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Utilice inducción matemática (página 76) para demostrar que si $f(x) = xe^x$, entonces $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Evalúe $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{t^3}{\tan^3(2t)}$.

57-59 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

57. $y = 4 \operatorname{sen}^2 x$, $(\pi/6, 1)$

58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $(0, -1)$

59. $y = \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen} x}$, $(0, 1)$

60-61 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las siguientes curvas en el punto que se especifica.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13$, $(2, 1)$

61. $y = (2 + x)e^{-x}$, $(0, 2)$

---

62. Si $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, halle $f'(x)$. Grafique f y f' en la misma pantalla y haga comentarios.

63. a) Si $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, halle $f'(x)$.
b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x\sqrt{5 - x}$ en los puntos $(1, 2)$ y $(4, 4)$.
c) Ilustre el inciso b) graficando la curva y las rectas tangentes, en la misma pantalla.
d) Verifique si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

64. a) Si $f(x) = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encuentre f' y f''.
b) Verifique si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f, f' y f''.

65. ¿En qué puntos de la curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, la tangente es una recta horizontal?

66. Encuentre los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde la recta tangente tiene pendiente 1.

67. Si $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, demuestre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

68. a) Al derivar la fórmula del coseno dos veces ángulo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

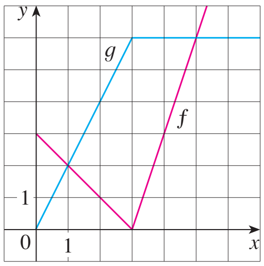
obtenga la fórmula del ángulo doble para la función seno.
b) Al derivar la fórmula de la adición

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

obtenga la fórmula de la adición para la función coseno.

69. Suponga que $h(x) = f(x)g(x)$ y $F(x) = f(g(x))$, donde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $f'(5) = 11$. Encuentre a) $h'(2)$ y b) $F'(2)$.

70. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sea $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ y $C(x) = f(g(x))$. Encuentre a) $P'(2)$, b) $Q'(2)$ y c) $C'(2)$.



71-78 Encuentre f' en términos de g'.

71. $f(x) = x^2 g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln|g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79-81 Halle h' en términos de f' y g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} 4x))$

82. a) Grafique la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ en el rectángulo de vista $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
b) ¿Sobre qué intervalo es más grande la razón promedio de cambio: $[1, 2]$ o $[2, 3]$?
c) ¿En qué valor de x es más grande la razón de cambio instantánea: $x = 2$ o $x = 5$?
d) Compruebe sus estimaciones visuales del inciso c) calculando $f'(x)$ y comparando los valores numéricos de $f'(2)$ y $f'(5)$.

83. ¿En qué punto sobre la curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ es horizontal la recta tangente?

84. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$, que es paralela a la recta $x - 4y = 1$.
b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ que pase por el origen.

85. Halle la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto $(1, 4)$ y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 5$ tienen pendientes 6 y -2, respectivamente.

86. La función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$, se usa para modelar la concentración en el instante t de un medicamento que se inyecta en el torrente sanguíneo.
a) Demuestre que $\lim_{t \to \infty} C(t) = 0$.
b) Encuentre $C'(t)$, la rapidez con que el medicamento se disipa durante la circulación.
c) ¿Cuándo esta rapidez es igual a 0?

87. Una ecuación de movimiento en la forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa la oscilación amortiguada de un objeto. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto.

88. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de modo que su coordenada en el instante t es $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geqslant 0$, donde b y c son constantes positivas.
a) Encuentre las funciones velocidad y aceleración.
b) Demuestre que la partícula siempre se desplaza en dirección positiva.

89. Una partícula se desplaza sobre una recta vertical de manera que su ordenada en el instante t es $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geqslant 0$.
a) Encuentre las funciones velocidad y aceleración.
b) ¿Cuándo se mueve hacia arriba la partícula y cuándo se mueve hacia abajo?
c) Halle la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant 3$.
d) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 3$.
e) ¿Cuándo la partícula aumenta su rapidez? ¿Cuándo disminuye su rapidez?

90. El volumen de un cono recto circular es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, en donde r es el radio de la base y h es la altura.
a) Halle la razón de cambio del volumen respecto a la altura si el radio es constante.

b) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto al radio si la altura es constante.

91. La masa de una parte de un alambre es $x(1 + \sqrt{x})$ kilogramos, donde x se mide en metros desde uno de los extremos del alambre. Encuentre la densidad lineal del alambre cuando $x = 4$ m.

92. El costo, en dólares, de producir x unidades de un cierto artículo es

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

a) Encuentre la función de costo marginal.
b) Halle $C'(100)$ y explique su significado.
c) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

93. Inicialmente, un cultivo de bacterias contiene 200 células y crecen con una razón proporcional a su tamaño. Después de media hora la población se ha incrementado a 360 células.
a) Encuentre el número de bacterias después de t horas.
b) Calcule el número de bacterias después de 4 horas.
c) Encuentre la rapidez de crecimiento después de 4 horas.
d) ¿Cuándo la población alcanza 10 000?

94. El cobalto-60 tiene una vida media de 5.24 años.
a) Halle la masa que queda de una muestra de 100 mg después de 20 años.
b) ¿Cuánto tardaría la masa en decaer a 1 mg?

95. Sea $C(t)$ la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo. Cuando el cuerpo elimina el medicamento, $C(t)$ disminuye con una rapidez que es proporcional a la cantidad de medicamento que está presente en el tiempo t. En estos términos $C'(t) = -kC(t)$, donde k es un número positivo denominado *constante de eliminación* del medicamento.
a) Si C_0 es la concentración en el tiempo $t = 0$, halle la concentración en el tiempo t.
b) Si el cuerpo elimina la mitad del medicamento en 30 horas, ¿cuánto tiempo le toma eliminar 90% del medicamento?

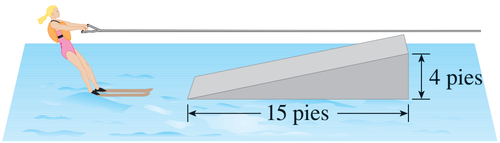
96. Una taza con chocolate caliente tiene una temperatura de 80 °C en una habitación que se mantiene en 20 °C. Después de media hora, el chocolate caliente se enfría a 60 °C.
a) ¿Cuál es la temperatura del chocolate después de otra media hora.
b) ¿Cuando se enfriara el chocolate a 40 °C?

97. El volumen de un cubo se incrementa a razón de 10 cm³/min. ¿Qué tan rápido se incrementa el área superficial cuando la longitud de un lado es de 30 cm?

98. Un vaso de papel tiene la forma de un cono de altura igual a 10 cm y radio de 3 cm (en la parte superior). Si el agua se vierte en el vaso a razón de 2 cm³/s, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene 5 cm de profundidad?

99. Un globo asciende con rapidez constante de 5 pies/s. Un niño va en bicicleta por un camino recto a una rapidez de 15 pies/s. Cuando pasa bajo el globo, éste se halla a 45 pies arriba de él. ¿Qué tan rápido se incrementa la distancia entre el niño y el globo 3 s más tarde?

100. Una esquiadora pasa por rampa, como la que se ilustra en la figura, con una rapidez de 30 pies/s. ¿Qué tan rápido se eleva cuando abandona la rampa?



101. El ángulo de elevación del Sol decrece a razón de 0.25 rad/h. ¿Qué tan rápido se incrementa la sombra de un edificio de 400 pies de altura cuando el ángulo de elevación del Sol es $\pi/6$?

102. a) Encuentre la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ cerca de 3.
b) Ilustre el inciso a) graficando f y la aproximación lineal.
c) ¿Para qué valores de x es exacta la aproximación lineal dentro de 0.1?

103. a) Halle la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Establezca la aproximación lineal correspondiente y utilícela para proporcionar un valor aproximado para $\sqrt[3]{1.03}$.
b) Determine los valores de x para los que la aproximación lineal dada en el inciso a) sea exacta con una diferencia menor que 0.1.

104. Evalúe dy si $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ y $dx = 0.2$.

105. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm, con un posible error de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el máximo error posible al calcular el área de la ventana.

106-108 Exprese el límite como una derivada en cada una de las siguientes funciones y evalúelo.

106. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\displaystyle \lim_{\theta \to \pi/3} \frac{\cos \theta - 0.5}{\theta - \pi/3}$

---

109. Evalúe $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$

110. Suponga que f es una función derivable tal que $f(g(x)) = x$ y $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Demuestre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

112. Demuestre que la longitud de la porción de cualquier recta tangente al astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ limitada por los ejes de coordenadas es constante.

Problemas adicionales

Antes de trabajar en el ejemplo, cubra la solución e intente resolverlo primero.

EJEMPLO 1 ¿Cuántas rectas son tangentes a las dos parábolas $y = -1 - x^2$ y $y = 1 + x^2$? Calcule las coordenadas de los puntos en los cuales estas rectas tangentes tocan a las parábolas.

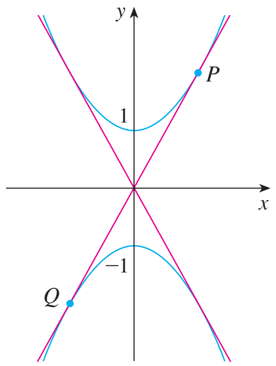


FIGURA 1

SOLUCIÓN Para entender este problema es esencial elaborar un esquema donde estén las parábolas $y = 1 + x^2$ (que es la parábola estándar $y = x^2$ desplazada una unidad hacia arriba) y $y = -1 - x^2$ (la cual se obtiene al reflejar la primera parábola respecto al eje x). Si trata de dibujar una recta tangente para ambas parábolas, pronto descubrirá que sólo hay dos posibilidades, que se ilustran en la figura 1.

Sea P un punto en el cual una de estas rectas tangentes toca la parábola superior y sea a su coordenada x. (Es muy importante elegir la notación para la incógnita. Muy bien podía haber escogido b o c o x_0 o x_1, en lugar de a. Sin embargo, no se recomienda utilizar x en lugar de a porque se podría confundir con la variable x de la ecuación de la parábola). Entonces, puesto que P está en la parábola $y = 1 + x^2$, su coordenada y debe ser $1 + a^2$. Debido a la simetría mostrada en la figura 1, las coordenadas del punto Q donde la recta tangente toca a la parábola inferior deben ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar la información de que la recta es una tangente, iguale la pendiente de la recta PQ con la pendiente de la recta tangente en P. Así, tiene que

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Si $f(x) = 1 + x^2$, entonces la pendiente de la recta tangente en P es $f'(a) = 2a$. Por consiguiente, la condición que necesita aplicar es

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Al resolver esta ecuación, tenemos $1 + a^2 = 2a^2$, por lo que $a^2 = 1$ y $a = \pm 1$. Por tanto, los puntos son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. Por simetría, los dos puntos restantes son $(-1, 2)$ y $(1, -2)$.

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de c la ecuación $\ln x = cx^2$ tiene exactamente una solución?

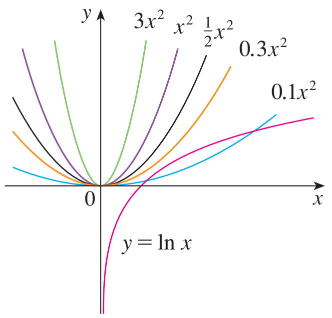


FIGURA 2

SOLUCIÓN Uno de los principios más importantes de la solución de problemas es dibujar un diagrama, incluso si el problema, según se enuncia, no menciona en forma explícita una situación geométrica. Este problema puede formularse de nuevo en términos geométricos como sigue: ¿para cuáles valores de c la curva $y = \ln x$ intersecta la curva $y = cx^2$ exactamente en un punto?

Empiece por trazar las gráficas de $y = \ln x$ y $y = cx^2$ para diversos valores de c. Se sabe que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ es una parábola que se abre hacia arriba si $c > 0$ y, hacia abajo, si $c < 0$. En la figura 2 se muestran las parábolas $y = cx^2$ para varios valores positivos de c. La mayor parte no se cruzan con $y = \ln x$ y una la corta dos veces. Se tiene la sensación de que debe haber un valor de c (en alguna parte entre 0.1 y 0.3) para el cual las curvas se cruzan exactamente una vez, como en la figura 3.

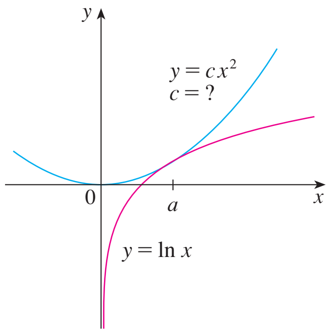


FIGURA 3

Para hallar ese valor de c en particular, denote con a la coordenada x del punto único de intersección. En otras palabras, $\ln a = ca^2$, de modo que a sea la solución única de la ecuación dada. En la figura 2 las curvas sólo se tocan, de modo que tienen una recta tangente común cuando $x = a$. Esto significa que las curvas $y = \ln x$ y $y = cx^2$ tienen la misma pendiente cuando $x = a$. Por tanto,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Resolviendo las ecuaciones $\ln a = ca^2$ y $1/a = 2ca$, se obtiene

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

De donde, $a = e^{1/2}$ y

$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

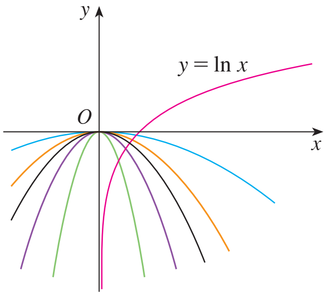


FIGURA 4

Para los valores negativos de c, tenemos la situación que se ilustra en la figura 4: todas las parábolas $y = cx^2$ con valores negativos de c cruzan $y = \ln x$ exactamente una vez. Y no olvide lo referente a $c = 0$. La curva $y = Ox^2 = 0$ es el eje x, el cual cruza $y = \ln x$ exactamente una vez.

Para resumir, los valores requeridos de c son $c = 1/(2e)$ y $c \leq 0$.

Problemas

1. Determine los puntos P y Q sobre la parábola $y = 1 - x^2$ de modo que el triángulo ABC formado por el eje x y las rectas tangentes en P y Q sea un triángulo equilátero. (Véase la figura.)

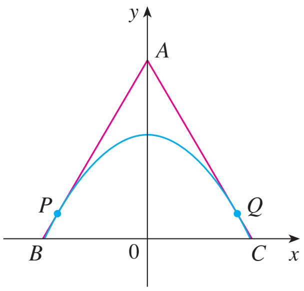


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

2. Determine el punto donde las curvas $y = x^3 - 3x + 4$ y $y = 3(x^2 - x)$ son tangentes entre sí; es decir, tienen una recta tangente común. Ilustre mediante la representación gráfica de ambas curvas y la recta tangente.

3. Demuestre que las rectas tangentes a la parábola $y = ax^3 + bx + c$ en cualesquier dos puntos con coordenadas x iguales a p y q se cruzan en un punto cuya coordenada x está a la mitad entre p y q.

4. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}\right) = -\cos 2x$$

5. Si $f(x) = \lim_{t \to x} \dfrac{\sec t - \sec x}{t - x}$, encuentre el valor de $f'(\pi/4)$.

6. Encuentre los valores de las constantes a y b tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax + b} - 2}{x} = \frac{5}{12}$$

7. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

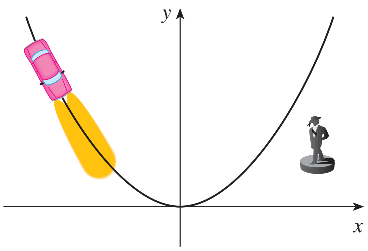


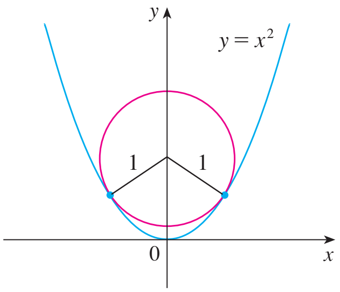
FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

8. Un automóvil viaja por la noche por una carretera que tiene forma de parábola con vértice en el origen (véase la figura). El automóvil parte del punto 100 m al oeste y 100 m al norte del origen, y se desplaza en una dirección hacia el este. Hay una estatua localizada 100 m al este y 50 m al norte del origen. ¿En qué punto de la carretera los faros del vehículo iluminarán a la estatua?

9. Demuestre que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

10. Determine la n-ésima derivada de la función $f(x) = x^n/(1 - x)$.

11. En la figura se muestra una circunferencia con radio 1 inscrita en la parábola $y = x^2$. Encuentre el centro de la circunferencia.



12. Si f es derivable en a, donde $a > 0$, evalúe el siguiente límite en términos de $f'(a)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

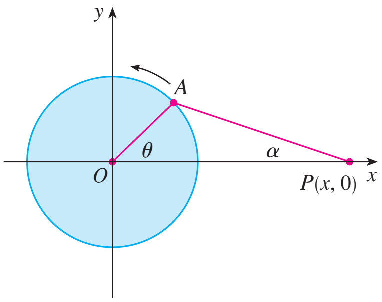


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

13. En la figura se muestra una rueda giratoria con radio de 40 cm y una leva AP de longitud 1.2 m. El pasador P se desliza hacia atrás y hacia adelante, a lo largo del eje x, conforme la rueda gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, con una rapidez de 360 revoluciones por minuto.

a) Encuentre la velocidad angular de la leva, $d\alpha/dt$, en radianes por segundo, cuando $\theta = \pi/3$.

b) Exprese la distancia $x = |OP|$, en términos de θ.

c) Halle una expresión para la velocidad del pasador P, en términos de θ.

14. Se trazan las rectas tangentes T_1 y T_2 en los dos puntos P_1 y P_2 sobre la parábola $y = x^2$ y se cruzan en un punto P. Se traza otra recta tangente T en un punto entre P_1 y P_2; ésta cruza T_1 en Q_1 y T_2 en Q_2. Demuestre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

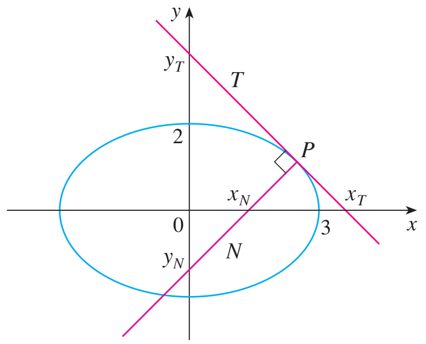
15. Demuestre que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\operatorname{sen} bx) = r^n e^{ax}\operatorname{sen}(bx + n\theta)$$

donde a y b son números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$, y $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

16. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$.

17. Sean T y N las rectas tangente y normal a la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ en cualquier punto P de ésta en el primer cuadrante. Sean x_T y y_T las intersecciones de T con los ejes x y y, y x_N y y_N las intersecciones de N. Conforme P se mueve a lo largo de la elipse en el primer cuadrante (pero no sobre los ejes), ¿qué valores pueden adoptar x_T, y_T, x_N y y_N? En primer lugar, intente intuir las respuestas con sólo mirar la figura. A continuación, utilice el Cálculo para resolver el problema y vea qué tan buena es su intuición.



18. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$

19. a) Use la identidad para $\tan(x - y)$ [véase la ecuación 14b) del apéndice D] para demostrar que si dos rectas L_1 y L_2 se intersecan en un ángulo α, entonces

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

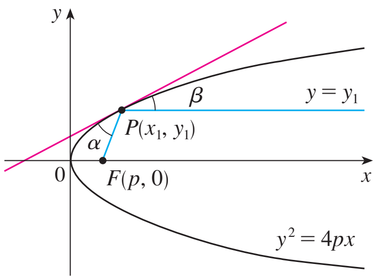
donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.

b) El **ángulo entre las curvas** C_1 y C_2 en un punto de intersección se define como el ángulo entre las rectas tangentes a C_1 y C_2 en P (si estas rectas tangentes existen). Use el inciso a) para hallar, correcto hasta el grado más cercano, el ángulo entre cada par de curvas en cada punto de intersección.

i) $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$

ii) $x^2 - y^2 = 3$ y $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

20. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la parábola $y^2 = 4px$ con foco $F(p, 0)$. Sea α el ángulo entre la parábola y el segmento rectilíneo FP, y sea β el ángulo entre la recta horizontal $y = y_1$ y la parábola, como en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (De modo que, por un principio de óptica geométrica, la luz proveniente de una fuente colocada en F se reflejará a lo largo de una recta paralela al eje x. Esto explica por qué los *paraboloides*, las superficies que se obtienen al hacer girar las parábolas sobre sus ejes, se emplean como la forma de algunos faros delanteros de automóviles y espejos para telescopios).



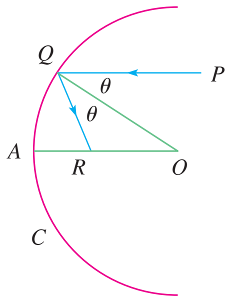


FIGURA PARA EL PROBLEMA 21

21. Suponga que remplaza el espejo parabólico que aparece en el problema 20 con un espejo esférico. Aunque el espejo no tiene foco, puede demostrar la existencia de un foco *aproximado*. En la figura, C es un semicírculo con centro O. Un rayo de luz que llega hacia el espejo paralelo al eje a lo largo de la recta PQ se reflejará hacia el punto R sobre el eje, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). ¿Qué sucede con el punto R a medida que P se lleva cada vez más cerca al eje?

22. Si f y g son funciones derivables con $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

23. Evalúe $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$

SAC **24.** a) La función cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tiene tres ceros distintos: 0, 2 y 6. Grafique f y sus rectas tangentes en el *promedio* de cada par de ceros. ¿Qué observa?

b) Suponga que la función cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tiene tres ceros diferentes: a, b y c. Pruebe, con ayuda de un sistema algebraico computarizado, que una recta tangente dibujada en el promedio de los ceros a y b interseca la gráfica de f en el tercer cero.

25. ¿Para qué valor de k la ecuación $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tiene exactamente una solución?

26. ¿Para qué números positivos a se cumple que $a^x \geqslant 1 + x$ para toda x?

27. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

demuestre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

28. Dada una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a \neq b$, encuentre la ecuación de todo el conjunto de puntos a partir de los cuales hay dos rectas tangentes a la curva cuyas pendientes son a) recíprocos y b) recíprocos negativos.

29. Encuentre los dos puntos sobre la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una recta tangente en común.

30. Suponga que tres puntos sobre la parábola $y = x^2$ tienen la propiedad de que sus rectas normales se cruzan en un punto común. Demuestre que la suma de sus coordenadas x es cero.

31. Un *punto de reticulado* sobre el plano es un punto con coordenadas enteras. Suponga que se dibujan circunferencias con radio r usando todos los puntos reticulados como centros. Encuentre el valor más pequeño de r tal que cualquier recta con pendiente $\frac{2}{5}$ cruce alguna de estas circunferencias.

32. Un cono de radio r centímetros y altura h centímetros se introduce por la punta con una rapidez de 1 cm/s en un cilindro alto de radio R centímetros que contiene una parte de agua. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua en el instante en que el cono está totalmente sumergido?

33. Un recipiente en forma de cono invertido tiene una altura de 16 cm y su radio mide 5 cm en la parte superior. Está lleno en parte con un líquido que escurre por los lados con una rapidez proporcional al área del recipiente que está en contacto con el líquido. [El área superficial de un cono es πrl, donde r es el radio y l es la altura inclinada.] Si vierte líquido en el recipiente a razón de 2 cm^3/min, entonces la altura del líquido disminuye a razón de 0.3 cm/min cuando la altura es de 10 cm. Si el objetivo es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿a qué rapidez debe verter líquido al recipiente?

4 Aplicaciones de la derivada

El cálculo que usted aprenderá en este capítulo le permitirá explicar la posición del arcoíris en el cielo y por qué los colores del arcoíris secundario aparecen en el orden invertido a las del arcoíris primario. (Véase el proyecto de las páginas 282-283.)

© Pichugin Dmitry / Shutterstock

Ya hemos investigado algunas de las aplicaciones de la derivada, pero ahora que conocemos las reglas de derivación nos encontramos en mejor posición para continuar con mayor profundidad con las aplicaciones de la derivada. Aquí aprenderemos cómo la derivada afecta la forma de una gráfica de una función y, particularmente, cómo ayuda a localizar valores máximos y mínimos de funciones. En la práctica muchos problemas exigen minimizar un costo o maximizar un área, o bien, encontrar el mejor resultado posible para una situación. En particular, seremos capaces de investigar la forma óptima de una lata y explicar la ubicación de los arcoíris en el cielo.

4.1 Valores máximos y mínimos

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo. Algunos ejemplos de los problemas que resolveremos en este capítulo son.

- ¿Cuál debe ser la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuá1 es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? (Ésta es una importante pregunta para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

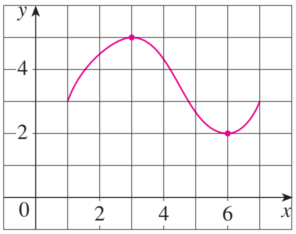


FIGURA 1

Estos problemas pueden reducirse a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. Para empezar, primero explicaremos exactamente lo que son estos valores.

En la figura 1, se muestra la gráfica de una función en la que el punto más alto es $(3, 5)$. En otras palabras, el valor más grande de f es $f(3) = 5$. Por otro lado, el valor más pequeño es $f(6) = 2$. Decimos que $f(3) = 5$ es el *máximo absoluto* de f y $f(6) = 2$ es el *mínimo absoluto*. En general, usamos la siguiente definición:

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

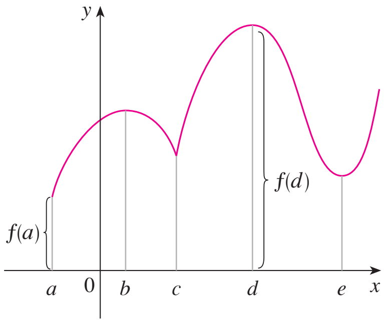


FIGURA 2

Mínimo absoluto $f(a)$, máximo absoluto $f(d)$, mínimos locales $f(c)$, $f(e)$, máximos locales $f(b)$, $f(d)$

Un máximo o mínimo absolutos se les llama a veces máximo o mínimo **global**. Los valores máximo y mínimo de f se llaman **valores extremos** de f.

La figura 2 muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en $x = d$ y mínimo absoluto en $x = a$. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto sobre la gráfica y $(a, f(a))$ es el punto más bajo. En la figura 2, si consideramos sólo valores de x cercanos a b [p. ej., si restringimos nuestra atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de estos valores de $f(x)$ y se llama *valor máximo local* de f. Por otro lado, $f(c)$ se llama valor *mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercana a c [en el intervalo (b, d), por ejemplo]. La función f también tiene un mínimo local en $x = e$. En general, tenemos la siguiente definición.

2 Definición El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

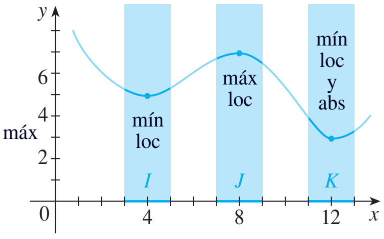


FIGURA 3

En la definición 2 (y en otros lugares), si decimos que algo es cierto **cerca** de c, queremos decir que es cierto en algún intervalo abierto que contiene a c. Por ejemplo, en la figura 3 vemos que $f(4) = 5$ es un mínimo local porque es el menor valor de f en el intervalo I. No es el mínimo absoluto porque $f(x)$ tiene valores menores cuando x está cerca de 12 (en el intervalo de K, por ejemplo). De hecho $f(12) = 3$ es un mínimo local y el mínimo absoluto. De modo similar, $f(8) = 7$ es un máximo local, pero no el máximo absoluto porque f toma valores más grandes cerca de 1.

EJEMPLO 1 La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) igual a 1, infinitas veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero.

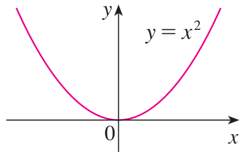


FIGURA 4
Valor mínimo = 0. No hay máximo

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$ porque $x^2 \geqslant 0$ para toda x. Por tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 4.) Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo.

EJEMPLO 3 En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que se muestra en la figura 5, se ve que no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales.

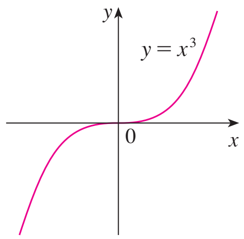


FIGURA 5
No hay mínimo ni máximo

V EJEMPLO 4 La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

se muestra en la figura 6. Podemos observar que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.) Asimismo, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Observe que f no tiene valor local ni máximo absoluto en $x = 4$.

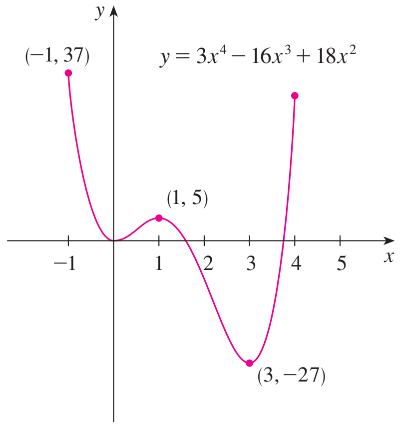


FIGURA 6

Hemos visto que algunas funciones tienen valores extremos, mientras que otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

> **3 Teorema del valor extremo** Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 7 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es muy aceptable a nivel intuitivo, su demostración es difícil, por consiguiente, se omite.

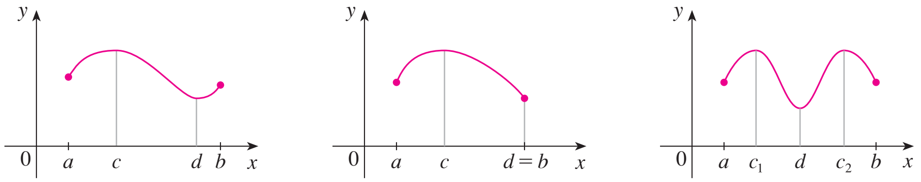


FIGURA 7

En las figuras 8 y 9 se muestra que una función no tiene que poseer valores extremos si no se satisface cualquiera de las dos hipótesis (continuidad o intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

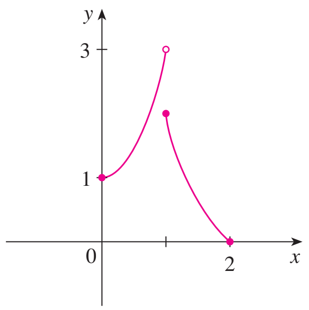


FIGURA 8
Esta función tiene un valor mínimo $f(2) = 0$, pero no tiene valor máximo.

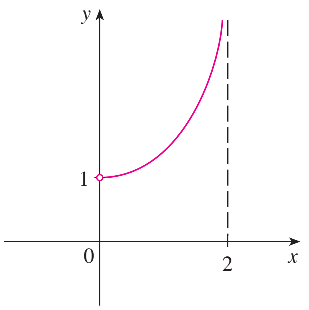


FIGURA 9
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 8, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$, pero no tiene valor máximo. (Observe que el rango de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua *pudiera* tener valores máximo y mínimo. Véase el ejercicio 13b.]

La función g que se muestra en la figura 9 es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [El rango de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo señala que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Empecemos por buscar valores extremos locales.

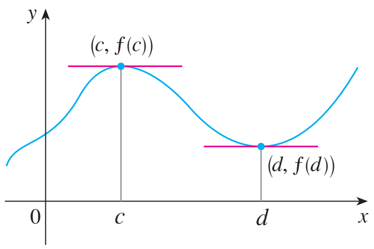


FIGURA 10

En la figura 10 se muestra la gráfica de una función f con un máximo local en $x = c$ y un mínimo local en $x = d$. Parece que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que parece que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

Fermat

El teorema de Fermat lleva ese nombre en honor de Pierre Fermat (1601-1665), un abogado francés que tomó a las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar rectas tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención del límite y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del Cálculo Diferencial.

4 **Teorema de Fermat** Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

DEMOSTRACIÓN Para la consideración de la conclusión, suponga que f tiene un máximo local en $x = c$. Entonces, según la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x es suficientemente cercana a c. Esto implica que, si h está lo suficiente cerca de 0 y es positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

y, por consiguiente,

5
$$f(c + h) - f(c) \leqslant 0$$

Podemos dividir ambos lados de la desigualdad entre un número positivo. Así, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, tenemos

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando el límite por la derecha de ambos lados de la desigualdad (utilizando el teorema 2.3.2), obtenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Pero, dado que f'(c) existe, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

y con esto se demuestra que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad 5 se invierte cuando dividimos por h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Así que tomando el límite por la izquierda, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ya hemos mostrado que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Ya hemos demostrado el teorema de Fermat para el caso de un máximo local. El caso de un mínimo local puede demostrarse de modo similar, o bien, puede usar el ejercicio 76 para deducirlo del caso que ya ha demostrado (véase el ejercicio 77).

Los ejemplos siguientes advierten contra la interpretación excesiva del teorema de Fermat. No podemos esperar localizar valores extremos haciendo simplemente $f'(x) = 0$ y resolviendo para x.

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo o mínimo en $x = 0$, como puede ver en la gráfica de la figura 11. (0 bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una recta tangente horizontal en (0, 0). En lugar de tener un máximo o un mínimo en (0, 0), allí cruza la curva su recta tangente horizontal.

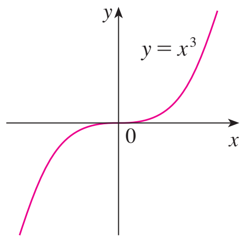


FIGURA 11
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo.

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |\,x\,|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto) en $x = 0$, pero ese valor no puede determinarse haciendo $f'(x) = 0$ porque, como ya se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase la figura 12).

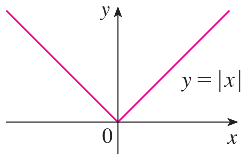


FIGURA 12
Si $f(x) = |\,x\,|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

PRECAUCIÓN Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en $x = c$. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat sugiere en realidad que, por lo menos, debe *empezar* a buscar los valores extremos de f en los números $x = c$, donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

6 Definición Un **número crítico** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

En la figura 13 hay una gráfica de la función f del ejemplo 7, que apoya nuestra respuesta, porque hay una recta tangente horizontal cuando $x = 1.5$ y una recta tangente vertical cuando $x = 0$.

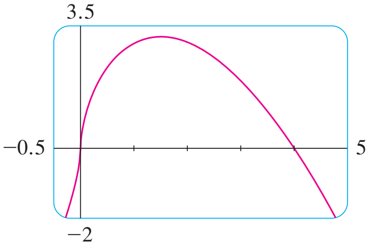


FIGURA 13

V EJEMPLO 7 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto nos da

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[Se obtienen los mismos valores escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Así que $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$; es decir $x = \frac{3}{2}$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por tanto, los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0.

En términos de números críticos, el teorema de Fermat puede replantearse como sigue (compare la definición 6 con el teorema 4):

> **7** Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que o es un extremo local [en cuyo caso, por 7, se presenta en un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el siguiente procedimiento de tres pasos siempre funciona.

> **Método del intervalo cerrado** Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:
>
> **1.** Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
>
> **2.** Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
>
> **3.** El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

V EJEMPLO 8 Encuentre los valores absolutos máximo y mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Dado que f es continua sobre $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos utilizar el teorema del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos valores críticos de f ocurren cuando $f'(x) = 0$; esto es, en $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos números críticos está en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los puntos extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando estos cuatro números, vemos que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

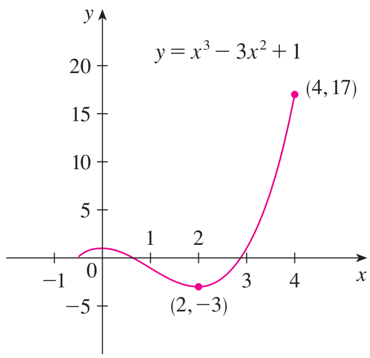


FIGURA 14

Tenga en cuenta que, en este ejemplo, el máximo absoluto ocurre en un extremo del intervalo, mientras que el mínimo absoluto ocurre en un número crítico. La gráfica de f se esboza en la figura 14.

Si tiene una calculadora graficadora o una computadora con software de gráficos, es posible estimar los valores máximos y mínimos muy fácilmente. Pero, como se muestra en el ejemplo siguiente, es necesario el cálculo para encontrar los valores *exactos*.

EJEMPLO 9

a) Utilice un dispositivo de gráficos para estimar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
b) Utilice el cálculo para encontrar los valores máximo y mínimo exactos.

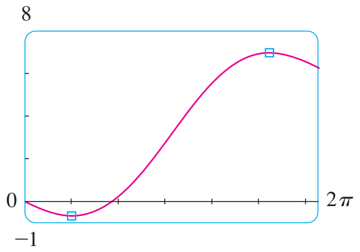


FIGURA 15

SOLUCIÓN

a) La figura 15 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista de $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Moviendo el cursor cerca del punto máximo, vemos que las coordenadas y no cambian mucho en las proximidades del máximo. El valor máximo absoluto es aproximadamente 6.97 y ocurre cuando $x \approx 5.2$. Del mismo modo, moviendo el cursor cerca al punto mínimo, vemos que el valor mínimo absoluto es alrededor de -0.68 y se produce cuando $x \approx 1.0$. Es posible obtener estimaciones más precisas al hacer acercamientos hacia los puntos máximos y mínimos; pero, en vez de esto, utilizaremos el cálculo.

b) La función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, 2\pi]$. Debido a que $f'(x) = 1 - 2\cos x$, tenemos que $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ y esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o bien $5\pi/3$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Comparando estos cuatro números y utilizando el método del intervalo cerrado, vemos que el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el máximo valor absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso a) sirven para verificar nuestro resultado.

NASA

EJEMPLO 10 El telescopio espacial *Hubble* fue puesto en operación el 24 de abril de 1990, por el transbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

SOLUCIÓN No de la función velocidad dada, se nos pide hallar los valores extremos, sino de la función aceleración. Así que primero tenemos que derivar para encontrar la aceleración:

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083)$$

$$= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61$$

Ahora aplicamos el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico ocurre cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Evaluando $a(t)$ en el número crítico y en los puntos extremos del intervalo, tenemos

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

Así que la aceleración máxima es aproximadamente 62.87 pies/s^2, y la aceleración mínima es aproximadamente 21.52 pies/s^2.

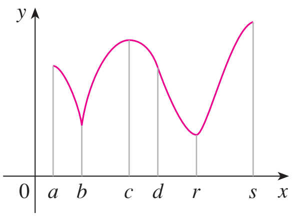
4.1 Ejercicios

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

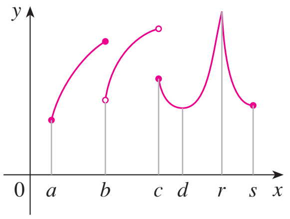
2. Supongamos que f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.
a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto de f?
b) ¿Qué pasos daría para encontrar los valores máximo y mínimo?

3-4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r y s, indique si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo locales, o ni un máximo ni un mínimo.

3.

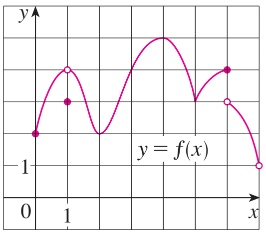


4.

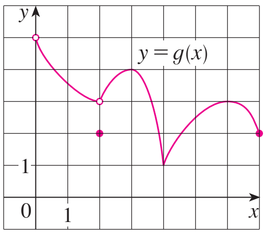


5-6 Utilice la gráfica para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5.



6.



7-10 Esboce la gráfica de una función f que es continua sobre $[1, 5]$ y tiene las propiedades dadas.

7. Mínimo absoluto en 2, máximo absoluto en 3, mínimo local en 4.

8. Mínimo absoluto en 1, máximo absoluto en 5, máximo local en 2, mínimo local en 4.

9. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimos locales en 2 y 4.

10. f no tiene mínimo ni máximo locales, pero 2 y 4 son números críticos.

11. a) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es derivable en 2.
b) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es continua, pero no derivable, en 2.
c) Esboce la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y no es continua en 2.

12. a) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no máximo local.
b) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo local, pero no máximo absoluto.

13. a) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no mínimo absoluto.
b) Esboce la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que es discontinua, pero que no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto.

14. a) Esboce la gráfica de una función que tiene dos máximos locales, un mínimo local y no tiene mínimo absoluto.
b) Esboce la gráfica de una función que tiene tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15-28 Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las graficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$

17. $f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$

18. $f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$

20. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$

22. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29-44 Encuentre los números críticos de la función.

29. $f(x) = 4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2$

30. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

32. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

33. $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2}\ln x$

45-46 Se da la fórmula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47-62 Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

47. $f(x) = 12 + 4x - x^2, \quad [0, 5]$

48. $f(x) = 5 + 54x - 2x^3, \quad [0, 4]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$

51. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = x - 2\tan^{-1}x, \quad [0, 4]$

63. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Utilice una gráfica para estimar los números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ con una aproximación de un decimal.

65-68

a) Utilice una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo absolutos de la función con una aproximación de dos decimales.

b) Por medio del cálculo encuentre los valores máximo y mínimo exactos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^x + e^{-2x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Entre 0°C y 30°C, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T, está dado aproximadamente por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

70. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a través de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva llamada el *coeficiente de fricción* y donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F es minimizada cuando $\tan\theta = \mu$.

71. Un modelo para el precio promedio en EU de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003 está dado por la función

$$A(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t es medido en años desde agosto de 1993. Estime los tiempos cuando el azúcar era más barata y más cara durante el periodo 1993-2003.

72. El 7 de mayo de 1992 el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo de un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de maniobra de giro	10	185
Fin de maniobra de giro	15	319
Válvula de estrangulación a 89%	20	447
Válvula de estrangulación a 67%	32	742
Válvula de estrangulación a 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación de los cohetes auxiliares de combustible sólido	125	4 151

a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para hallar el polinomio cúbico que modele de la mejor manera la velocidad del transbordador para el intervalo de tiempo $t \in [0, 125]$. A continuación, dibuje esta función polinomial.
b) Encuentre un modelo para la aceleración del transbordador y utilícelo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 segundos.

73. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento en la presión de los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo que se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, éste debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más ancho. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un espasmo de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad v de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se pone rígida bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\frac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).

a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ en el cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se compara esto con la evidencia experimental?
b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v sobre el intervalo?
c) Esboce la gráfica de v sobre el intervalo $[0, r_0]$.

74. Demuestre que 5 es un número crítico de la función

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

pero g no tiene un valor extremo local en 5.

75. Demuestre que la función

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

no tiene ni máximo local ni mínimo local.

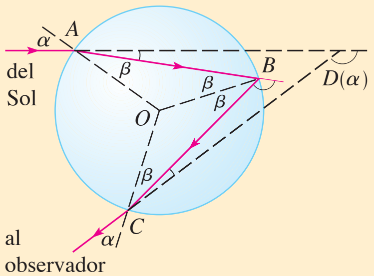
76. Si f tiene un valor mínimo local en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ tiene un valor mínimo local en c.

77. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en el que f tiene un mínimo local en c.

78. Una función cúbica es una función polinomial de grado 3; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos, uno o no tener números críticos. Proporcione ejemplos y dibuje para ilustrar las tres posibilidades.
b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

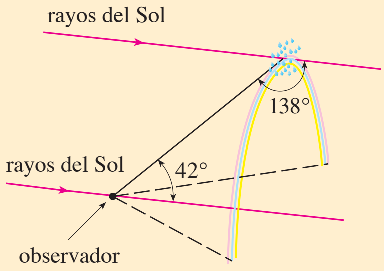
PROYECTO DE APLICACIÓN **CÁLCULO DE ARCOÍRIS**



Formación del arcoíris primario

Los arcoíris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la Humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto se siguen las ideas de Descartes y de Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcoíris.

1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que atraviesa una gota esférica de lluvia en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Observe que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \frac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja; pero, por el momento, hay más

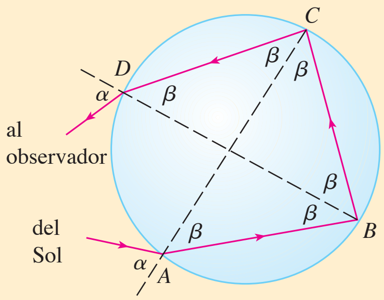


interés en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Observe que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por tanto,

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.
El significado de la desviación mínima es que cuando $\alpha \approx 59.4°$ tenemos $D'(\alpha) \approx 0$, de modo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que muchos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ resultan desviados en más o menos la misma cantidad. La *concentración* de los rayos que vienen de las cercanías de la desviación mínima crea el brillo del arcoíris primario. En la figura a la izquierda se muestra que el ángulo de elevación desde el observador hacia arriba hasta el punto más alto del arcoíris es $180° - 138° = 42°$ (A este ángulo se le llama *ángulo de arcoíris*).

2. En el problema 1 se explica la ubicación del arcoíris primario, pero, ¿cómo explica los colores? La luz solar comprende una gama de longitudes de onda, desde el rojo hasta el naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Como Newton descubrió en sus experimentos con un prisma en 1666, el índice de refracción es diferente para cada color. (El efecto se llama *dispersión*.) Para la luz roja, el índice de refracción es $k \approx 1.3318$, en tanto que para la luz violeta es $k \approx 1.3435$. Al repetir el cálculo del problema 1 para estos valores de k, se demuestra que el ángulo del arcoíris es alrededor de 42.3° para el arco rojo y de 40.6° para el arco violeta. Así pues, el arcoíris consta en realidad de siete arcos separados que corresponden a los siete colores.



Formación del arcoíris secundario

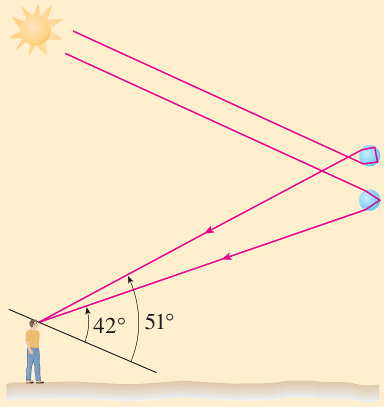
3. Quizás haya visto un arcoíris secundario más tenue, arriba del arco primario. Se produce por la parte de un rayo que entra en una gota de lluvia y se refracta en A, se refleja dos veces (en B y C) y se refracta al salir de la gota en D (véase la figura que aparece a la izquierda). En esta ocasión, el ángulo de desviación $D(\alpha)$ es la magnitud total de rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj que describe el rayo en este proceso de cuatro etapas. Demuestre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

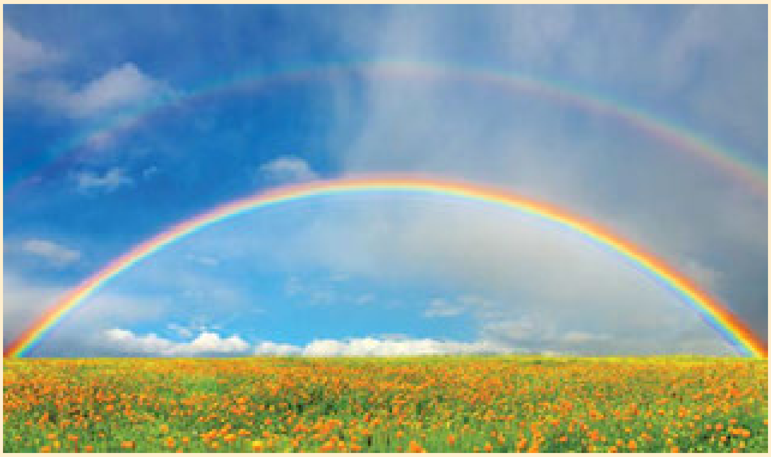
y $D(\alpha)$ tiene un valor mínimo cuando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Tomando $k = \frac{4}{3}$, demuestre que la desviación mínima es aproximadamente 129° y que el ángulo de arcoíris para el arcoíris secundario es de cerca de 51°, como se muestra en la figura a la izquierda.



4. Demuestre que los colores del arcoíris secundario aparecen en orden invertido al del primario.


© Pichugin Dmitry / Shutterstock

4.2 Teorema del valor medio

Vamos a ver que muchos de los resultados de este capítulo dependen de un hecho central, llamado teorema del valor medio. Pero, para llegar a este teorema, veremos primero el siguiente resultado.

Rolle

El teorema de Rolle fue publicado en 1691 por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719), en un libro titulado *Méthode pour resoudre les Egalitez*. Fue un crítico de los métodos de su tiempo y calificó al cálculo como una "colección de falacias ingeniosas". Más tarde, sin embargo, se convenció de la esencial exactitud de los métodos del cálculo.

Teorema de Rolle Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de dar la demostración, vamos a echar un vistazo a las gráficas de algunas funciones típicas que satisfacen las tres hipótesis. La figura 1 muestra las gráficas de cuatro de estas funciones. En cada caso parece que hay al menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la recta tangente es horizontal y, por tanto, $f'(c) = 0$. Por consiguiente, el teorema de Rolle es verosímil.

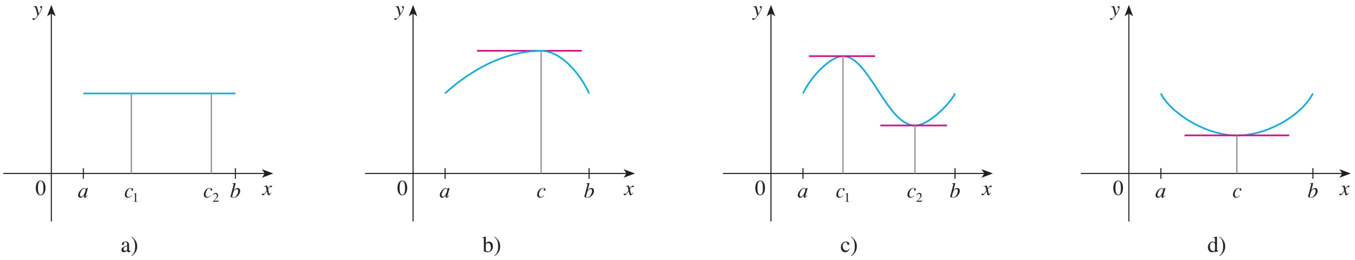


FIGURA 1

RP Presentación de casos

DEMOSTRACIÓN Hay tres casos:

CASO I $f(x) = k$, una constante
Entonces $f'(x) = 0$, por lo que el número c puede tomar *cualquier* número en (a, b).

CASO II $f(x) > f(a)$ para alguna x en (a, b) [como en la figura 1b) o c)]
Por el teorema del valor extremo (que podemos aplicar por la hipótesis 1), f tiene un valor máximo en algún lugar de $[a, b]$. Ya que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar este valor máximo en un número c en el intervalo abierto (a, b), entonces f tiene un máximo *local* en c y, por la hipótesis 2, f es derivable en c. Por tanto, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

CASO III $f(x) < f(a)$ para algún x en (a, b) [como en la figura 1c) o d)]
Por el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$ y, como $f(a) = f(b)$, alcanza este valor mínimo en un número $x = c$ en (a, b). Otra vez, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

EJEMPLO 1 Vamos a aplicar el teorema de Rolle a la función posición $s = f(t)$ de un objeto en movimiento. Si el objeto está en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle señala que hay algún instante de tiempo $t = c$ entre a y b cuando $f'(c) = 0$; es decir, la velocidad es 0. (En particular, puede verse que esto es cierto cuando se lanza una bola directamente hacia arriba.)

EJEMPLO 2 Demuestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

SOLUCIÓN Primero utilizamos el teorema del valor intermedio (2.5.10) para demostrar que existe una raíz. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. Entonces $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$.

La figura 2 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x - 1$ discutida en el ejemplo 2. El teorema de Rolle muestra que no importa cuánto ampliemos el rectángulo de vista, nunca podremos encontrar una segunda intersección con el eje x.

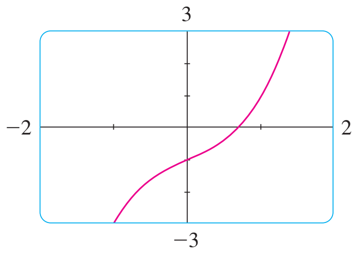


FIGURA 2

Dado que f es una función polinomial, es continua, por lo que el teorema del valor intermedio establece que existe un número $x = c$ entre 0 y 1 tal que $f(c) = 0$, de lo que se deduce que la ecuación dada tiene una raíz.

Para demostrar que la ecuación no tiene otras raíces reales, utilizamos el teorema de Rolle y argumentamos por contradicción. Supongamos que tenemos dos raíces a y b. Entonces $f(a) = 0 = f(b)$ y, dado que f es una función polinomial, es derivable en (a, b) y continua sobre $[a, b]$. Por tanto, por el teorema de Rolle, existe un número $x = c$ entre a y b tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para toda } x$$

(ya que $x^2 \geqslant 0$), por lo que $f'(x)$ nunca puede ser 0. Esto conduce a una contradicción, por tanto, la ecuación no puede tener dos raíces reales.

El principal uso del teorema de Rolle es demostrar el importante teorema siguiente, establecido por primera vez por el matemático francés Joseph Louis Lagrange.

El teorema del valor medio es un ejemplo de lo que se llama un teorema de existencia. Como el teorema del valor intermedio, el teorema del valor extremo y el teorema de Rolle aseguran que existe un número con una determinada propiedad, pero no nos dicen cómo encontrar el número.

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que

1 $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente,

2 $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demostrar este teorema, podemos ver que es razonable desde la interpretación geométrica. Las figuras 3 y 4 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ sobre las gráficas de dos funciones derivables. La pendiente de la recta secante AB es

3 $$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es la misma expresión que en el lado derecho de la ecuación 1. Dado que $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la ecuación 1, indica que hay al menos un punto $P(c, f(c))$ sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante AB. En otras palabras, hay un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB (imagine una recta paralela a AB, moviéndose desde lejos manteniendo el paralelismo hasta que toque la gráfica por primera vez).

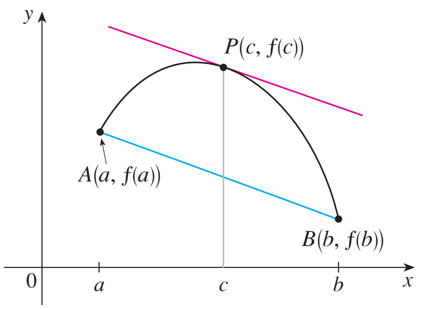


FIGURA 3

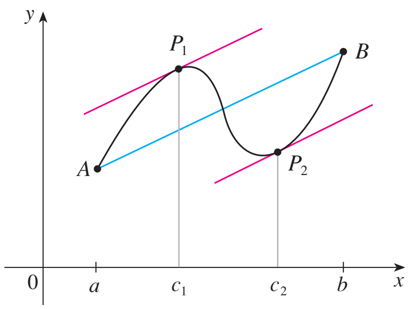


FIGURA 4

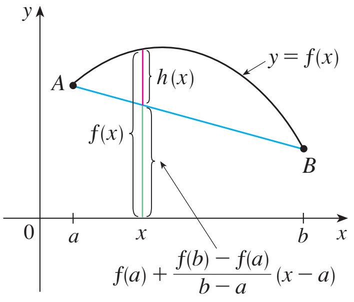


FIGURA 5

Lagrange y el teorema del valor medio

El teorema del valor medio fue formulado primero por Joseph Louis Lagrange (1736-1813), nacido en Italia de padre francés y madre italiana. Fue un niño prodigio y se convirtió en profesor en Turín a la tierna edad de 19 años. Lagrange hizo grandes contribuciones a la teoría de números, teoría de las funciones, teoría de las ecuaciones y a la mecánica celeste y analítica. En particular, aplicó el cálculo en el análisis de la estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico el Grande, sucedió a Euler en la Academia de Berlín y, cuando Federico murió, Lagrange aceptó la invitación a París del rey Luis XVI, donde recibió apartamentos en el Louvre y un cargo de profesor en la Escuela Politécnica. A pesar de todos los lujos y la fama, era un hombre tranquilo, viviendo sólo para la ciencia.

DEMOSTRACIÓN Aplicamos el teorema de Rolle a una nueva función h definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la recta secante AB. Mediante la ecuación 3, vemos que la ecuación de la recta AB puede escribirse como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Así, como se muestra en la figura 5,

$$\boxed{4} \qquad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Primero, debemos verificar que h satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle.

1. La función h es continua sobre $[a, b]$ porque es la suma de f y una función polinomial de primer grado, ambas continuas.
2. La función h es derivable sobre (a, b) porque f y la función polinomial de primer grado son derivables. De hecho, podemos calcular h' directamente de la ecuación 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Note que $f(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ son constantes.)

3. $$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$

$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Por tanto, $h(a) = h(b)$.

Dado que h satisface las hipótesis del teorema de Rolle, que señala que existe un número $x = c$ en (a, b) tal que $h'(c) = 0$, entonces se tiene

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

así que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

V EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, consideremos $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es una función polinomial, es continua y derivable para toda x, así que es ciertamente continua sobre $[0, 2]$ y derivable sobre $(0, 2)$. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número $x = c$ en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, así que la ecuación resulta

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

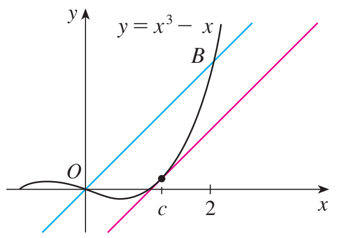


FIGURA 6

que da $c^2 = \frac{4}{3}$, esto es, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero $x = c$ debe estar en (0, 2), así que $c = 2/\sqrt{3}$. La figura 6 ilustra este cálculo: la recta tangente en este valor de $x = c$ es paralela a la recta secante OB.

V EJEMPLO 4 Si un objeto se mueve en línea recta de acuerdo con la función posición $s = f(t)$, entonces la velocidad promedio entre $t = a$ y $t = b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la velocidad en $t = c$ es $f'(c)$. Así, el teorema del valor medio (en la forma de la ecuación 1) nos indica que en algún momento $t = c$ entre a y b la velocidad instantánea $f'(c)$ es igual a la velocidad promedio. Por ejemplo, si un automóvil viajaba 180 km en 2 horas, entonces el velocímetro debe tener una lectura de 90 km/h por lo menos una vez.

En general, el teorema del valor medio puede interpretarse diciendo que existe un número en el cual la razón de cambio instantáneo es igual a la razón de cambio promedio a lo largo de un intervalo.

El principal significado del teorema del valor medio es que nos permite obtener información acerca de una función a partir de aquella acerca de su derivada. En el caso siguiente se proporciona un ejemplo de este principio.

V EJEMPLO 5 Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$?

SOLUCIÓN Partimos del hecho de que f es derivable (y, por tanto, continua) en todo su dominio. En particular, podemos aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Existe un número $x = c$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

así que $$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Tenemos que $f'(x) \leqslant 5$ para toda x, así que, en particular, sabemos que $f'(c) \leqslant 5$. Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por 2, tenemos $2f'(c) \leqslant 10$, así que

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

El mayor valor posible para $f(2)$ es 7.

El teorema del valor medio puede utilizarse para establecer algunos de los hechos básicos del Cálculo Diferencial. Uno de estos hechos básicos es el siguiente teorema. Otros se encontrarán en las secciones siguientes.

5 Teorema Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números cualesquier en (a, b), con $x_1 < x_2$. Dado que f es derivable sobre (a, b), debe ser derivable sobre (x_1, x_2) y continua sobre $[x_1, x_2]$. Aplicando el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, obtenemos un número $x = c$ tal que $x_1 < c < x_2$ y

6 $$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$ para toda x, tenemos $f'(c) = 0$, así que la ecuación 6 resulta

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Por tanto, f tiene el mismo valor que *cualesquiera* dos números x_1 y x_2 en (a, b). Esto significa que f es constante sobre (a, b).

7 Corolario Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante sobre (a, b); esto es, $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Así, por el teorema 5, f es constante; esto es, $f - g$ es constante.

NOTA Cuidado al utilizar el teorema 5. Sea

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de f es $D = \{x \mid x \neq 0\}$ y $f'(x) = 0$ para toda x en D. Pero f, evidentemente, no es una función constante. Esto no contradice el teorema 5 porque D no es un intervalo. Observe que f es constante sobre el intervalo $(0, \infty)$ y también sobre el intervalo $(-\infty, 0)$.

EJEMPLO 6 Demuestre la identidad $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Aunque no es necesario utilizar el cálculo para demostrar esta identidad, la demostración mediante él es muy sencilla. Si $f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos los valores de x. Por tanto, $f(x) = C$, una constante. Para determinar el valor de C, ponemos $x = 1$ [porque podemos evaluar $f(1)$ exactamente]. Entonces

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Así, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

4.2 Ejercicios

1-4 Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Después encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1, 3]$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, \quad [0, 3]$

3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

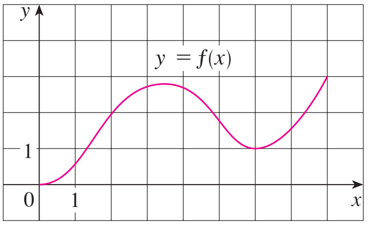
4. $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

5. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$, pero no hay ningún número $x = c$ en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?

6. Sea $f(x) = \tan x$. Demuestre que $f(0) = f(\pi)$, pero no hay ningún número $x = c$ en $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el teorema de Rolle?

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

7. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de $x = c$ que satisface la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.



8. Utilice la gráfica de f dada en el ejercicio 7 para estimar los valores de $x = c$ que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[1, 7]$.

9-12 Verifique que la función satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado. Después encuentre todos los números $x = c$ que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio.

9. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$

10. $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad [-2, 2]$

11. $f(x) = \ln x, \quad [1, 4]$

12. $f(x) = 1/x, \quad [1, 3]$

13-14 Encuentre el número $x = c$ que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre el intervalo dado. Grafique la función, la recta secante a través de los extremos y la recta tangente en $(c, f(c))$. ¿Son paralelas la recta secante y la tangente?

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$ **14.** $f(x) = e^{-x}, \quad [0, 2]$

---

15. Sea $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Demuestre que no hay ningún valor de $x = c$ en $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. ¿Por qué no contradice esto el teorema del valor medio?

16. Sea $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Demuestre que no hay valor $x = c$ tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

17-18 Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene sólo una raíz real.

17. $2x + \cos x = 0$ **18.** $x^3 + e^x = 0$

---

19. Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + c = 0$ tiene como máximo una raíz en el intervalo $[-2, 2]$.

20. Pruebe que la ecuación $x^4 + 4x + c = 0$ tiene como máximo dos raíces reales.

21. a) Demuestre que una polinomial de grado 3 tiene a lo sumo tres raíces reales.
b) Demuestre que una polinomial de grado n tiene como máximo n raíces reales.

22. a) Suponga que f es derivable sobre $\mathbb{R}$ y tiene dos raíces. Demuestre que f' tiene al menos una raíz.
b) Suponga que f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y tiene tres raíces. Demuestre que f'' tiene al menos una raíz real.
c) ¿Puede usted generalizar los incisos a) y b)?

23. Si $f(1) = 10$ y $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, ¿qué tan pequeño puede posiblemente ser $f(4)$?

24. Suponga que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. Demuestre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leqslant 2$ para toda x?

26. Suponga que f y g son continuas sobre $[a, b]$ y derivables sobre (a, b). Suponga también que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demuestre que $f(b) < g(b)$. [*Sugerencia:* utilice el teorema del valor medio para la función $h = f - g$.]

27. Demuestre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ si $x > 0$.

28. Suponga que f es una función impar y es derivable sobre todo su dominio. Demuestre que para todo número positivo b, existe un número $x = c$ en $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Utilice el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para toda } a \text{ y } b$$

30. Si $f'(x) = c$ (c es una constante) para toda x, utilice el corolario 7 para demostrar que $f(x) = cx + d$ para alguna constante d.

31. Sea $f(x) = 1/x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en su dominio. ¿Podemos concluir del corolario 7 que $f - g$ es constante?

32. Utilice el método del ejemplo 6 para demostrar la identidad

$$2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

33. Demuestre la identidad

$$\operatorname{arcsen} \frac{x - 1}{x + 1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. A las 14:00 el velocímetro de un automóvil marca 30 mi/h. A las 14:10 marca 50 mi/h. Demuestre que en algún momento entre las 14:00 y 14:10 la aceleración es exactamente 120 mi/h^2.

35. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan en un empate. Demuestre que en algún momento durante la carrera tienen la misma velocidad. [*Sugerencia:* considere $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones posición de los dos corredores.]

36. Un número a se llama **punto fijo** de una función f si $f(a) = a$. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x, entonces f tiene a lo sumo un punto fijo.

4.3 Cómo afecta la derivada la forma de una gráfica

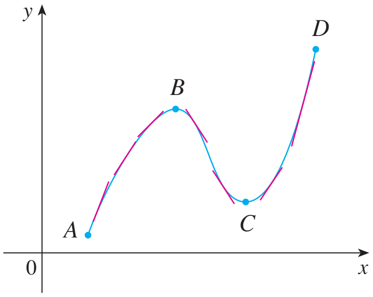


FIGURA 1

Muchas de las aplicaciones del cálculo dependen de nuestra capacidad para deducir hechos acerca de una función f a partir de la información que se obtiene de sus derivadas. Ya que $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, nos indica la dirección de la curva en cada punto. Así, es razonable esperar que la información relacionada con $f'(x)$ nos proporcione información asociada con $f(x)$.

¿Qué indica f' respecto a f?

Para ver cómo la derivada de f puede decirnos dónde una función es creciente o decreciente, miremos la figura 1. (Las funciones crecientes y las decrecientes fueron definidas en la sección 1.1). Entre A y B y entre C y D, las rectas tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x) > 0$. Entre B y C, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, así que $f'(x) < 0$. Así, parece que f crece cuando $f'(x)$ es positiva y decrece cuando $f'(x)$ es negativa. Para demostrar que esto siempre es el caso, usamos el teorema del valor medio.

Abreviaremos el nombre de esta prueba como Prueba C/D

Prueba creciente/decreciente

a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente sobre ese intervalo.

b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente sobre ese intervalo.

DEMOSTRACIÓN

a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo con $x_1 < x_2$. Según la definición de una función creciente (página 19), tenemos que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Sabemos que $f'(x) > 0$ y que f es derivable sobre (x_1, x_2), así que, por el teorema del valor medio, existe un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora $f'(c) > 0$ por el supuesto de que $x_2 - x_1 > 0$ ya que $x_1 < x_2$. Así, el lado derecho de la ecuación 1 es positivo, por lo que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{o} \quad f(x_1) < f(x_1)$$

lo que demuestra que f es creciente.

El inciso b) se demuestra de manera similar.

V EJEMPLO 1 Encuentre dónde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y dónde es decreciente.

SOLUCIÓN $\quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$

Para utilizar la prueba C/D tenemos que investigar dónde $f'(x) > 0$ y dónde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$, es decir, $12x$, $(x - 2)$ y $(x + 1)$. Para esto, dividimos la recta real en intervalos cuyos extremos son los números críticos: -1, 0 y 2, y organizamos nuestro trabajo en una gráfica. Un signo *más* indica que la expresión dada es positiva, y un signo *menos* indica que es negativa. La última columna de la tabla da la conclusión basada en la prueba C/D. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, por lo que f es decreciente sobre $(0, 2)$. (También sería correcto decir que f es decreciente sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$.)

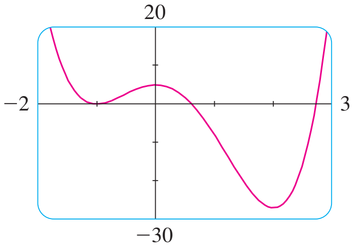


FIGURA 2

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	−	−	−	−	Decreciente sobre $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	−	−	+	+	Creciente sobre $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	+	−	+	−	Decreciente sobre $(0, 2)$
$x > 2$	+	+	+	+	Creciente sobre $(2, \infty)$

La gráfica de f que se muestra en la figura 2 confirma la información de la tabla.

Recuerde de la sección 4.1 que si f tiene un máximo o mínimo locales en c, entonces c debe ser un número crítico de f (por el teorema de Fermat), pero no todo número crítico da lugar a un máximo o mínimo. Por tanto, necesitamos una prueba que nos diga si f tiene o no máximos o mínimos locales en un número crítico.

Puede observarse en la figura 2 que $f(0) = 5$ es un valor máximo local de f porque crece sobre $(-1, 0)$ y disminuye sobre $(0, 2)$. O bien, en términos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. En otras palabras, el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en $x = 0$. Esta observación es la base de la siguiente prueba.

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
b) Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

La prueba de la primera derivada es una consecuencia de la prueba C/D. En el inciso a), por ejemplo, puesto que el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, f es creciente por la izquierda de c y decreciente por la derecha de c. Se deduce entonces que f tiene un máximo local en c.

Es fácil recordar la prueba de la primera derivada al ver el comportamiento de gráficas como las de la figura 3.

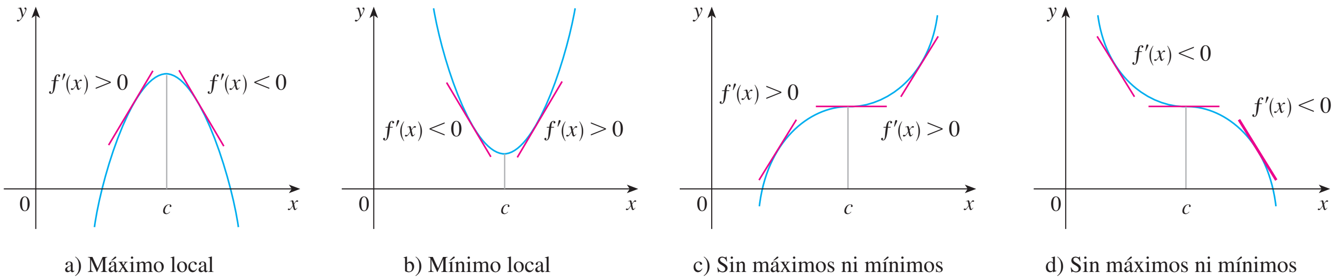


FIGURA 3

V EJEMPLO 2 Encuentre los valores mínimos y máximos locales de la función f en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN De la tabla en la solución del ejemplo 1 vemos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x = -1$, así que $f(-1) = 0$ es un valor mínimo local por la prueba de la primera derivada. Del mismo modo, f' cambia de negativa a positiva en $x = 2$, por

lo que $f(2) = -27$ también es un valor mínimo local. Como se ha señalado anteriormente, $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x = 0$.

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN Para encontrar los números críticos de g, derivamos:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Así que $g'(x) = 0$ cuando $\cos x = -\frac{1}{2}$. Las soluciones de esta ecuación son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Debido a que g es derivable para toda x, los únicos números críticos son $2\pi/3$ y $4\pi/3$, así que podemos analizar a g en la siguiente tabla.

Los signos + en la tabla vienen del hecho de que $g'(x) > 0$ cuando $\cos x > -\frac{1}{2}$. A partir de la gráfica de $y = \cos x$, esto es cierto en los intervalos indicados.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2 \cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	creciente sobre $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	decreciente sobre $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	creciente sobre $(4\pi/3, 2\pi)$

Ya que $g'(x)$ cambia de positivo a negativo en $2\pi/3$, la prueba de la primera derivada nos indica que existe un máximo local en $x = 2\pi/3$ y el máximo valor local es

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

Por otro lado, $g'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x = 4\pi/3$ y, por tanto,

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

es un valor mínimo local. La gráfica de g en la figura 4 apoya nuestra conclusión.

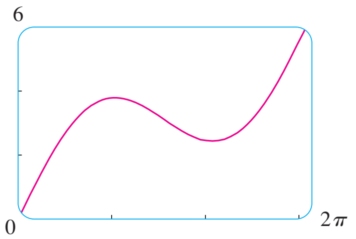


FIGURA 4
$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

¿Qué dice f'' respecto a f?

La figura 5 muestra las gráficas de dos funciones crecientes sobre (a, b). Ambas gráficas unen el punto A al punto B, pero parecen diferentes porque se doblan en diferentes direcciones. ¿Cómo podemos distinguir entre estos dos tipos de comportamiento? En la figura 6, las rectas tangentes a estas curvas se han dibujado en varios puntos. En a) sobre la curva queda por arriba de las rectas tangentes y se dice que f es *cóncava hacia arriba* sobre (a, b). En b), la curva se encuentra por debajo de las rectas tangentes y g se llama *cóncava hacia abajo* sobre (a, b).

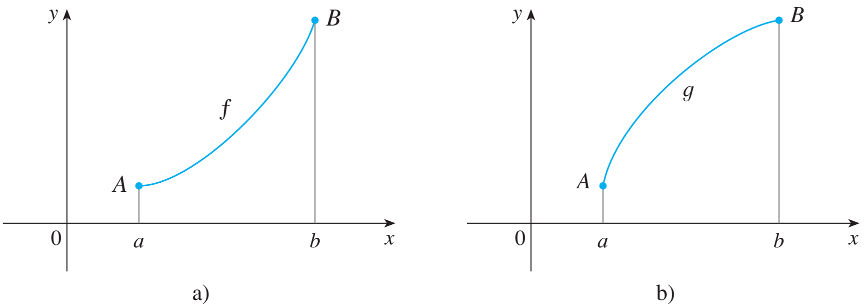


FIGURA 5

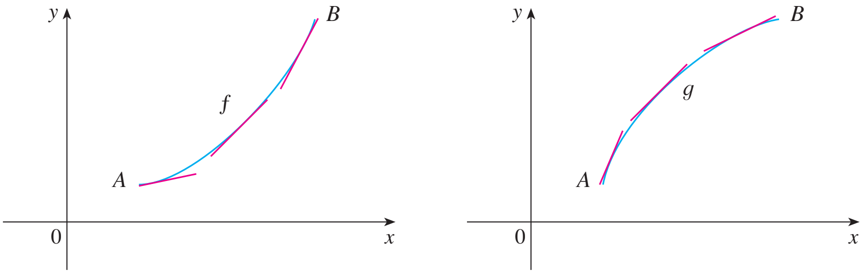


FIGURA 6 a) Cóncava hacia arriba b) Cóncava hacia abajo

Definición Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes sobre un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** sobre I. Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus rectas tangentes, se dice que es **cóncava hacia abajo** sobre I.

La figura 7 muestra la gráfica de una función que es cóncava hacia arriba (abreviado CA) sobre los intervalos (b, c), (d, e) y (e, p), y cóncava hacia abajo (CB) sobre los intervalos (a, b), (c, d), y (p, q).

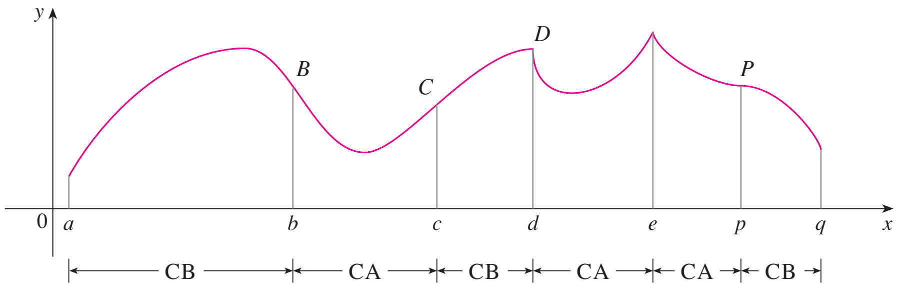


FIGURA 7

Veamos cómo la segunda derivada ayuda a determinar los intervalos de concavidad. Al observar la figura 6a, puede verse que, de izquierda a derecha, la pendiente de la recta tangente es creciente. Esto significa que la derivada f' es una función creciente y, por tanto, su derivada f'' es positiva. Asimismo, en la figura 6b) la pendiente de la recta tangente decrece de izquierda a derecha, así que f' decrece y, por ende, f'' es negativa. Este razonamiento puede invertirse y sugiere que el siguiente teorema es verdadero. En el apéndice F se da una demostración con la ayuda del teorema del valor medio.

Prueba de concavidad

a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

EJEMPLO 4 La figura 8 muestra una gráfica de la población de abejas de Chipre criadas en un colmenar. ¿Cómo cambia la tasa de crecimiento poblacional con el tiempo? ¿Cuándo esta tasa es más alta? ¿Sobre qué intervalos es P cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

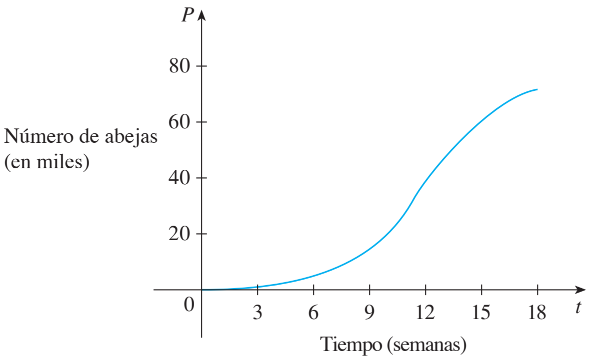


FIGURA 8

SOLUCIÓN Observando la pendiente de la curva cuando t aumenta, vemos que la tasa de crecimiento de la población es inicialmente muy pequeña, después aumenta hasta que llega un máximo aproximadamente a $t = 12$ semanas y disminuye a medida que la población comienza a nivelarse. A medida que la población se acerca a su valor máximo de aproximadamente 75 000 (llamado la *capacidad de acarreo*), la tasa de crecimiento, $P'(t)$, se aproxima a 0. La curva parece ser cóncava hacia arriba en (0, 12) y cóncava hacia abajo en (12, 18).

En el ejemplo 4, la curva de la población ha cambiado de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en aproximadamente el punto (12, 38 000). Este punto se denomina *punto de inflexión* de la curva. La importancia de este punto es que la tasa de crecimiento de la población tiene allí su valor máximo. En general, un punto de inflexión es aquel donde una curva cambia de dirección la concavidad.

Definición Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama *punto de inflexión* si f es allí continua y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Por ejemplo, en la figura 7, B, C, D y P son los puntos de inflexión. Observe que si una curva tiene una recta tangente en un punto de inflexión, entonces la curva corta a la recta tangente en ese punto.

De acuerdo con la prueba de concavidad, existe un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

V EJEMPLO 5 Esboce una posible gráfica de una función f que cumpla con las condiciones siguientes:

i) $f'(x) > 0$ sobre $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ sobre $(1, \infty)$

ii) $f''(x) > 0$ sobre $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ sobre $(-2, 2)$

iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

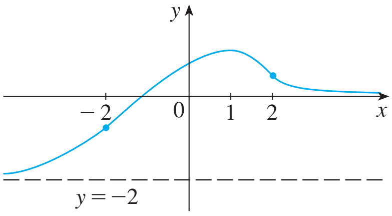


FIGURA 9

SOLUCIÓN La condición i) nos señala que f es creciente sobre $(-\infty, 1)$ y decreciente sobre $(1, \infty)$. La condición ii) dice que f es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-2, 2)$. De la condición iii) sabemos que la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales: $y = -2$ e $y = 0$.

Primero dibujamos la asíntota horizontal $y = -2$ como una recta discontinua (véase la figura 9). Después dibujamos la gráfica de f aproximándose a esta asíntota hacia el extremo izquierdo, creciendo a su punto máximo en $x = 1$ y decreciendo hacia el eje x hacia el

extremo derecho. También nos aseguramos de que la gráfica tiene puntos de inflexión cuando $x = -2$ y $x = 2$. Observe que hicimos que la curva se doble hacia arriba para $x < -2$ y $x > 2$, y se doble hacia abajo cuando x está entre -2 y 2.

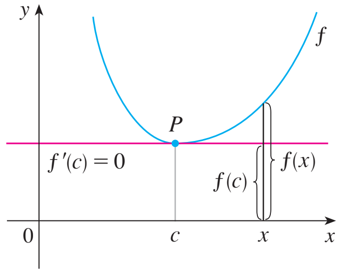


FIGURA 10
$f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba

Otra aplicación de la segunda derivada es la siguiente prueba para los valores máximos y mínimos, que no es más que una consecuencia de la prueba de concavidad.

> **Prueba de la segunda derivada** Supongamos que f'' es continua cerca de $x = c$.
> a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
> b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.

Por ejemplo, el inciso a) es cierto porque $f''(x) > 0$ cerca de $x = c$ y, por tanto, f es cóncava hacia arriba cerca de c. Esto significa que la gráfica está *sobre* su recta tangente horizontal en c y, por tanto, f tiene un mínimo local en $x = c$. (Véase la figura 10.)

V EJEMPLO 6 Discuta la curva $y = x^4 - 4x^3$ respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales. Utilice esta información para esbozar la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para encontrar los números críticos establecemos $f'(x) = 0$ para obtener $x = 0$ y $x = 3$. Para utilizar la prueba de la segunda derivada evaluamos f'' en estos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Ya que $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. Como $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no aporta información sobre el número crítico $x = 0$. Pero ya que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada nos dice que f no tiene un máximo o mínimo local en 0. [De hecho, la expresión para $f'(x)$ muestra que f decrece a la izquierda de 3 y crece a la derecha de 3.]

Puesto que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 2$, dividimos la recta real en intervalos con estos números como extremos y completamos la siguiente tabla.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	$+$	hacia arriba
$(0, 2)$	$-$	hacia abajo
$(2, \infty)$	$+$	hacia arriba

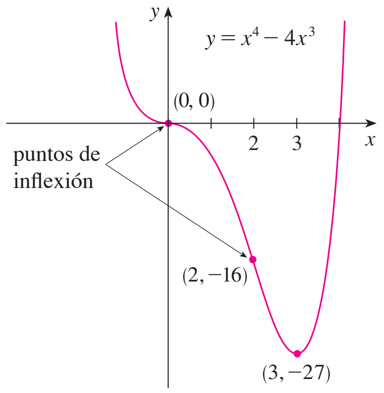


FIGURA 11

El punto (0, 0) es un punto de inflexión, ya que la curva cambia ahí de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. También $(2, -16)$ es un punto de inflexión, ya que allí la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Utilizando el mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, esbozamos la curva de la figura 11.

NOTA La prueba de la segunda derivada es incierta cuando $f''(c) = 0$. En otras palabras, en tal punto puede haber un máximo, puede haber un mínimo, o podría no haber máximo o mínimo (como en el ejemplo 6). Esta prueba también falla cuando $f''(c)$ no existe. En tales casos, debe utilizarse la prueba de la primera derivada. De hecho, aun cuando se aplican ambas pruebas, la prueba de la primera derivada es a menudo más fácil de utilizar.

EJEMPLO 7 Esboce la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

SOLUCIÓN Con las primeras dos derivadas obtenemos

Utilice las reglas de derivación para verificar estos cálculos.

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

Dado que $f'(x) = 0$ cuando $x = 4$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4 y 6.

Intente reproducir la gráfica de la figura 12 con una calculadora graficadora o una computadora. Algunas máquinas producen la gráfica completa, algunas generan únicamente la parte a la derecha del eje y, y algunas otras producen únicamente la parte entre $x = 0$ y $y = 6$. Para una explicación y resolución de esto, vea el ejemplo 7 en la sección 1.4. Una expresión equivalente que da la gráfica correcta es

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6 - x}{|6 - x|}|6 - x|^{1/3}$$

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decreciente sobre $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	creciente sobre $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decreciente sobre $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decreciente sobre $(6, \infty)$

Para encontrar los valores extremos locales utilizamos la prueba de la primera derivada. Puesto que f' cambia de negativa a positiva en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un mínimo local. Ya que f' cambia de positiva a negativa en $x = 4$, $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no cambia en $x = 6$, por lo que no hay mínimo o máximo. (La prueba de la segunda derivada podría utilizarse en $x = 4$, pero no en $x = 0$ o $x = 6$ porque f'' no existe en ninguno de estos números.)

Observando la expresión para $f''(x)$ y tomando nota de que $x^{4/3} \geqslant 0$ para toda x, tenemos $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y para $0 < x < 6$, y $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Así que f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$ y cóncava hacia arriba sobre $(6, \infty)$, y el único punto de inflexión es $(6, 0)$. La gráfica se esboza en la figura 12. Tenga en cuenta que la curva tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$ y $(6, 0)$ debido a que $|f'(x)| \to \infty$ conforme $x \to 0$ y a medida que $x \to 6$.

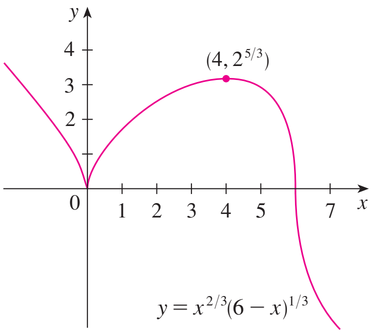


FIGURA 12

EJEMPLO 8 Utilice la primera y segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto con las asíntotas, para esbozar su gráfica.

SOLUCIÓN Note que el dominio de f es $\{x \mid x \neq 0\}$, por lo que comprobamos para asíntotas verticales calculando los límites por la izquierda y por la derecha cuando $x \to 0$. Conforme $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, así que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

y esto demuestra que $x = 0$ es una asíntota vertical. A medida que $x \to 0^-$, tenemos $t = 1/x \to -\infty$, por lo que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

TEC En Module 4.3 puede usted practicar usando la información relacionada con f', f'' y las asíntotas para determinar la forma de la gráfica de f.

Conforme $x \to \pm\infty$, tenemos $1/x \to 0$ así que

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Esto demuestra que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Ahora vamos a calcular la derivada. La regla de la cadena da

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

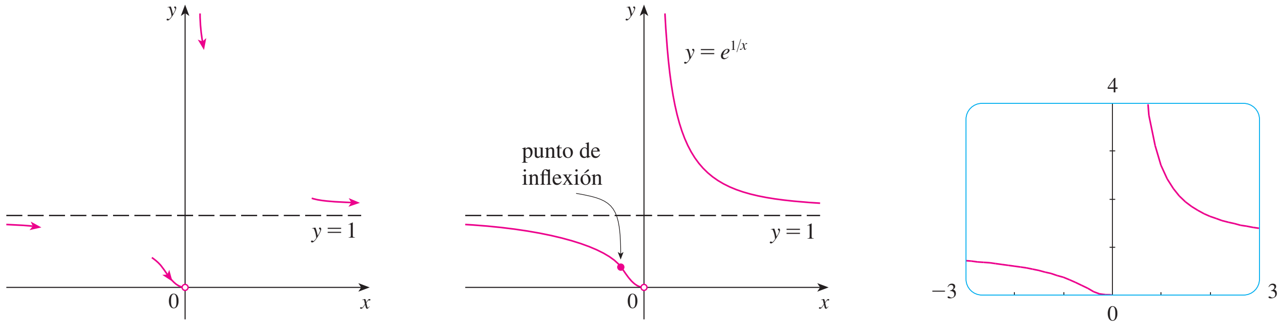
Como $e^{1/x} > 0$ y $x^2 > 0$ para toda $x \neq 0$, tenemos $f'(x) < 0$ para toda $x \neq 0$. Así f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y sobre $(0, \infty)$. No hay un número crítico, por lo que la función

no tiene máximos ni mínimos locales. La segunda derivada es

$$f''(x) = -\frac{x^2e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

Puesto que $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$, tenemos $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. Así que la curva es cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y sobre $(0, \infty)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para esbozar la gráfica de f trazamos primero la asíntota horizontal $y = 1$ (como una recta discontinua), junto con las partes de la curva cerca de la asíntota en un esbozo preliminar [figura 13a]. Estas partes reflejan la información relativa a los límites y el hecho de que f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Observe que hemos indicado que $f(x) \to 0$ conforme $x \to 0^-$, a pesar de que $f(0)$ no existe. En la Figura 13b terminamos el esbozo incorporando la información relativa a la concavidad y el punto de inflexión. En la figura 13c) revisamos nuestro trabajo con un dispositivo de graficación.



a) Esquema preliminar   b) Dibujo terminado   c) Configuración por computadora

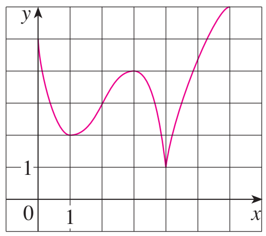
FIGURA 13

4.3 Ejercicios

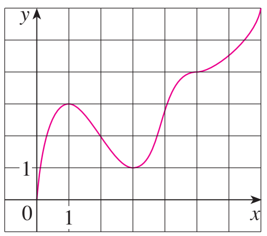
1-2 Utilice la gráfica de f para encontrar lo siguiente.

a) Los intervalos abiertos sobre los que f es creciente.
b) Los intervalos abiertos sobre los que f es decreciente.
c) Los intervalos abiertos sobre los que f es cóncava hacia arriba.
d) Los intervalos abiertos sobre los que f es cóncava hacia abajo.
e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

1.



2.



3. Supongamos que se le da una fórmula para una función f.

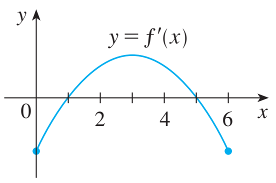
a) ¿cómo determinaría dónde f aumenta o disminuye?
b) ¿Cómo determinaría dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
c) ¿Dónde se localizan los puntos de inflexión?

4. a) Establezca la prueba de la primera derivada
b) Establezca la prueba de la segunda derivada. ¿Bajo qué circunstancias no son concluyentes? ¿Qué haría si no es válida?

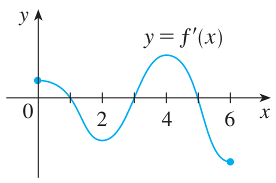
5-6 En los ejercicios 5 y 6, se muestran las gráficas de la *derivada* f' de una función f.

a) ¿Sobre qué intervalos f crece o decrece?
b) ¿En qué valores de x, f tiene un máximo o mínimo local?

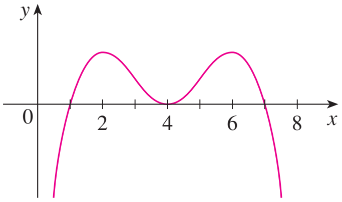
5.



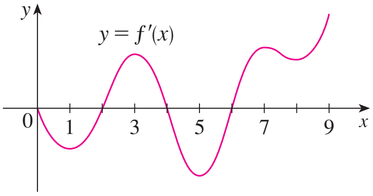
6.



7. En cada inciso establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión de f. Dé las razones de sus respuestas.
a) Si la curva dada es la gráfica de f.
b) Si la curva dada es la gráfica de f'.
c) Si la curva dada es la gráfica de f''.



8. Se muestra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.
a) ¿Sobre qué intervalos f es creciente? Explique.
b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.
c) ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.
d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



9-18
a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.
b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.
c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = x^4 e^{-x}$

19-21 Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f utilizando las pruebas de la primera y la segunda derivada. ¿Qué método prefiere?

19. $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$

20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

22. a) Encuentre los números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
b) ¿Qué nos dice la prueba de la segunda derivada sobre el comportamiento de f en estos números críticos?
c) ¿Qué nos indica la prueba de la primera derivada?

23. Supongamos que f'' es continua sobre $(-\infty, \infty)$.
a) Si $f'(2) = 0$ y $f''(2) = -5$, ¿qué puede decir acerca de f?
b) Si $f'(6) = 0$ y $f''(6) = 0$, ¿qué puede decir acerca de f?

24-29 Esboce la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones determinadas.

24. Asíntota vertical $x = 0$, $\quad f'(x) > 0$ si $x < -2$,
$f'(x) < 0$ si $x > -2$ $(x \neq 0)$,
$f''(x) < 0$ si $x < 0$, $\quad f''(x) > 0$ si $x > 0$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 3$, $\quad f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $\quad f'(x) < 0$ si $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ si $1 < |x| < 2$, $\quad f'(x) = -1$ si $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0$, $\quad$ punto de inflexión $(0, 1)$

27. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2$, $\quad f'(x) < 0$ si $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\quad \lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $\quad f''(x) > 0$ si $x \neq 2$

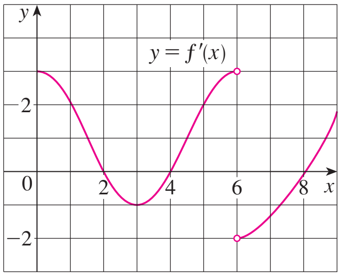
28. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2$, $\quad f'(x) < 0$ si $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $\quad f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ si $0 < x < 3$, $\quad f''(x) > 0$ si $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x

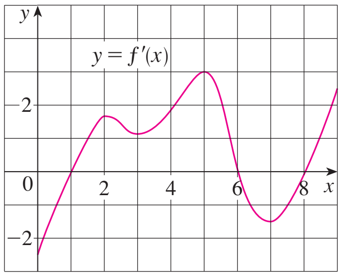
30. Supongamos que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ y $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x.
a) Esboce una posible gráfica para f.
b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$? ¿Por qué?
c) ¿Es posible que $f'(2) = \frac{1}{3}$. ¿Por qué?

31-32 Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.
a) ¿Sobre qué intervalos es f creciente? ¿Decreciente?
b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿Mínimo local?
c) ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba? ¿Cóncava hacia abajo?
d) Establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión.
e) Suponiendo que $f(0) = 0$, esboce una gráfica de f.

31.



32.



33-34

a) Encuentre los intervalos donde crece o decrece.
b) Halle los valores máximos y mínimos locales.
c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
d) Utilice la información de los incisos a)-c) para esbozar la gráfica. Verifique su trabajo con un dispositivo de graficación.

33. $f(x) = x^3 - 12x + 2$

34. $f(x) = 36x + 3x^2 - 2x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

36. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$

38. $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

39. $F(x) = x\sqrt{6 - x}$

40. $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

42. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $S(x) = x - \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

45-52

a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
b) Halle los intervalos donde crece o decrece.
c) Busque los valores máximos y mínimos locales.
d) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
e) Utilice la información de los incisos a)-d) para esbozar la gráfica de *f*.

45. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

49. $f(x) = e^{-x^2}$

50. $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

51. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

52. $f(x) = e^{\arctan x}$

53. Suponga que la derivada de una función *f* es $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. ¿Sobre qué intervalo es *f* creciente?

54. Utilice los métodos de esta sección para trazar la curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, donde *a* es una constante positiva. ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de curvas? ¿Cómo se diferencian entre sí?

55-56

a) Utilice la gráfica de *f* para estimar los valores máximos y mínimos. Después, encuentre los valores exactos.
b) Estime el valor de *x* en el cual *f* crece más rápidamente. A continuación, encuentre el valor exacto.

55. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

56. $f(x) = x^2 e^{-x}$

57-58

a) Utilice la gráfica de *f* para dar una estimación aproximada de los intervalos de concavidad y de las coordenadas de los puntos de inflexión.
b) Utilice la gráfica de f'' para dar estimaciones mejores.

57. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

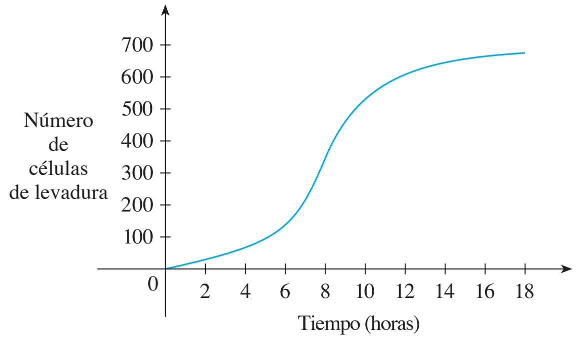
58. $f(x) = x^3(x - 2)^4$

SAC **59-60** Estime los intervalos de concavidad con una aproximación de un decimal mediante un sistema algebraico computarizado y grafique f''.

59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

60. $f(x) = \dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^3}$

61. Se muestra la gráfica de una población de células de levadura en un cultivo reciente de laboratorio como una función del tiempo.
a) Describa cómo varía la tasa de crecimiento de la población.
b) ¿Cuándo la tasa es más alta?
c) ¿Sobre qué intervalos es la función de población cóncava hacia arriba o hacia abajo?
d) Estime las coordenadas del punto de inflexión.



62. Sea $f(t)$ la temperatura en el tiempo *t* donde usted vive y suponga que en el tiempo $t = 3$ se siente incómodamente acalorado. ¿Cómo se siente en relación con los datos dados en cada caso?
a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$
b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$
c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$
d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

63. Sea $C(t)$ una medida de los conocimientos que obtiene usted estudiando durante *t* horas para un examen. ¿Cuál cree que es más grande, $C(8) - C(7)$ o $C(3) - C(2)$? ¿Es la gráfica de *C* cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? ¿Por qué?

64. Se vierte café en una jarrita como la que se ilustra en la figura, con una rapidez constante (medida en unidades de volumen por unidad de tiempo). Trace una gráfica aproximada de la altura ocupada por el café como función del tiempo. Explique la forma de la gráfica en términos de la concavidad. ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?

65. Una *curva de respuesta a un medicamento* describe el nivel de medicación en el torrente sanguíneo después de que un medicamento es administrado. Con frecuencia se aplica una función de onda de impulso (surge, en inglés) $S(t) = At^pe^{-kt}$ para modelar la curva de respuesta, lo que refleja un aumento inicial en el nivel de medicamento y luego un descenso más gradual. Si, para un determinado medicamento, $A = 0.01$, $p = 4$, $k = 0.07$ y t se mide en minutos, calcule los tiempos correspondientes a los puntos de inflexión y explique su significado. Si usted dispone de un dispositivo de graficación, utilícelo para graficar la curva de respuesta.

66. La familia de curvas de campana

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

se utiliza en probabilidad y estadística y se le denomina *función de densidad normal*. La constante μ se conoce como *media*, y la constante positiva σ es la *desviación estándar*. Por simplicidad, cambiamos la escala de la función de modo que se elimine el factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y analizamos el caso especial donde $\mu = 0$. Por tanto, estudiamos la función

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

a) Encuentre la asíntota, el valor máximo y los puntos de inflexión de f.
b) ¿Qué rol tiene σ en la forma de la curva?
c) Ilustre graficando cuatro miembros de esta familia en la misma pantalla del dispositivo de graficación.

67. Encuentre una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga un valor máximo local de 3 en $x = -2$ y un valor mínimo local de 0 en $x = 1$.

68. ¿Para qué valores de los números a y b la función

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tiene el valor máximo $f(2) = 1$?

69. a) Si la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene el valor mínimo local $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ en $x = 1/\sqrt{3}$, ¿cuáles son los valores de a y b?
b) ¿Cuál de las rectas tangentes a la curva en el inciso a) tiene la menor pendiente?

70. ¿Para qué valores de a y b es (2, 2.5) un punto de inflexión de la curva $x^2y + ax + by = 0$? ¿Qué puntos de inflexión adicionales tiene la curva?

71. Demuestre que la curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tiene tres puntos de inflexión y todos ellos se encuentran sobre una recta.

72. Demuestre que las curvas $y = e^{-x}$ e $y = -e^{-x}$ tocan la curva $y = e^{-x}$ sen x en sus puntos de inflexión.

73. Demuestre que los puntos de inflexión de la curva $y = x$ sen x están sobre la curva $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$.

74-76 Suponga que todas las funciones son dos veces derivables y las segundas derivadas nunca son 0.

74. a) Si f y g son cóncavas hacia arriba sobre I, demuestre que $f + g$ es cóncava hacia arriba sobre I.
b) Si f es positiva y cóncava hacia arriba sobre I, demuestre que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba sobre I.

75. a) Si f y g son positivas, crecientes y funciones cóncavas hacia arriba sobre I, demuestre que la función producto fg es cóncava hacia arriba sobre I.
b) Demuestre que el inciso a) es verdadero si f y g son decrecientes.
c) Suponga que f es creciente y g es decreciente. Muestre, dando tres ejemplos, que fg puede ser cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o lineal. ¿Por qué no funciona en este caso el argumento de los incisos a) y b)?

76. Suponga que f y g son cóncavas hacia arriba sobre $(-\infty, \infty)$. ¿Bajo qué condiciones sobre f será la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ cóncava hacia arriba?

---

77. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugerencia:* demuestre que $f(x) = \tan x - x$ es creciente sobre $(0, \pi/2)$.]

78. a) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.
b) Pruebe que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.
c) Use inducción matemática para demostrar que para $x \geqslant 0$ y cualquier número entero positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

79. Demuestre que una función cúbica (una polinomial de tercer grado) siempre tiene exactamente un punto de inflexión. Si la gráfica tiene tres intersecciones en x: x_1, x_2 y x_3, demuestre que la coordenada x del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

80. ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tienen dos puntos de inflexión? ¿Un punto de inflexión? ¿Ninguno? Ilustre graficando P para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c decrece?

81. Demuestre que si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f y f'' existe en un intervalo abierto que contiene a c, entonces $f''(c) = 0$. [*Sugerencia:* aplique la prueba de la primera derivada y el teorema de Fermat a la función $g = f'$.]

82. Demuestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

83. Demuestre que la función $g(x) = x\,|\,x\,|$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, pero $g''(0)$ no existe.

84. Suponga que f''' es continua y $f'(c) = f''(c) = 0$, pero $f'''(c) > 0$. ¿f tiene un máximo o mínimo local en c? ¿f tiene un punto de inflexión en c?

85. Suponga que f es derivable sobre un intervalo I y $f'(x) > 0$ para todos los números x en I, excepto por un único número c. Demuestre que f es creciente sobre todo el intervalo I.

86. ¿Para qué valores de c la función

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + 3}$$

es creciente sobre $(-\infty, \infty)$?

87. Los tres casos en la prueba de la primera derivada cubren las situaciones que uno se encuentra con frecuencia, pero no agotan todas las posibilidades. Considere las funciones f, g y h cuyos valores en 0 son todas cero y, para $x \neq 0$,

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

a) Demuestre que 0 es un número crítico de las tres funciones, pero sus derivadas cambian de signo infinitamente por ambos lados de 0.
b) Demuestre que f no tiene un máximo local ni un mínimo local en 0, g tiene un mínimo local y h tiene un máximo local.

4.4 Formas indeterminadas y regla de l´Hospital

Supongamos que estamos tratando de analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aunque F no está definida cuando $x = 1$, necesitamos saber cómo se comporta *cerca* de 1. En particular, nos gustaría saber el valor del límite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Para el cálculo de este límite no podemos aplicar la ley 5 de los límites (el límite de un cociente es el cociente de los límites, consulte la sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aunque en la expresión $\boxed{1}$ existe el límite, su valor no es evidente porque el numerador y denominador tienden a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido.

En general, si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde ambos $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ conforme $x \to a$, entonces este límite puede o no puede existir y se llama **forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$**. Nos encontramos algunos límites de este tipo en el capítulo 2. Para funciones racionales, podemos cancelar factores comunes:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

Utilizamos un argumento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Pero estos métodos no funcionan para límites como los de [1], por lo que en esta sección presentamos un método sistemático, conocido como *regla de l'Hospital*, para la evaluación de formas indeterminadas.

Otra situación en la que no es evidente un límite ocurre cuando buscamos una asíntota horizontal de F y necesitamos evaluar el límite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x-1}$$

No es obvio cómo evaluar este límite porque tanto el numerador como el denominador son muy grandes conforme $x \to \infty$. Hay una lucha entre numerador y denominador. Si gana el numerador, el límite será ∞; si gana el denominador, la respuesta será 0. O puede haber algún comportamiento intermedio, en cuyo caso la respuesta será algún número finito positivo.

En general, si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde ambos $f(x) \to \infty$ (o $-\infty$) y $g(x) \to \infty$ (o $-\infty$), entonces el límite puede o no puede existir y se llama **forma indeterminada de tipo ∞/∞**. Vimos en la sección 2.6 que este tipo de límite puede ser evaluado para ciertas funciones, incluyendo funciones racionales, dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de x en el denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Este método no funciona para límites como [2], pero la regla de l'Hospital también se aplica a este tipo de forma indeterminada.

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

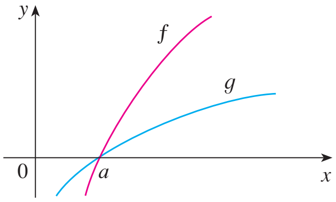
o que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).



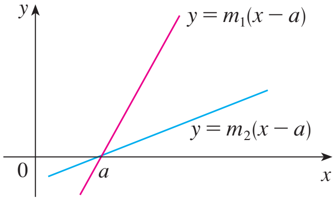


FIGURA 1

La figura 1 sugiere visualmente por qué regla de l'Hospital puede ser cierta. La primera gráfica muestra dos funciones derivables f y g, donde ambas se acercan a 0 conforme $x \to a$. Si pudiéramos acercarnos hacia el punto $(a, 0)$, las gráficas empezarían a parecerse a una recta. Pero si realmente las funciones fueran lineales, como en la segunda gráfica, entonces su razón sería

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

que es la razón de sus derivadas. Esto sugiere que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NOTA 1 La regla de l'Hospital señala que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se cumplan con las condiciones dadas. Es especialmente importante verificar las condiciones impuestas a los límites de f y g antes de utilizar la regla de l'Hospital.

L´Hospital

La Regla de l'Hospital proviene de un noble francés, el marqués de l'Hospital (1661-1704), pero fue descubierto por un matemático suizo, John Bernoulli (1667-1748). A veces se puede ver l'Hospital escrito como l'HÔpital, pero él mismo escribe su nombre así, l'Hospital, como era común en el siglo XVII. Vea en el ejercicio 81 el ejemplo que el marqués utiliza para ilustrar su regla. Consulte el proyecto en la página 310 para más detalles históricos.

NOTA 2 La regla de l'Hospital también es válida para límites unilaterales y límites al infinito o al infinito negativo; es decir, "$x \to a$" puede ser sustituido por cualquiera de los símbolos $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

NOTA 3 Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de l'Hospital es cierta. De hecho, utilizando la forma alternativa de la definición de una derivada, tenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Es más difícil demostrar la versión general de la regla de l'Hospital. Véase el apéndice F.

V EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Dado que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

podemos aplicar la regla de l'Hospital:

Observe que cuando se utiliza la regla de l'Hospital derivamos el numerador y el denominador por separado. No utilizamos la regla del cociente.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

V EJEMPLO 2 Obtenga $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Tenemos $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, así que la regla de l'Hospital da

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 2. Hemos discutido previamente que las funciones exponenciales crecen más rápido que las funciones potencia, por lo que el resultado del ejemplo 2 no es inesperado. Véase el ejercicio 71.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Ya que $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ conforme $x \to \infty$, el límite del lado derecho también está indeterminado, pero aplicando nuevamente la regla de l'Hospital obtenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

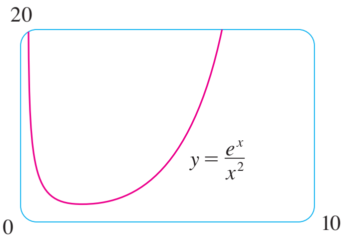


FIGURA 2

En la figura 3, se muestra la gráfica de la función del ejemplo 3. Ya hemos discutido previamente que las funciones logarítmicas crecen muy lentamente, así que no es sorprendente que la razón se aproxime a 0 conforme $x \to \infty$. Véase el ejercicio 72.

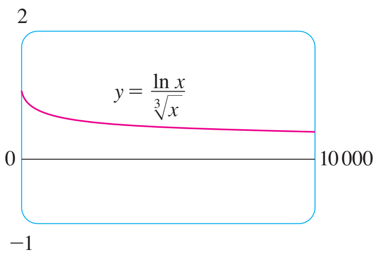


FIGURA 3

V EJEMPLO 3 Obtenga $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCIÓN Dado que $x \to \infty$ y $\sqrt[3]{x} \to \infty$ conforme $x \to \infty$, utilizamos la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Note que ahora el límite del lado derecho es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Pero en lugar de aplicar la regla de l'Hospital una segunda vez, como lo hicimos en el ejemplo 2, primero simplificamos la expresión y vemos que la segunda aplicación no es necesaria:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$. (Véase el ejercicio 44 de la sección 2.2.)

SOLUCIÓN Observamos que $x - x \to 0$ y $x^3 \to 0$ a medida que $x \to 0$, así que aplicamos la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Ya que el límite del lado derecho es aún una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, volvemos a aplicar la regla de l'Hospital:

La gráfica en la figura 4 da una confirmación visual del resultado de ejemplo 4. Sin embargo, si tuviéramos que extendernos demasiado, obtendríamos una gráfica muy inexacta porque $\tan x$ está cerca de x cuando ésta es pequeña. Véase el ejercicio 44d) de la sección 2.2.

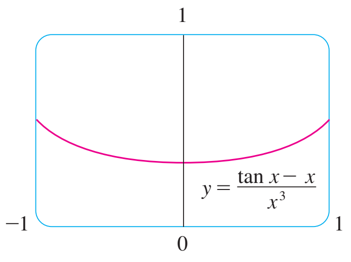


FIGURA 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

Puesto que $\lim_{x\to 0} \sec^2 x = 1$, simplificamos el cálculo escribiendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \sec^2 x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Podemos evaluar este último límite utilizando la regla de l'Hospital por tercera vez o expresando la $\tan x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y recurriendo a nuestro conocimiento de límites trigonométricos. Haciendo todos estos pasos, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$

V EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si intentamos ciegamente utilizar la regla de l'Hospital, obtendríamos

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

¡Esto es erróneo! Aunque el numerador $x \to 0$ conforme $x \to \pi^-$, note que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, así que aquí no es posible aplicar la regla de l'Hospital.

El límite requerido es, de hecho, fácil de encontrar porque la función es continua en π y el denominador es distinto de cero:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

El ejemplo 5 muestra lo que puede salir mal si se utiliza la regla de l'Hospital sin pensar. Hay otros límites que *pueden* encontrarse mediante la regla de l'Hospital, pero se encuentran más fácilmente por otros métodos (Véanse los ejemplos de 3 y 5 en la sección 2.3, ejemplo 3 en la sección 2.6 y la discusión al principio de esta sección), por lo que al evaluar cualquier límite debe tener en cuenta otros métodos antes de utilizar la regla de l'Hospital.

Productos indeterminados

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no es claro cuál es el valor de $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)]$, si existe. Hay una lucha entre f y g. Si gana f, la respuesta será 0; si gana g, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un comportamiento intermedio donde la respuesta es un número finito distinto de cero. Este tipo de límite se llama **forma indeterminada de tipo $0 \cdot \infty$**, y lo podemos abordar expresando el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞, por lo que podemos utilizar la regla de l'Hospital.

V EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

La figura 5 muestra la gráfica de la función del ejemplo 6. Observe que la función está indefinida en $x = 0$; la gráfica se aproxima al origen, pero nunca lo alcanza.

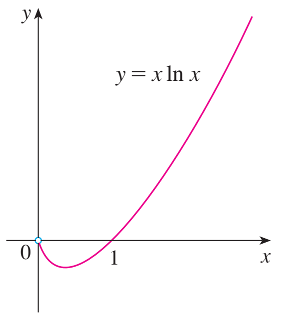


FIGURA 5

SOLUCIÓN El límite dado está indeterminado porque, conforme $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, mientras que el segundo factor ($\ln x$) tiende a $-\infty$. Escribiendo $x = 1/(1/x)$, tenemos $1/x \to \infty$ a medida que $x \to 0^+$, por lo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

NOTA Tenga en cuenta que al resolver el ejemplo 6 otra opción posible habría sido escribir

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da una forma indeterminada del tipo 0/0, pero si aplicamos la regla de l'Hospital, obtenemos una expresión más complicada que con la que empezamos. En general, cuando rescribimos un producto indeterminado, intentamos elegir la opción que conduce hasta el límite más simple.

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

se llama **forma indeterminada de tipo $\infty - \infty$**. Una vez más hay un contienda entre f y g. ¿La respuesta será ∞ (gana f) o será $-\infty$ (gana g) o habrá un término intermedio en un

número finito? Para encontrarlo, intentamos convertir la diferencia en un cociente (p. ej., utilizando un común denominador, racionalizando o factorizando un factor común), de manera que tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 Obtenga $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$

SOLUCIÓN Primero observe que $x \to \infty$ y $x \to \infty$ conforme $x \to (\pi/2)^-$, por lo que el límite está indeterminado. Aquí usamos un común denominador:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Observe que el uso de la regla de l'Hospital está justificada porque $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ y $\cos x \to 0$ a medida que $x \to (\pi/2)^-$.

Potencias indeterminadas

Hay varias formas indeterminadas que surgen del límite

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Aunque las formas de los tipos 0^0, ∞^0 y 1^∞ están indeterminadas, la forma 0^∞ no está indeterminada. (Véase el ejercicio 84.)

Cada uno de estos tres casos puede ser tratado ya sea tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o expresando la función como una exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Recuerde que ambos métodos fueron utilizados en la derivada de estas funciones.) Cualquiera de los métodos nos lleva al producto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 8 Obtenga $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Primero observe que cuando $x \to 0^+$, tenemos $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, por lo que el límite dado está indeterminado. Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $$\ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$$

Así que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora hemos calculado el límite de ln y, pero lo que queremos es el límite de y. Para encontrar este límite, utilizamos el hecho de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

En la figura 6 se muestra la gráfica de la función $y = x^x$, $x > 0$. Observe que, aunque 0^0 no está definido, los valores de la función tienden a 1 conforme $x \to 0^+$. Esto confirma el resultado del ejemplo 9.

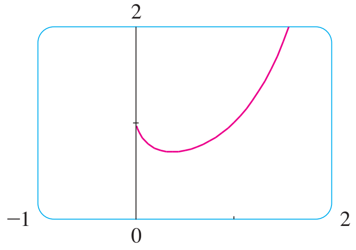


FIGURA 6

V EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Note que este límite está indeterminado ya que $0^x = 0$ para cualquier $x > 0$, pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Podríamos proceder como en el ejemplo 8 o expresando la función como una exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

En el ejemplo 6 usamos la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

4.4 Ejercicios

1-4 Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} q(x) = \infty$$

¿Cuáles de los siguientes límites son formas indeterminadas? Para aquellos que no tienen forma indeterminada, evalúe el límite donde sea posible.

1. a) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ c) $\lim_{x \to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ e) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. a) $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$ b) $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$

c) $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$

3. a) $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$ b) $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$

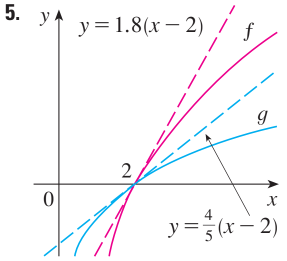
c) $\lim_{x \to a} [p(x) + q(x)]$

4. a) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$ c) $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

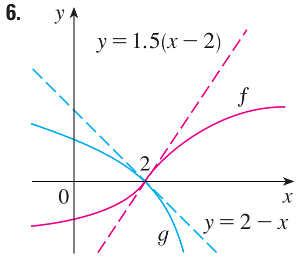
d) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{f(x)}$ e) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{q(x)}$ f) $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5-6 Utilice las gráficas de f y g y sus rectas tangentes en (2, 0) para encontrar $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5.



6.



7-66 Encuentre el límite. Utilice la regla de l'Hospital donde sea apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de usarlo. Si no aplica la regla de l'Hospital, explique por qué.

7. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

8. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

9. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$

10. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{4x^2 + 16x - 9}$

11. $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\tan 5x}$

13. $\lim_{t \to 0} \dfrac{e^{2t} - 1}{\operatorname{sen} t}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

15. $\lim_{\theta\to\pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \cos 2\theta}$

16. $\lim_{\theta\to\pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\csc\theta}$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + x^2}{1 - 2x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$

21. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$

24. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tanh x}{\tan x}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x3^x}{3^x - 1}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

35. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos\pi x}$

36. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln x + x - 1}$

37. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

40. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

41. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

42. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\, e^{-x/2}$

43. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

45. $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

46. $\lim_{x\to\infty} x \tan(1/x)$

47. $\lim_{x\to 1^+} \ln x \tan(\pi x/2)$

48. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \cos x \sec 5x$

49. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

50. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

51. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

52. $\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$

53. $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$

54. $\lim_{x\to 1^+} [\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

55. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

56. $\lim_{x\to 0^+} (\tan 2x)^x$

57. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

58. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

59. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

60. $\lim_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

61. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

62. $\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$

63. $\lim_{x\to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

64. $\lim_{x\to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$

65. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

66. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5}\right)^{2x+1}$

67-68 Utilice una gráfica para estimar el valor del límite. Después utilice la regla de l'Hospital para encontrar el valor exacto.

67. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

68. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

69-70 Ilustre la regla de l'Hospital graficando $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$ para ver que estas razones tienen el mismo límite conforme $x \to 0$. También, calcule el valor exacto del límite.

69. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

70. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

---

71. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier entero positivo n. Esto demuestra que la función exponencial tiende al infinito más rápido que cualquier potencia de x.

72. Pruebe que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica tiende a ∞ más lentamente que cualquier potencia de x.

73-74 ¿Qué sucede si intenta usted utilizar la regla del l'Hospital para obtener el límite? Evalúe el límite utilizando cualquier otro método.

73. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

74. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\tan x}$

---

75. Investigue la familia de curvas $f(x) = e^x - cx$. En particular, encuentre los límites conforme $x \to \pm\infty$ y determine los valores de c para los cuales f tiene un mínimo absoluto. ¿Qué pasa con los puntos mínimos a medida que c crece?

76. Si un objeto con masa m se deja caer a partir del reposo, un modelo para su rapidez v después de t segundos, teniendo en cuenta la resistencia del aire, es

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y c es una constante positiva. (En el capítulo 9 podremos deducir esta ecuación a partir del supuesto de que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, c es la constante de proporcionalidad). a) calcule $\lim_{t\to\infty} v$. ¿Cuál es el significado de este límite?

b) Para t fijo, utilice la regla de l'Hospital para calcular $\lim_{c \to 0^+} v$. ¿Qué puede concluir acerca de la velocidad de un objeto que cae en el vacío?

77. Si una cantidad inicial A_0 de dinero es invertida a una tasa de interés r compuesto n veces al año, el valor de la inversión después de t años es

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Si hacemos que $x \to \infty$, nos referimos a la *capitalización continua* de interés. Utilice la regla de l'Hospital para demostrar que si el interés es compuesto continuamente, entonces la cantidad después de t años es

$$A = A_0 e^{rt}$$

78. Si una bola de metal con masa m se arroja al agua y la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, la distancia que la bola viaja en el tiempo t es

$$s(t) = \frac{m}{c} \ln \cosh \sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

donde c es una constante positiva. Encuentre $\lim_{c \to 0^+} s(t)$.

79. Si un campo electrostático E actúa sobre un líquido o un dieléctrico polar gaseoso, el momento dipolar neto P por unidad de volumen es

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Demuestre que $\lim_{E \to 0^+} P(E) = 0$.

80. Un cable metálico tiene radio r y está cubierto por un aislante, por lo que la distancia desde el centro del cable hasta el exterior del aislante es R. La velocidad v de un impulso eléctrico en el cable es

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

donde c es una constante positiva. Encuentre los siguientes límites e interprete sus respuestas.

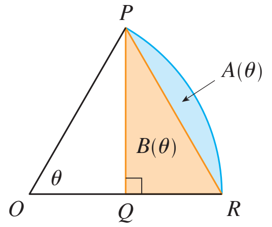
a) $\lim_{R \to r^+} v$ b) $\lim_{r \to 0^+} v$

81. La primera aparición impresa de la regla de l'Hospital fue en el libro *Analyse des Infiniment Petits* publicado en 1696 por el marqués de l'Hospital. Este texto fue el primer libro de cálculo publicado, y el ejemplo que utiliza el marqués en ese libro, para ilustrar esta regla, fue el de encontrar el límite de la función

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, donde $a > 0$. (En aquel tiempo era común escribir aa en vez de a^2). Resuelva este problema.

82. La figura muestra un sector de un círculo con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre el $\lim_{\theta \to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



83. Evalúe $\lim_{x \to \infty}\left[x - x^2 \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]$.

84. Suponga que f es una función positiva. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, demuestre que

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$$

Esto demuestra que 0^∞ no es una forma indeterminada.

85. Si f' es continua, $f(2) = 0$ y $f'(2) = 7$, evalúe

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

86. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la siguiente ecuación?

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

87. Si f' es continua, utilice la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$$

Explique el significado de esta ecuación con la ayuda de un diagrama.

88. Si f'' es continua, demuestre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

89. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

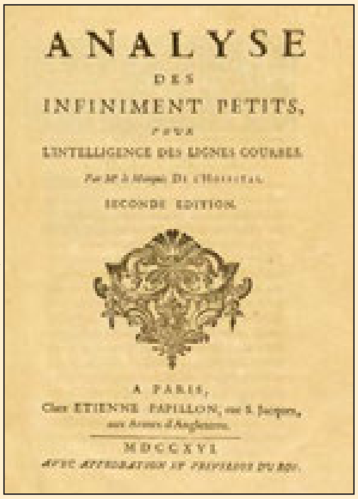
a) Utilice la definición de derivada para obtener $f'(0)$.
b) Demuestre que f tiene derivadas de todos los órdenes que están definidas sobre $\mathbb{R}$. [*Sugerencia:* primero demuestre por inducción que existe una función polinomial $p_n(x)$ y un entero no negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

90. Sea

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Demuestre que f es continua en $x = 0$.
b) Investigue gráficamente si f es derivable en $x = 0$ activando varias veces el *zoom* sobre el punto (0, 1) de la gráfica de f.
c) Demuestre que f no es derivable en $x = 0$. ¿Cómo puede usted conciliar este hecho con la apariencia de la gráfica del inciso b)?

REDACCIÓN DE PROYECTO — LOS ORÍGENES DE LA REGLA DE L'HOSPITAL



Biblioteca Thomas Fisher de libros excepcionales

www.stewartcalculus.com
La Internet es otra fuente de información para este proyecto. Haga clic en *History of Mathematics* para obtener una lista confiable de sitios web.

La regla de l'Hospital se publicó por primera vez en 1696, en el libro de texto del marqués de l'Hospital, *Analyse des Infiniment Petits*, pero la regla fue descubierta en 1694 por el matemático suizo Johann Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el marqués de l'Hospital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. Los detalles, incluso una traducción de la carta de l'Hospital a Bernoulli en la que propone el arreglo, pueden hallarse en el libro escrito por Eves [1].

Escriba un informe sobre los orígenes históricos y matemáticos de la regla de l'Hospital. Empiece por dar breves detalles biográficos de los dos hombres (el diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente) y describa el trato negociado entre ellos. A continuación, mencione el enunciado de l'Hospital de su regla, el cual se encuentra en el libro fuente de Struik [4] y, más sintéticamente, en el libro de Katz [3]. Observe que l'Hospital y Bernoulli formularon la regla geométricamente y dieron la respuesta en términos de diferenciales. Compare el enunciado de ellos con la versión de la regla de l'Hospital que se dio en la sección 4.4 y demuestre que, en esencia, los dos enunciados son los mismos.

1. Howard Eves, *In Mathematical Circles* (*Volumen* 2: *Cuadrantes III y IV*) (Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969), pp. 20-22.
2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York: Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Johann Bernoulli, por E. A. Fellman y J. 0. Fleckenstein, en el volumen II y el artículo sobre el marqués de l'Hospital, por Abraham Robinson, en el volumen VIII.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Nueva York: Harper Collins, 1993), pp. 484.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, *1200-1800* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), pp. 315-316.

4.5 Resumen de trazado de curvas

Hasta este momento sólo nos hemos interesado en algunos aspectos particulares del trazo de curvas: dominio, rango y simetría en el capítulo 1; límites, continuidad y asíntotas en el capítulo 2; derivadas y rectas tangentes en los capítulos 2 y 3, y valores extremos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, puntos de inflexión y regla de l'Hospital en este capítulo. Pero ya es tiempo de reunir toda esta información relacionada con la elaboración de gráficas, que revela las características importantes de las funciones.

Usted podría preguntar: ¿por qué no usar sólo una calculadora o computadora para dibujar una curva? ¿Por qué necesitamos aplicar el cálculo?

Es cierto que los instrumentos modernos son capaces de generar gráficas muy exactas. Pero aun el mejor instrumento para graficar tiene que ser utilizado en forma inteligente. Como se establece en la sección 1.4 es muy importante elegir un rectángulo de vista adecuado para evitar obtener una gráfica engañosa. Vea en particular los ejemplos 1, 3, 4 y 5 de dicha sección. La aplicación del cálculo permite descubrir los aspectos más interesantes de las gráficas y, en muchos casos, calcular *exactamente* los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión, y no sólo en forma aproximada.

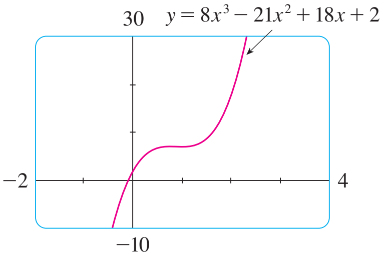


FIGURA 1

Por ejemplo, en la figura 1 se presenta la gráfica de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. A primera vista parece razonable esperar que la gráfica tenga la misma forma que las curvas cúbicas como $y = x^3$, y parece no tener máximo ni mínimo. Pero si calcula la derivada, se dará cuenta de que hay un máximo cuando $x = 0.75$ y un mínimo cuando $x = 1$. En efecto, si hacemos un acercamiento a esta parte de la gráfica, vemos el comportamiento que se ilustra en la figura 2. Sin la herramienta del cálculo, podría fácilmente pasarlas por alto.

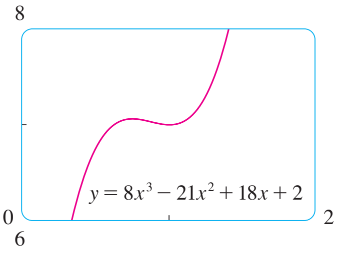


FIGURA 2

En la sección siguiente se elabora la gráfica de funciones recurriendo a la interacción del cálculo y los instrumentos para graficar. En esta sección dibujará gráficas consideran-

do la información siguiente. Se supone que no tiene instrumentos para graficar, pero si usted cuenta con uno, sólo utilícelo para verificar su trabajo.

Guía para el trazado de curvas

En la siguiente lista se intenta proponer directrices que sirvan de guía para dibujar una curva $y = f(x)$ a mano. No todos los elementos de la lista son relevantes para cada función. (Por ejemplo, una curva dada puede no tener una asíntota o poseer simetría.) Pero las directrices proporcionan toda la información que usted necesita para hacer un trazo que muestre los aspectos más importantes de la función.

A. Dominio A menudo resulta útil comenzar por determinar el dominio D de f; es decir, el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ está definida.

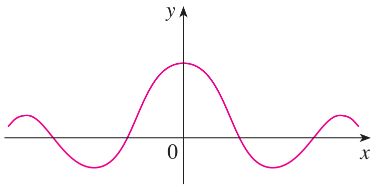
B. Intersección La intersección en y es $f(0)$ y esto nos indica dónde la curva cruza con el eje y. Para encontrar las intersecciones con el eje x, hacemos $y = 0$ y resolvemos para x. (Puede omitirse este paso si la ecuación es difícil de resolver.)

C. Simetría

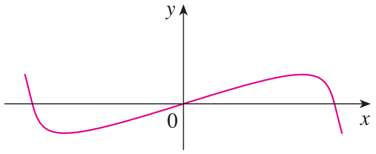
i) Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en D, es decir, la ecuación de la curva no se modifica cuando x se sustituye por $-x$, entonces f es una **función par** y la curva es simétrica respecto al eje y. Esto significa que nuestro trabajo se reduce a la mitad. Si conocemos la parte de la curva donde $x \geqslant 0$, entonces sólo necesitamos reflejar respecto al eje y, para obtener la curva completa [véase la figura 3a)]. Algunos ejemplo son $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ y $y = \cos x$.

ii) Si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D, entonces f es una **función impar** y la curva es simétrica respecto al origen. Una vez más, podemos obtener la curva completa si conocemos la parte de la curva donde $x \geqslant 0$. [Gire 180° alrededor del origen; véase la figura 3b)]. Algunos ejemplos simples de funciones impares son $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ y $y = \operatorname{sen} x$.

iii) Si $f(x + p) = f(x)$ para toda x en D, donde p es una constante positiva, entonces f se llama **función periódica** y el número p más pequeño se llama **periodo**. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tiene periodo 2π y $y = \tan x$ tiene periodo π. Si sabemos cómo es la gráfica en un intervalo de longitud p, entonces podemos utilizar una traslación para esbozar toda la gráfica (véase la figura 4).



a) Función par: simetría por reflexión



b) Función impar: simetría por rotación

FIGURA 3

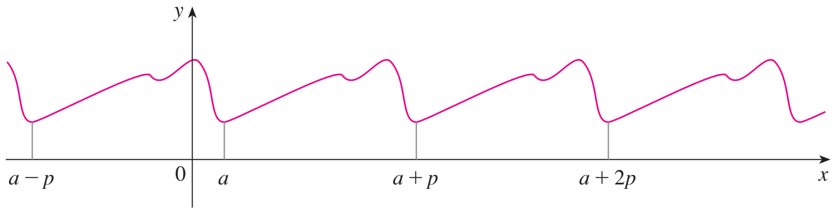


FIGURA 4
Función periódica: simetría traslacional

D. Asíntotas

i) *Asíntotas horizontales*. Recuerde de la sección 2.6 que si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$. Si resulta que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no tenemos una asíntota a la derecha, pero sigue siendo información útil para trazar la curva.

ii) *Asíntotas verticales*. Recuerde de la sección 2.2 que la recta $x = a$ es una asíntota vertical si al menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

1
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para funciones racionales puede usted localizar las asíntotas verticales igualando el denominador a 0 después de cancelar los factores comunes. Pero para otras funciones no se aplica este método.) Además, en el trazado de la curva es muy útil saber exactamente cuál de las afirmaciones en [1] es verdadera. Si $f(a)$ no está definida, pero a es un extremo del dominio de f, entonces debe calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)$, sea este límite infinito o no.

iii) *Asíntotas inclinadas*. Éstas se discuten al final de esta sección.

E. Intervalos donde la función es creciente o decreciente Utilice la prueba C y D. Obtenga $f'(x)$ y encuentre los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva (f es creciente) y los intervalos en los que $f'(x)$ es negativa (f es decreciente).

F. Valores mínimo y máximo locales Encuentre los números críticos de f [los números c donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existen]. Después utilice la prueba de la primera derivada. Si f' cambia de positiva a negativa en un número crítico c, entonces $f(c)$ es un máximo local. Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local. Aunque es generalmente preferible utilizar la prueba de la primera derivada, puede utilizar la prueba de la segunda derivada si $f'(c) = 0$ y $f''(c) \neq 0$. Entonces $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ es un mínimo local, mientras que $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ es un máximo local.

G. Concavidad y puntos de inflexión Obtenga $f''(x)$ y utilice la prueba de la concavidad. La curva es cóncava hacia arriba donde $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo donde $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión se localizan donde cambia de dirección la concavidad.

H. Trace la curva Utilizando la información de los apartados A-G, trace la gráfica. Dibuje las asíntotas como rectas discontinuas. Ubique las intersecciones, puntos máximos y mínimos y puntos de inflexión. Después, haga que la curva pase por estos puntos, creciendo y decreciendo de acuerdo con E, con concavidades de acuerdo con G y acercándose a las asíntotas. Si se desea precisión adicional cerca de cualquier punto, puede calcular el valor de la derivada allí. La recta tangente indica la dirección en que avanza la curva.

V EJEMPLO 1 Utilice la guía para trazar la gráfica de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. El dominio es

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. Las intersecciones en x y en y son, ambas, 0.

C. Ya que $f(-x) = f(x)$, la función f es par. La curva es simétrica respecto al eje y.

D.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Por tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Puesto que el denominador es 0 cuando $x = \pm 1$, obtenemos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Por ende, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. Esta información relacionada con los límites y asíntotas nos permite dibujar la curva preliminar de la figura 5, que muestra la curva cerca de las asíntotas.

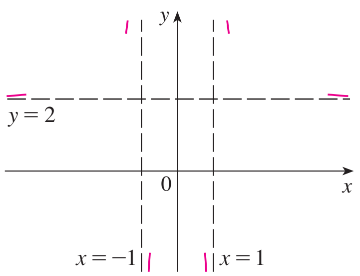


FIGURA 5
Trazo preliminar

Se muestra la curva que se aproxima a su asíntota horizontal desde arriba en la figura 5. Esto se confirma por los intervalos donde crece y decrece.

E. $$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Ya que $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$ $(x \neq -1)$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f es creciente sobre $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y decreciente sobre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Dado que f' cambia de positiva a negativa en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un máximo local por la prueba de la primera derivada.

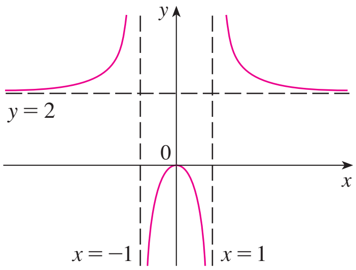


FIGURA 6
Trazo final de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

G. $$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Puesto que $12x^2 + 4 > 0$ para toda x, tenemos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

y $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Así, la curva es cóncava hacia arriba sobre los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-1, 1)$. No hay puntos de inflexión ya que $x = 1$ y $x = -1$ no están en el dominio de f.

H. Utilizando la información de E-G, terminamos el trazo de la figura 6.

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. Dominio: $\{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Simetría: ninguna

D. Dado que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

no hay asíntotas horizontales. Ya que $\sqrt{x + 1} \to 0$ conforme $x \to -1^+$ y $f(x)$ es siempre positiva, tenemos

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

y, por tanto, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x + 1} - x^2 \cdot 1/\left(2\sqrt{x + 1}\right)}{x + 1} = \frac{x(3x + 4)}{2(x + 1)^{3/2}}$$

Vemos que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ (note que $-\frac{4}{3}$ no está en el dominio de f), así que el único número crítico es $x = 0$. Ya que $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$, f es decreciente sobre $(-1, 0)$ y decreciente sobre $(0, \infty)$.

F. Puesto que $f'(0) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un mínimo local (y absoluto) por la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{2(x + 1)^{3/2}(6x + 4) - (3x^2 + 4x)3(x + 1)^{1/2}}{4(x + 1)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x + 1)^{5/2}}$$

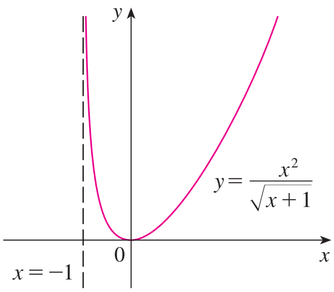


FIGURA 7

Note que el denominador siempre es positivo. El numerador es la cuadrática $3x^2 + 8x + 8$, que siempre es positiva porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32$, que es negativo, y el coeficiente de x^2 es positivo. Así $f''(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, lo que significa que f es cóncava hacia arriba sobre $(-1, \infty)$ y no hay punto de inflexión.

H. El trazo de la curva aparece en la figura 7.

V EJEMPLO 3 Trace la gráfica de $f(x) = xe^x$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Simetría: ninguna

D. Ya que tanto x como e^x son muy grandes conforme $x \to \infty$, tenemos que $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Sin embargo, a medida que $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, así que tenemos un producto indeterminado que requiere la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Así, el eje x es una asíntota horizontal.

E.
$$f'(x) = xe^x + e^x = (x + 7)e^x$$

Ya que e^x siempre es positiva, vemos que $f'(x) > 0$ cuando $x + 1 > 0$, y $f'(x) < 0$ cuando $x + 1 < 0$. Así que f es creciente sobre $(-1, \infty)$ y decreciente sobre $(-\infty, -1)$.

F. Ya que $f'(-1) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ es un mínimo local (y absoluto).

G.
$$f''(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$$

Ya que $f''(x) > 0$ si $x > -2$ y $f''(x) < 0$ si $x < -2$, f es cóncava hacia arriba sobre $(-2, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, -2)$. El punto de inflexión es $(-2, -2e^{-2})$.

H. Con toda esta información trazamos la curva de la figura 8.

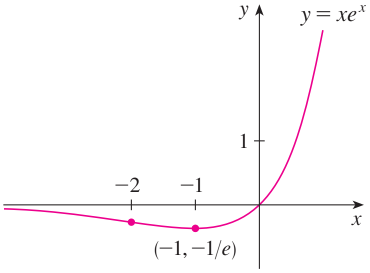


FIGURA 8

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{2}$. Las intersecciones en x se localizan donde $\cos x = 0$, esto es, $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero.

C. f no es par ni impar, pero $f(x + 2\pi) = f(x)$ para toda x, por lo que f es periódica con periodo 2π. Así, en lo siguiente, necesitamos considerar sólo $0 \leqslant x \leqslant 2x$ y después extender la curva por traslación en la parte H.

D. Asíntotas: ninguna

E.
$$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{2 \operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Así, $f'(x) > 0$ cuando $2 \operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2} \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. Por tanto, f es creciente sobre $(7\pi/6,\ 11\pi/6)$ y decreciente sobre $(0,\ 7\pi/6)$ y $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. Del apartado E y la prueba de la primera derivada, vemos que el valor mínimo local es $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ y el valor máximo local es $f(11\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

G. Si utilizamos la regla del cociente otra vez y simplificamos; obtenemos

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Debido a que $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ y $1 - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ para toda x, sabemos que $f''(x) > 0$ cuando $\cos x < 0$, esto es, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Así que f es cóncava hacia arriba sobre $(\pi/2, 3\pi/2)$ y cóncava hacia abajo sobre $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$. Los puntos de inflexión son $(\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$.

H. La gráfica de la función restringida a $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ se muestra en la figura 9. Después, la extendemos utilizando la periodicidad, para completar la gráfica de la figura 10.

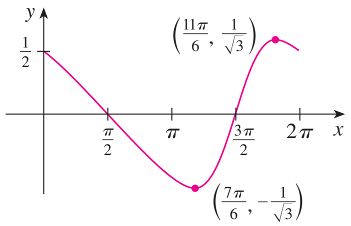


FIGURA 9

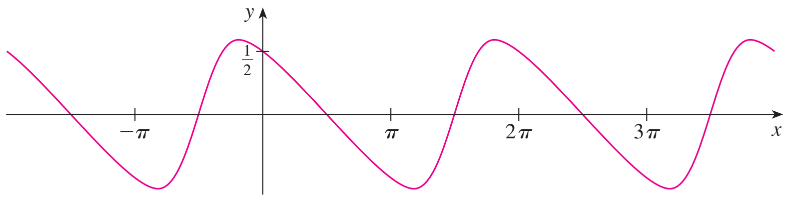


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. El dominio es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. La intersección en y es $f(0) = \ln 4$. Para encontrar la intersección con x, hacemos

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabemos que $\ln 1 = 0$, así que tenemos $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ y, por tanto, las intersecciones en x son $\pm\sqrt{3}$.

C. Ya que $f(-x) = f(x)$, f es par y la curva es simétrica respecto al eje y.

D. Buscamos asíntotas verticales en los extremos del dominio. Como $4 - x^2 \to 0^+$ conforme $x \to 2^-$ y también a medida que $x \to -2^+$, tenemos

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Así, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

E.

$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Dado que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 2$, f es creciente sobre $(-2, 0)$ y decreciente sobre $(0, 2)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Como f' cambia de positiva a negativa en $x = 0$, $f(0) = \ln 4$ es un máximo local por la prueba de la primera derivada.

G.

$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Ya que $f''(x) < 0$ para toda x, la curva es cóncava hacia abajo sobre $(-2, 2)$ y no tiene punto de inflexión.

H. Con toda esta información, trazamos la curva en la figura 11.

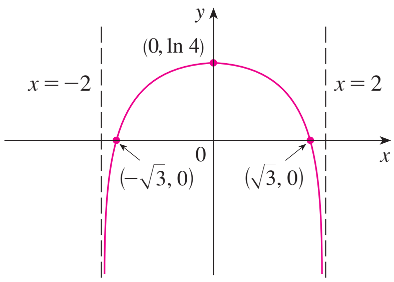


FIGURA 11
$y = \ln(4 - x^2)$

Asíntotas inclinadas

Algunas curvas tienen asíntotas que son *oblicuas*; esto es, no son horizontales ni verticales. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

entonces la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota inclinada** (oblicua) porque la distancia

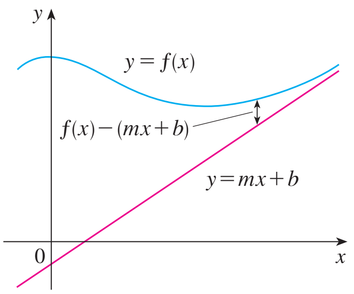


FIGURA 12

vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a cero, como en la figura 12. (Existe una situación similar si hacemos $x \to -\infty$.) Para funciones racionales, las asíntotas inclinadas se producen cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En tal caso la ecuación de la asíntota oblicua puede encontrarse por división larga como en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. El dominio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Puesto que $f(-x) = -f(x)$, f es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen.

D. Ya que $x^2 + 1$ nunca es 0, no hay asíntotas verticales. Ya que $f(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ a medida que $x \to -\infty$ no hay asíntotas horizontales. Pero la división larga da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{conforme } x \to \pm\infty$$

Así que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

E.
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

Dado que $f'(x) > 0$ para toda x (excepto 0), f es creciente sobre $(-\infty, \infty)$.

F. Aunque $f'(0) = 0$, f' no cambia de signo en $x = 0$, así que no hay máximo ni mínimo local.

G.
$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Ya que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$, podemos elaborar la siguiente tabla:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	Concavidad de f
$x < -\sqrt{3}$	−	−	+	+	Hacia arriba sobre $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	−	+	+	−	Hacia abajo sobre $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	+	+	+	+	Hacia arriba sobre $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	+	−	+	−	Hacia abajo sobre $(\sqrt{3}, \infty)$

Los puntos de inflexión son $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

H. La gráfica de f se muestra en la figura 13.

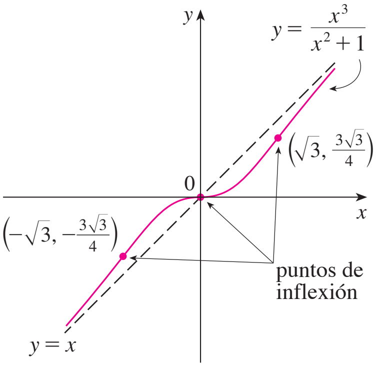


FIGURA 13

4.5 Ejercicios

1-54 Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las siguientes curvas:

1. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$

2. $y = 2 + 3x^2 - x^3$

3. $y = x^4 - 4x$

4. $y = x^4 - 8x^2 + 8$

5. $y = x(x - 4)^3$

6. $y = x^5 - 5x$

7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x}{x - 1}$

10. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

11. $y = \dfrac{x - x^2}{2 - 3x + x^2}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

13. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

15. $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$

19. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x - 2}$

21. $y = (x - 3)\sqrt{x}$

22. $y = 2\sqrt{x} - x$

23. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

26. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

27. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $y = x - 3x^{1/3}$

30. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

31. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

32. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

33. $y = \operatorname{sen}^3 x$

34. $y = x + \cos x$

35. $y = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

36. $y = 2x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

37. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

38. $y = \sec x + \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$

39. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

40. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

41. $y = \arctan(e^x)$

42. $y = (1 - x)e^x$

43. $y = 1/(1 + e^{-x})$

44. $y = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

45. $y = x - \ln x$

46. $y = e^{2x} - e^x$

47. $y = (1 + e^x)^{-2}$

48. $y = e^x/x^2$

49. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

50. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

51. $y = xe^{-1/x}$

52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

53. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

54. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

---

55. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, m es la masa cuando la partícula se mueve con rapidez v relativa al observador y c es la rapidez de la luz. Trace la gráfica de m como una función de v.

56. En la teoría de la relatividad, la energía de una partícula es

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, λ es la longitud de onda y h es la constante de Planck. Trace la gráfica de E como una función de λ. ¿Qué indica la gráfica en relación con la energía?

57. Un modelo para la divulgación de un rumor está dado por la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que sabe del rumor en el tiempo t, y a y k son constantes positivas.

a) ¿Cuándo habrá oído el rumor la mitad de la población?
b) ¿Cuándo es mayor la rapidez de divulgación del rumor?
c) Trace la gráfica de p.

58. Un modelo para la concentración de un medicamento inyectado en la corriente sanguínea es

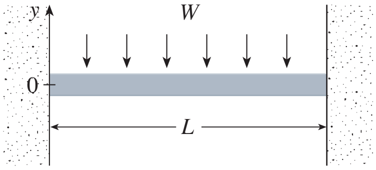
$$C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$$

donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$. Trace la gráfica de la función de concentración. ¿Qué nos indica la gráfica en relación con la variación de la concentración al transcurrir el tiempo?

59. La figura muestra una viga de longitud L incrustada en muros de hormigón. Si una carga constante W se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud, la viga toma la forma de la curva de deflexión

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

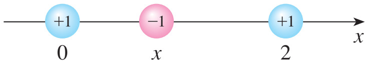
donde E e I son constantes positivas. (E es el módulo de Young de elasticidad e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga). Trace la gráfica de la curva de deflexión.



60. La ley de Coulomb establece que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1 ubicadas en las posiciones 0 y 2 sobre una recta de coordenadas y una partícula con carga -1 en una posición x entre ellas. De la ley del Coulomb se deduce que la fuerza neta que actúa sobre la partícula ubicada a la mitad es

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

donde k es una constante positiva. Trace la gráfica de la función fuerza neta. ¿Qué indica la gráfica acerca de la fuerza?



61-64 Encuentre la ecuación de la asíntota inclinada en cada una de la funciones dadas. No trace la gráfica de la curva.

61. $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

62. $y = \dfrac{2x^3+x^2+x+3}{x^2+2x}$

63. $y = \dfrac{4x^3-2x^2+5}{2x^2+x-3}$

64. $y = \dfrac{5x^4+x^2+x}{x^3-x^2+2}$

65-70 Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las siguientes curvas. En el apartado D encuentre la ecuación de la asíntota inclinada.

65. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

66. $y = \dfrac{1+5x-2x^2}{x-2}$

67. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

68. $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

69. $y = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$

70. $y = 1 - x + e^{1+x/3}$

71. Demuestre que la curva $y = x - \tan^{-1}x$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + \pi/2$ y $y = x - \pi/2$. Utilice este hecho para trazar la curva.

72. Demuestre que la curva $y = \sqrt{x^2+4x}$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + 2$ y $y = -x - 2$. Utilice este hecho para trazar la curva.

73. Demuestre que las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ son asíntotas inclinadas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

74. Sea $f(x) = (x^3+1)/x$. Demuestre que

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Esto demuestra que la gráfica de f se aproxima a la gráfica de $y = x^2$ y decimos que la curva $y = f(x)$ es *asintótica* a la parábola $y = x^2$. Utilice este hecho para trazar la gráfica de f.

75. Analice la conducta asintótica de $f(x) = (x^4+1)/x$ de la misma manera que en el ejercicio 74. Después utilice su resultado para ayudarse en el trazo de la gráfica de f.

76. Utilice la conducta asintótica de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para trazar su gráfica sin usar el procedimiento de trazo de curvas de esta sección.

4.6 Graficación con cálculo y calculadoras

Si no ha leído la sección 1.4, debería hacerlo ahora. En particular, se explica cómo evitar algunos de los escollos de los dispositivos de graficación, eligiendo rectángulos de vista adecuados.

El método que utilizamos para trazar curvas en la sección anterior fue una culminación de gran parte de nuestro estudio del cálculo diferencial. La gráfica fue el objeto final que hemos producido. En esta sección nuestro punto de vista es completamente diferente. Aquí comenzamos con una gráfica producida por una calculadora graficadora o un equipo de cómputo y luego la refinamos. Utilizamos el cálculo para asegurarnos de que nos revelan todos los aspectos importantes de la curva. Y con el uso de dispositivos de graficación podemos abordar curvas que serían demasiado complicadas sin considerar la tecnología. El tema es la *interacción* entre el cálculo y las calculadoras.

EJEMPLO 1 Grafique la función polinomial $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Utilice las gráficas de f' y f'' para estimar todos los puntos máximos y mínimos e intervalos de concavidad.

SOLUCIÓN Si especificamos un dominio, pero no un rango, muchos dispositivos de graficación utilizan un rango adecuado de los valores calculados. La figura 1 muestra el trazo que hace un dispositivo si especificamos que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Aunque este rectángulo de vista es útil para mostrar que el comportamiento asintótico (o comportamiento extremo) es el mismo que para $y = 2x^6$, obviamente está ocultando algún detalle más fino. Así que cambiamos el rectángulo de vista a $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$ que se muestra en la figura 2.

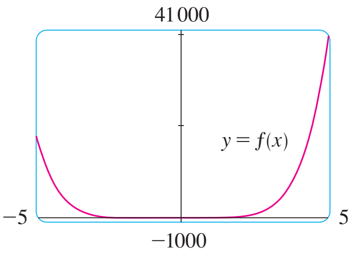


FIGURA 1

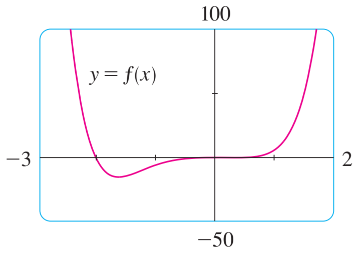


FIGURA 2

De esta gráfica se deduce que hay un valor mínimo absoluto de alrededor -15.33 cuando $x \approx -1.62$ (utilizando el cursor) y f es decreciente sobre $(-\infty, -1.62)$ y es creciente sobre $(-1.62, \infty)$. También parece haber una recta tangente horizontal en el origen y puntos de inflexión cuando $x = 0$ y cuando x se encuentra en algún lugar entre -2 y -1.

Ahora vamos a tratar de confirmar estas impresiones mediante el cálculo. Derivamos y obtenemos

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

Cuando graficamos f' en la figura 3 vemos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando $x \approx -1.62$; esto confirma (por la prueba de la primera derivada) el valor mínimo que hemos encontrado antes. Pero, quizá para nuestra sorpresa, también notamos que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando $x = 0$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.35$. Esto significa que f tiene un máximo local en 0 y un mínimo local cuando $x \approx 0.35$, pero éstos fueron escondidos en la figura 2. De hecho, si hacemos ahora acercamientos hacia el origen en la figura 4, vemos lo que nos faltó antes: un valor máximo local de 0 cuan-do $x = 0$ y un valor mínimo local de -0.1 cuando $x \approx 0.35$.

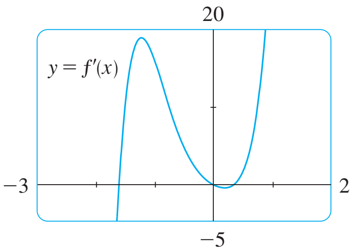


FIGURA 3

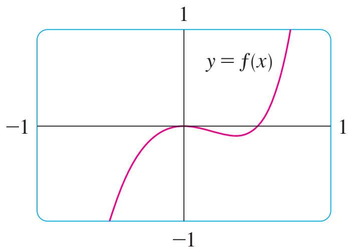


FIGURA 4

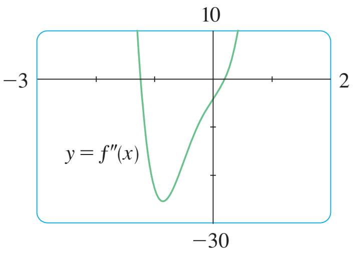


FIGURA 5

¿Qué pasa con la concavidad y los puntos de inflexión? En las figuras 2 y 4 parece haber puntos de inflexión cuando x está un poco a la izquierda de -1 y cuando x está un poco a la derecha del 0. Pero es difícil determinar puntos de inflexión de la gráfica de f, por lo que la graficamos la segunda derivada f'' en la figura 5. Vemos que f'' cambia de positiva a negativa cuando $x \approx -1.23$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.19$. Así, corregimos con dos decimales, f es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, -1.23)$ y $(0.19, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-1.23, 0.19)$. Los puntos de inflexión son $(-1.23, -10.18)$ y $(0.19, -0.05)$.

Hemos descubierto que una simple gráfica no revela todas las características importantes de esta función polinomial. Pero las figuras 2 y 4, tomadas en conjunto, proporcionan una imagen más precisa.

V EJEMPLO 2 Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

en un rectángulo de vista que contenga todas las características importantes de la función. Estime los valores máximos y mínimos y los intervalos de concavidad. Después utilice el cálculo para encontrar exactamente estas cantidades.

SOLUCIÓN La figura 6, producida por un equipo de cómputo con escala automática, es un desastre. Algunas calculadoras graficadoras utilizan $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ como el rectángulo de vista predeterminada, así que vamos a probarlo. Obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 7; es una mejora importante.

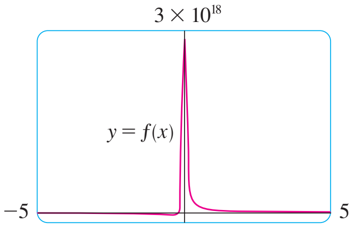


FIGURA 6

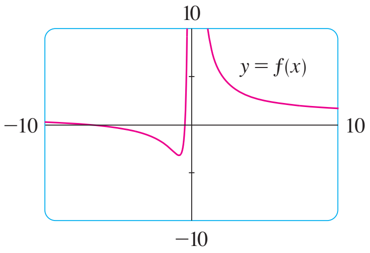


FIGURA 7

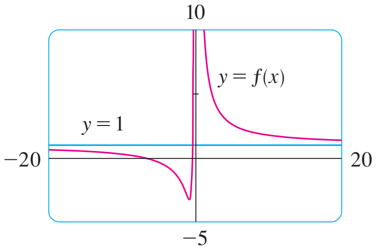


FIGURA 8

El eje y parece ser una asíntota vertical y, de hecho, lo es porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

La figura 7 también nos permite estimar las intersecciones con el eje x: cerca de -0.5 y -6.5. Los valores exactos se obtienen mediante la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 + 7x + 3 = 0$; obtenemos $x = \left(-7 \pm \sqrt{37}\right)/2$.

Para obtener un mejor vistazo de las asíntotas horizontales, cambiamos el rectángulo de vista $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ en la figura 8. Parece que $y = 1$ es la asíntota horizontal y esto es fácilmente confirmado:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

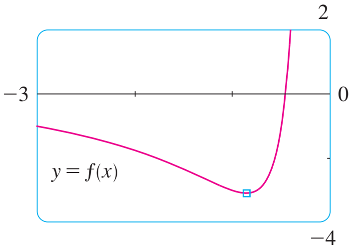


FIGURA 9

Para estimar el valor mínimo acercamos el rectángulo de vista $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ en la figura 9. El cursor indica que el valor mínimo absoluto es aproximadamente -3.1 cuando $x \approx -0.9$, y vemos que la función decrece sobre $(-\infty, -0.9)$ y $(0, \infty)$ y crece sobre $(-0.9, 0)$. Los valores exactos se obtienen derivando:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Esto demuestra que $f'(x) > 0$ cuando $-\frac{6}{7} < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $x < -\frac{6}{7}$ y cuando $x > 0$. El valor mínimo exacto es $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3.08$.

La figura 9 también muestra que un punto de inflexión se localiza en algún lugar entre $x = -1$ y $x = -2$. Podríamos estimar con mucho más exactitud utilizando la gráfica de la segunda derivada, pero en este caso es fácil encontrar valores exactos. Ya que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x + 9)}{x^4}$$

vemos que $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{9}{7}$ ($x \neq 0$). Así, f es cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ y $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

El análisis mediante las dos primeras derivadas muestra en la figura 8 todos los aspectos importantes de la curva.

V EJEMPLO 3 Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$.

SOLUCIÓN De nuestra experiencia con una función racional en el ejemplo 2, comencemos por graficar f en el rectángulo de vista $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. De la figura 10 tenemos la sensación de que vamos a tener que acercarnos para ver algún detalle más fino y también para ver la imagen más grande. Pero, como una guía para hacer un acercamiento inteligente, primero veamos con más cuidado la expresión para $f(x)$. Debido a los factores $(x-2)^2$ y $(x-4)^4$ en el denominador, esperamos que $x = 2$ y $x = 4$ sean las asíntotas verticales. De hecho, lo son, ya que

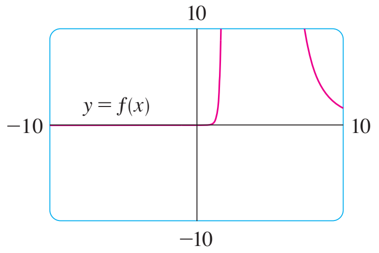


FIGURA 10

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$$

Para encontrar las asíntotas horizontales, dividimos el numerador y el denominador por x^6:

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\dfrac{x^2}{x^3} \cdot \dfrac{(x+1)^3}{x^3}}{\dfrac{(x-2)^2}{x^2} \cdot \dfrac{(x-4)^4}{x^4}} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2\left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^4}$$

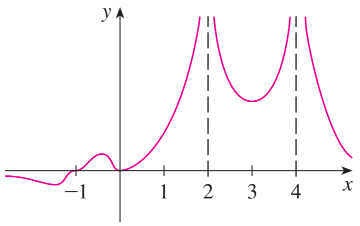


FIGURA 11

Esto demuestra que $f(x) \to 0$ conforme $x \to \pm\infty$, así que el eje x es una asíntota horizontal.

También es muy útil examinar el comportamiento de la gráfica cerca de la intersección con el eje x, usando un análisis como en el ejemplo 12 en la sección 2.6. Ya que x^2 es positiva, $f(x)$ no cambia de signo en 0 y, por tanto, su gráfica no cruza el eje x en 0. Pero, debido al factor $(x+1)^3$, la gráfica cruza el eje x en -1 y tiene allí una recta tangente horizontal. Poniendo toda esta información junta, pero sin utilizar derivadas, vemos que la curva tiene que ser algo como la de la figura 11.

Ahora que sabemos qué buscar, nos acercamos con el *zoom* (varias veces) para producir las gráficas de las figuras 12 y 13 y alejamos (varias veces) para obtener la figura 14.

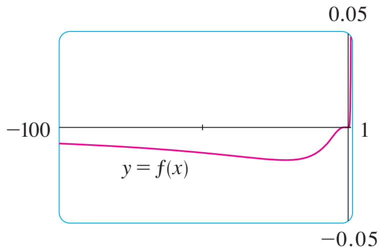


FIGURA 12

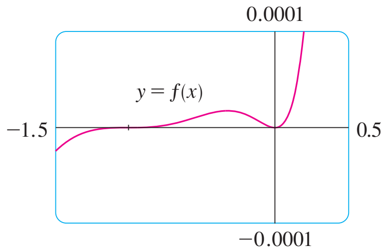


FIGURA 13

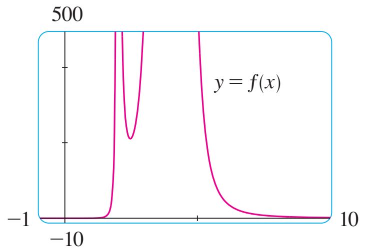


FIGURA 14

De estas gráficas, podemos leer que el mínimo absoluto es aproximadamente -0.02 y se produce cuando $x \approx -20$. También hay un máximo local ≈ 0.00002 cuando $x \approx -0.3$ y un mínimo local ≈ 211 cuando $x \approx 2.5$. Estas gráficas también muestran tres puntos de inflexión cerca de -35, -5 y -1 y dos entre -1 y 0. Para estimar los puntos de inflexión más cercanamente necesitaríamos la gráfica de f'', pero graficar f'' a mano es una tarea poco razonable. Si tiene un sistema algebraico computarizado, es más fácil (véase el ejercicio 15).

Hemos visto que, para esta función en particular, son necesarias *tres* gráficas (figuras 12, 13 y 14) para transmitir toda la información útil. La única manera de mostrar todas estas características de la función en una gráfica única es dibujar a mano. A pesar de las exageraciones y distorsiones, la figura 11 logra resumir la naturaleza esencial de la función.

La familia de funciones

$$f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, cx)$$

donde c es una constante, aparece en aplicaciones a la sintonía de frecuencia modulada (FM). Una onda sinusoidal es modulada por una onda con una frecuencia diferente (sen cx). El caso donde $c = 2$ se estudia en el ejemplo 4. El ejercicio 27 explora otro caso especial.

EJEMPLO 4 Grafique la función $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x)$. Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, estime todos los valores máximos y mínimos, intervalos donde la función crece y decrece y los puntos de inflexión.

SOLUCIÓN Primero observamos que f es periódica con periodo 2π. Asimismo, f es impar y $|f(x)| \leqslant 1$ para toda x. Así, la elección de un rectángulo de vista no es un problema para esta función: empezamos con $[0, \pi]$ por $[-1.1, 1.1]$ (Véase la Figura 15.) Parece que hay tres valores máximos locales y dos valores mínimos locales en esa ventana. Para confirmar esto y localizarlos con mayor precisión, obtenemos

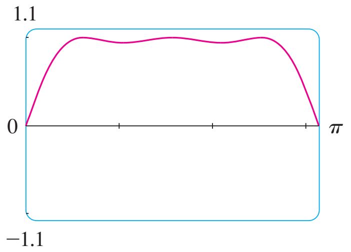


FIGURA 15

$$f'(x) = \cos(x + \text{sen}\, 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x)$$

y graficamos f y f' en la figura 16.

Utilizando el *zoom* y la prueba de la primera derivada, nos encontramos con los siguientes valores aproximados:

Intervalos sobre los que crece: (0, 0.6), (1.0, 1.6), (2.1, 2.5)

Intervalos sobre los que decrece: (0.6, 1.0), (1.6, 2.1), (2.5, π)

Valores máximos locales: $f(0.6) \approx 1$, $f(1.6) \approx 1$, $f(2.5) \approx 1$

Valores mínimos locales: $f(1.0) \approx 0.94$, $f(2.1) \approx 0.94$

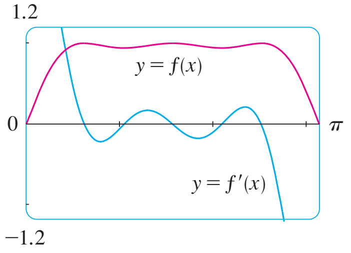


FIGURA 16

La segunda derivada es

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2\, \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x) - 4\, \text{sen}\, 2x \cos(x + \text{sen}\, 2x)$$

Graficando f y f'' en la figura 17, obtenemos los siguientes valores aproximados:

Cóncava hacia arriba sobre: (0.8, 1.3), (1.8, 2.3)

Cóncava hacia abajo sobre: (0, 0.8), (1.3, 1.8), (2.3, π)

Puntos de inflexión: (0, 0), (0.8, 0.97), (1.3, 0.97), (1.8, 0.97), (2.3, 0.97)

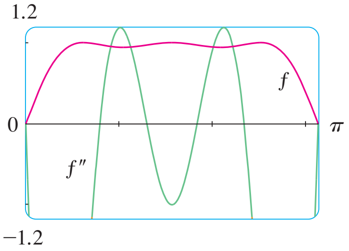


FIGURA 17

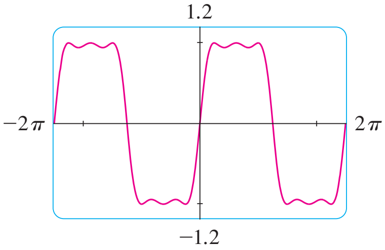


FIGURA 18

Hemos comprobado que la figura 15 representa f con precisión para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, por lo que podemos afirmar que la gráfica ampliada en la figura 18 representa f con precisión para $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Nuestro último ejemplo se refiere a las *familias* de funciones. Como se explica en la sección 1.4, esto significa que las funciones de la familia están relacionadas con otras mediante una fórmula que contiene una o más constantes arbitrarias. Cada valor de la constante da lugar a un miembro de la familia, y la idea es ver cómo varía la gráfica de la función con los constantes cambios.

V EJEMPLO 5 ¿Cómo varía la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$ cuando c cambia?

SOLUCIÓN Las gráficas de las figuras 19 y 20 (casos especiales para $c = 2$ y $c = -2$) muestran dos maneras muy diferentes de ver las curvas. Antes de dibujar más gráficas, veamos qué tienen en común los miembros de esta familia. Ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para cualquier valor de c, todas tienen al eje x como asíntota horizontal. Una asíntota vertical ocurre cuando $x^2 + 2x + c = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$. Cuando $c > 1$, no hay asíntotas verticales (como en la figura 19). Cuando $c = 1$, la gráfica tiene una sola asíntota vertical $x = -1$ porque

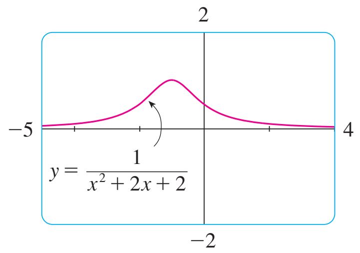


FIGURA 19
$c = 2$

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

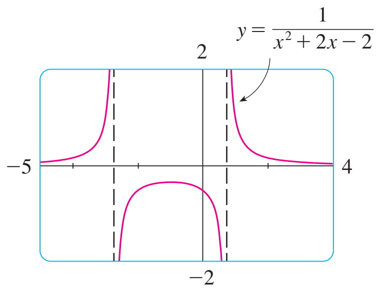


FIGURA 20
$c = -2$

Cuando $c < 1$, hay dos asíntotas verticales $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$ (como en la figura 20).

Ahora obtenemos la derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Esto demuestra que $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$ (si $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$, esto significa que f es creciente sobre $(-\infty, -1)$ y decreciente sobre $(-1, \infty)$. Para $c > 1$, hay un valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c - 1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c - 1)$ es un valor máximo local, y los intervalos donde es creciente y decreciente se interrumpen debido a las asíntotas verticales.

La figura 21 es una "serie de diapositivas" que muestran cinco miembros de la familia, todas representadas en el rectángulo de vista $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Como previmos, $c = 1$ es el valor desde donde tiene lugar una transición de dos asíntotas verticales a una y luego a ninguna. Cuando c aumenta desde 1, vemos que el punto máximo resulta menor; esto se explica por el hecho de que $1/(c - 1) \to 0$ conforme $c \to \infty$. Cuando c disminuye de 1, las asíntotas verticales se separan más ampliamente porque la distancia entre ellas es $2\sqrt{1 - c}$, lo cual resulta muy grande a medida que $c \to -\infty$. Nuevamente, el punto máximo se aproxima al eje x porque $1/(c - 1) \to 0$ conforme $c \to -\infty$.

TEC Vea una animación de la figura 21 en Visual 4.6

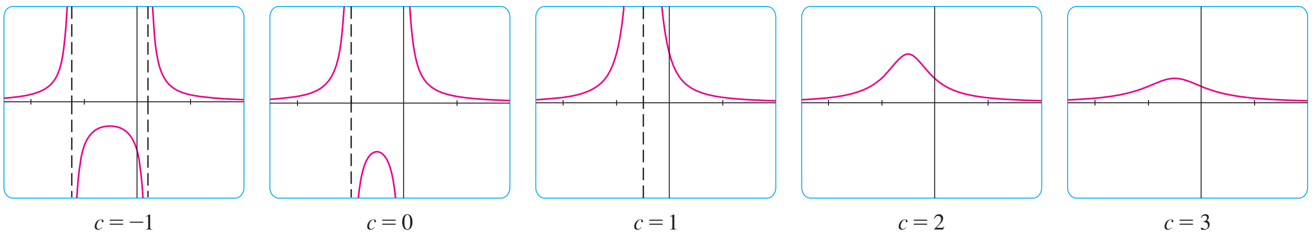


FIGURA 21 La familia de funciones $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Claramente, no hay ningún punto de inflexión cuando $c \leqslant 1$. Para $c > 1$ obtenemos

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

y deducimos que los puntos de inflexión ocurren cuando $x = -1 \pm \sqrt{3(c-1)}/3$. Así, los puntos de inflexión se extienden al aumentar c, y esto parece verosímil, por lo que se ve en las dos últimas partes de la figura 21.

4.6 Ejercicios

1-8 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de cada una de las siguientes curvas. En particular, debe utilizar gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos donde f es creciente y decreciente, valores extremos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

1. $f(x) = 4x^4 - 32x^3 + 89x^2 - 95x + 29$

2. $f(x) = x^6 - 15x^5 + 75x^4 - 125x^3 - x$

3. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 400x^4 + 2\,500x^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{40x^3 + x + 1}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + x^2 + 1}$

6. $f(x) = 6\,\text{sen}\,x - x^2, \quad -5 \leqslant x \leqslant 3$

7. $f(x) = 6\,\text{sen}\,x + \cot x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

8. $f(x) = e^x - 0.186x^4$

9-10 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de cada una de las siguientes curvas. Determine los intervalos donde f es creciente y decreciente e intervalos de concavidad y utilice el cálculo para encontrar exactamente estos intervalos.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ **10.** $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

11-12

a) Grafique la función.
b) Utilice la regla de l'Hospital para explicar el comportamiento conforme $x \to 0$.
c) Estime el valor mínimo y los intervalos de concavidad. Después, utilice el cálculo para encontrar los valores exactos.

11. $f(x) = x^2 \ln x$ **12.** $f(x) = xe^{1/x}$

13-14 Esboce a mano la gráfica utilizando asíntotas e intersecciones pero no derivadas. Después utilice su esbozo como una guía para elaborar gráficas (con un dispositivo de graficación) que muestran las principales características de la curva. Utilice estas gráficas para estimar los valores máximos y mínimos.

13. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$ **14.** $f(x) = \dfrac{(2x+3)^2(x-2)^5}{x^3(x-5)^2}$

SAC **15.** Si f es la función considerada en el ejemplo 3, utilice un sistema algebraico computarizado para calcular f' y luego grafíquela para confirmar que todos los valores máximos y mínimos son como en el ejemplo. Calcule f'' y utilícela para estimar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

SAC **16.** Si f es la función del ejercicio 14, encuentre f' y f'' y utilice sus gráficas para estimar los intervalos donde f es creciente, decreciente y de concavidad.

SAC **17-22** Utilice un sistema algebraico computarizado para graficar f y para encontrar f' y f''. Use las gráficas de estas derivadas para estimar los intervalos donde f es creciente y decreciente, los valores extremos, intervalos de concavidad y sus puntos de inflexión.

17. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^4 + x^3 - x^2 + 2}$ **18.** $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x + x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5\,\text{sen}\,x}, \quad x \leqslant 20$

20. $f(x) = (x^2 - 1)\,e^{\arctan x}$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ **22.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\tan x}}$

SAC **23-24** Grafique la función utilizando tantos rectángulos de vista como necesite para representar la verdadera naturaleza de la función.

23. $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x^4)}{x^8}$ **24.** $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$

SAC **25-26**

a) Grafique la función.
b) Explique la forma de la gráfica obteniendo el límite conforme $x \to 0^+$ o a medida que $x \to \infty$.
c) Estime los valores máximo y mínimo y, a continuación, utilice el cálculo para encontrar los valores exactos.
d) Utilice la gráfica de f'' para estimar las coordenadas x de los puntos de inflexión.

25. $f(x) = x^{1/x}$ **26.** $f(x) = (\text{sen}\,x)^{\text{sen}\,x}$

27. En el ejemplo 4 hemos considerado un miembro de la familia de funciones $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\,cx)$ que se presenta en la sintonía FM. Aquí investigamos la función con $c = 3$. Empiece

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

por graficar f en el rectángulo de vista $[0, \pi]$ por $[-1.2, 1.2]$. ¿Cuántos puntos máximos locales ve usted? La gráfica tiene más de lo que se puede notar a simple vista. Para descubrir los puntos máximos y mínimos ocultos tendrá que examinar la gráfica de f' muy cuidadosamente. De hecho, ayuda mirar la gráfica de f'' al mismo tiempo. Encuentre todos los valores máximos y mínimos y puntos de inflexión. Luego grafique f en el rectángulo de vista $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ y comente lo relacionado con la simetría.

28-35 Describa cómo varía la gráfica de f conforme c varía. Grafique varios miembros de la familia para ilustrar las tendencias que descubre usted. En particular, debe investigar cómo se mueven los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión cuando c cambia. También debe identificar cualquier valor de transición de c, en el que cambia la forma básica de la curva.

28. $f(x) = x^3 + cx$

29. $f(x) = \sqrt{x^4 + cx^2}$

30. $f(x) = x\sqrt{c^2 - x^2}$

31. $f(x) = e^x + ce^{-x}$

32. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

33. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

34. $f(x) = x^2 + ce^{-x}$

35. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

36. La familia de funciones $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y C son números positivos y $b > a$, ha sido utilizada para modelar la concentración de un fármaco que se inyecta en el torrente sanguíneo en el tiempo $t = 0$. Grafique varios miembros de esta familia. ¿Qué tienen en común? Para valores fijos de C y a, descubra gráficamente lo que ocurre a medida que aumenta b. Después utilice el cálculo para demostrar lo que ha descubierto.

37. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece por obtener los límites conforme $x \to \pm\infty$. Identifique los valores de transición de c donde cambia la forma básica. ¿Qué sucede con los puntos máximos o mínimos y los puntos de inflexión a medida que c cambia? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

38. Investigue la familia de curvas dada por la ecuación $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Comience por determinar el valor de transición de c, en el que el número de puntos de inflexión cambia. A continuación, grafique varios miembros de la familia para ver qué formas son posibles. Hay otro valor de transición de c en el que cambia el número de números críticos. Intente descubrirlo gráficamente. Después demuestre lo que usted ha descubierto.

39. a) Investigue la familia de funciones polinomiales dada por $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos mínimos?

b) Demuestre que los puntos máximos y mínimos de cada curva en la familia se encuentran sobre la parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre graficando esta parábola y varios miembros de la familia.

40. a) Investigue la familia de funciones polinomiales dada por $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos máximos y mínimos?

b) Demuestre que los puntos máximos y mínimos de cada curva en la familia se encuentran sobre la curva $y = x - x^3$. Ilustre graficando esta curva y varios miembros de la familia.

4.7 Problemas de optimización

Los métodos que hemos aprendido en este capítulo para encontrar los valores extremos tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Un empresario quiere minimizar los costos y maximizar las ganancias. Un viajero quiere minimizar el tiempo de transporte. El principio de Fermat en óptica establece que la luz sigue el camino que toma el menor tiempo. En esta sección resolvemos problemas como la maximización de áreas, volúmenes y beneficios y la minimización de distancias, tiempos y costos.

En la resolución de tales problemas prácticos, el mayor desafío suele ser convertir el problema expresado en palabras en un problema de optimización matemática, estableciendo la función que va a maximizar o minimizar. Para esto, vamos a recordar los principios para resolver problemas que se discutieron en la página 75 y adaptarlos a esta situación:

RP

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?

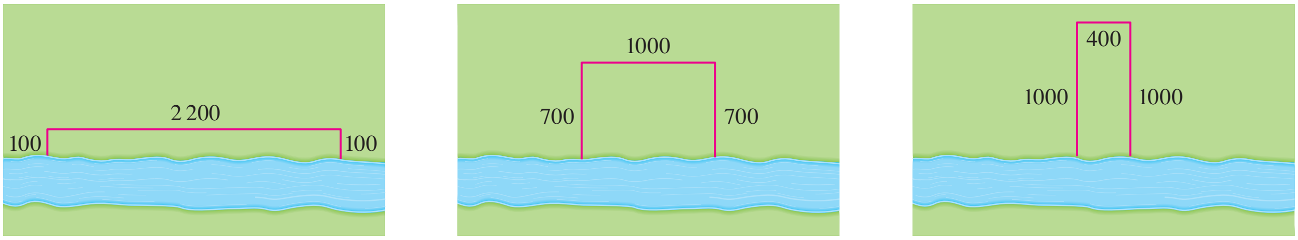
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar las cantidades dadas y las cantidades requeridas en el diagrama.

3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada [vamos a llamarla Q (del inglés *quantity*) por ahora]. También seleccione símbolos ($a, b, c, \ldots, x, y$) para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes —p. ej., A para el área, h para la altura, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de *una* variable x, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Utilice los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para encontrar los valores máximo o mínimo *absolutos* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces puede utilizarse el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

EJEMPLO 1 Un agricultor tiene 2400 pies de material y quiere construir una barda para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita barda a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

RP Comprenda el problema
RP Analogía: intente casos especiales
RP Dibuje diagramas

SOLUCIÓN Para hacerse una idea de lo que está sucediendo en este problema, vamos a experimentar con algunos casos especiales. La figura 1 (no a escala) muestra tres formas de posibles arreglos de los 2400 metros de material.



Área = 100 · 2 200 = 220 000 pies^2 Área = 700 · 1000 = 700 000 pies^2 Área = 1000 · 400 = 400 000 pies^2

FIGURA 1

Vemos que cuando intentamos campos muy anchos y poco largos, o campos angostos y muy largos, obtenemos áreas relativamente pequeñas. Parece verosímil que exista alguna configuración intermedia que produzca el área más grande.

RP Introduzca notación

La figura 2 ilustra el caso general. Queremos maximizar el área A del rectángulo. Sea x y y el largo y el ancho, respectivamente, del rectángulo (en pies). Entonces, queremos expresar A en términos de x y y:

$$A = xy$$

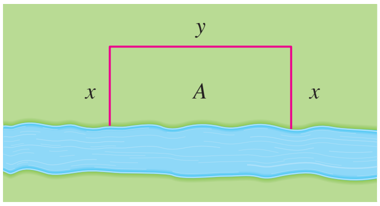


FIGURA 2

Queremos expresar A en función de una sola variable, por lo que eliminamos y expresándola en términos de x. Para ello utilizamos la información dada de que la longitud total de la barda es 2400 pies. Así

$$2x + y = 2400$$

De esta ecuación tenemos $y = 2400 - 2x$, lo cual da

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Tenga en cuenta que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1200$ (de lo contrario $A < 0$), así que la función que deseamos maximizar es

$$A(x) = 2\,400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1200$$

La derivada es $A'(x) = 2\,400 - 4x$, así que para encontrar los números críticos resolvemos

$$2\,400 - 4x = 0$$

que da $x = 600$. El valor máximo de A debe producirse en este número crítico o en un extremo del intervalo. Ya que $A(0) = 0$, $A(600) = 720\,000$ y $A(1200) = 0$, el método del intervalo cerrado da el valor máximo cuando $A(600) = 720\,000$.

[Alternativamente, podríamos haber observado que $A''(x) = -4 < 0$ para toda x, por lo que A es siempre cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 600$ debe ser un máximo absoluto.]

Así, el campo rectangular debe tener 600 pies de largo y 1200 pies de ancho.

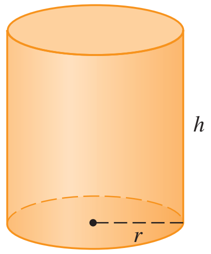


FIGURA 3

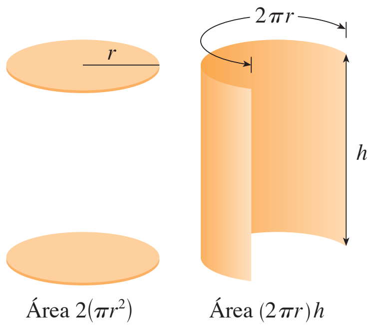


FIGURA 4

V EJEMPLO 2 Se va un fabricar una lata que ha de contener 1 L de aceite. Encuentre las dimensiones que debe tener la lata de manera que minimicen el costo del metal para fabricarla.

SOLUCIÓN Dibuje el diagrama como el de la figura 3, donde r es el radio y h la altura (ambos en cm). Para minimizar el costo del metal, minimizaremos el área superficial total del cilindro (tapa, fondo y lados). A partir de la figura 4, observamos que los lados se fabrican de una lámina rectangular con dimensiones $2\pi r$ y h. De esta manera, el área superficial es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Para eliminar h recurrimos al hecho de que el volumen está dado como 1 L, que tomamos como $1000\,\text{cm}^3$. Así

$$\pi r^2 h = 1000$$

lo cual da $h = 1000/(\pi r^2)$. Sustituyendo esto en la expresión para A, da

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$$

Por tanto, la función que queremos minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} \qquad r > 0$$

Para encontrar los números críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Entonces $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = 500$, así que el único número crítico es $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Puesto que el dominio de A es $(0, \infty)$, no podemos aplicar el argumento del ejemplo 1 concerniente a los puntos extremos. Pero podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ y $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, por lo que A es decreciente para *toda* r a la izquierda del número crítico y creciente para *toda* r a la derecha. De este modo, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ debe dar lugar a un mínimo *absoluto*.

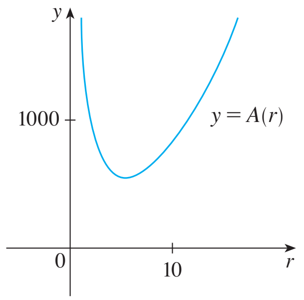


FIGURA 5

[Como otra posibilidad, podríamos argumentar que $A(r) \to \infty$ conforme $r \to 0^+$ y $A(r) \to \infty$ a medida que $r \to \infty$, de manera que debe haber un valor mínimo de $A(r)$, el cual tiene que ocurrir en el número crítico. Véase la figura 5.]

En el Proyecto de aplicación en página 337 investigamos la forma más económica para la fabricación de una lata teniendo en cuenta los costos de producción.

El valor de h correspondiente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Así, para minimizar el costo de la lata, el radio debe ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm y la altura debe ser igual al doble del radio, es decir, el diámetro.

NOTA 1 El argumento utilizado en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (que sólo se aplica a valores máximos o mínimos *locales*) y se establece aquí para referencia futura.

TEC Module 4.7 lo lleva a través de seis problemas adicionales de optimización, incluyendo animaciones de las situaciones físicas.

Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.

a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 Un método alternativo para resolver problemas de optimización es utilizar derivación implícita. Veamos el ejemplo 2 nuevamente para ilustrar el método. Trabajamos con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1000$$

pero en lugar de eliminar h, derivamos ambas ecuaciones implícitamente, respecto a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se produce en un número crítico, por lo que establecemos $A' = 0$; simplificamos para llegar a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y la sustracción da $2r - h = 0$, o $h = 2r$.

V EJEMPLO 3 Encuentre el punto sobre la parábola $y^2 = 2x$ que está más cerca del punto $(1, 4)$.

SOLUCIÓN La distancia entre el punto $(1, 4)$ y el punto (x, y) es

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

(Véase la figura 6). Pero si (x, y) se encuentra sobre la parábola, entonces $x = \frac{1}{2}y^2$, por lo que la expresión para d se convierte en

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

(Como alternativa, podríamos haber sustituido $y = \sqrt{2x}$ para obtener d solamente en términos de x.) En lugar de minimizar d, minimizamos su cuadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

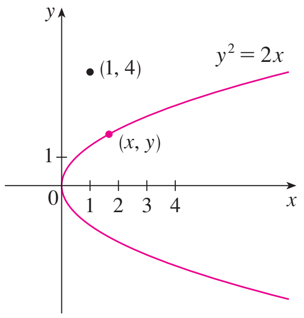


FIGURA 6

(Debe usted convencerse de que el mínimo de d ocurre en el mismo punto donde ocurre el

mínimo de d^2, pero es más fácil trabajar con d^2.) Derivando, obtenemos

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

de manera que $f'(y) = 0$ cuando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ cuando $y < 2$ y $f'(y) > 0$ cuando $y > 2$, así que, por la prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos, el mínimo absoluto se obtiene cuando $y = 2$. (O simplemente podríamos decir que, debido a la naturaleza geométrica del problema, es evidente que hay un punto más cercano, pero no un punto más lejano). El correspondiente valor de x es $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Por tanto, el punto sobre $y^2 = 2x$ más cercano a (1, 4) es (2, 2).

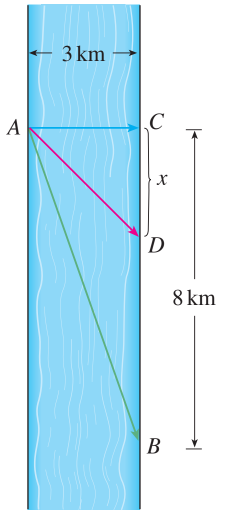


FIGURA 7

EJEMPLO 4 Un hombre lanza su lancha desde un punto A a la orilla de un río recto de 3 km de ancho y quiere alcanzar el punto B, 8 km abajo en la orilla opuesta, en el menor tiempo posible (véase la figura 7). Podría enfilar su lancha directamente a través del río al punto C y después correr a B, podría enfilarse directamente a B, o podía ir a algún punto D entre C y B para después avanzar corriendo hacia B. Si el hombre puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible? (Suponemos que la rapidez del agua es insignificante en comparación con la rapidez a la que el hombre rema.)

SOLUCIÓN Sea x la distancia entre C y D; entonces la distancia que ha de correr es $|DB| = 8 - x$ y el teorema de Pitágoras da la distancia que ha de remar $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Utilizamos la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

Entonces el tiempo de remo es $\sqrt{x^2 + 9}/6$, y el tiempo de carrera es $(8 - x)/8$, por lo que el tiempo total T como una función de x es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

El dominio de esta función T es $[0, 8]$. Observe que si $x = 0$, él rema hacia C y si $x = 8$, rema directamente a B. La derivada de T es

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

Así, utilizando el hecho de que $x \geqslant 0$, tenemos

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 \quad &\iff \quad \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \quad \iff \quad 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \\ &\iff \quad 16x^2 = 9(x^2 + 9) \quad \iff \quad 7x^2 = 81 \\ &\iff \quad x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

El único número crítico es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si el mínimo ocurre en este número crítico o en un extremo del dominio $[0, 8]$, evaluamos T en los tres puntos:

$$T(0) = 1.5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

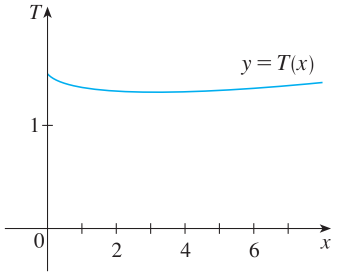


FIGURA 8

Como el más pequeño de estos valores de T se produce cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo absoluto de T debe ocurrir allí. La figura 8 ilustra este cálculo mostrando la gráfica de T.

Así, el hombre debe desembarcar en un punto a $9/\sqrt{7}$ km (≈ 3.4 km) río abajo de su punto de partida.

V EJEMPLO 5 Encuentre el rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un semicírculo de radio r.

SOLUCIÓN 1 Tomemos la semicircunferencia como la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con centro en el origen. Entonces la palabra *inscrita* significa que el rectángulo tiene dos vértices sobre la semicircunferencia y dos vértices sobre el eje x, como se muestra en la figura 9.

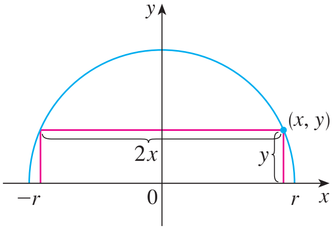


FIGURA 9

Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. Entonces, el rectángulo tiene lados de longitud $2x$ e y, por lo que su área es

$$A = 2xy$$

Para eliminar y recurrimos al hecho de que (x, y) se encuentra sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, así que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Por tanto,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

El dominio de esta función es $0 \leqslant x \leqslant r$. Su derivada es

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que es 0 cuando $2x^2 = r^2$, es decir, $x = r/\sqrt{2}$ (ya que $x \geqslant 0$). Este valor de x da un valor máximo de A porque $A(0) = 0$ y $A(r) = 0$. Por tanto, el rectángulo inscrito de mayor área es

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

SOLUCIÓN 2 Es posible una solución más sencilla si consideramos utilizar un ángulo como una variable. Sea θ el ángulo mostrado en la figura 10. Entonces el área del rectángulo es

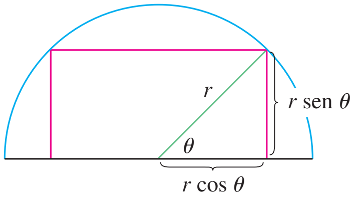


FIGURA 10

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta) = r^2(2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta) = r^2\operatorname{sen}2\theta$$

Sabemos que $\operatorname{sen}2\theta$ tiene un valor máximo de 1 y se produce cuando $2\theta = \pi/2$. Así, $A(\theta)$ tiene un valor máximo de r^2 y se produce cuando $\theta = \pi/4$.

Observe que esta solución trigonométrica no implica derivación. De hecho, no tenemos que utilizar cálculo en absoluto.

Aplicaciones en negocios y economía

En la sección 3.7 hemos introducido la idea de costo marginal. Recuerde que si $C(x)$, la **función costo**, es el costo de producir x unidades de un determinado producto, entonces el **costo marginal** es la tasa de cambio de C respecto a x. En otras palabras, la función costo marginal es la derivada, $C'(x)$, de la función costo.

Ahora consideremos la comercialización. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la empresa puede cobrar si vende x unidades. Entonces p se llama **función demanda** (o **función de precio**) y esperaríamos que sea una función de x decreciente. Si x unidades son vendidas y el precio por unidad es de $p(x)$, entonces el ingreso (*revenue*, en inglés) total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se llama **función ingreso**. La derivada R' de la función ingreso se llama **función ingreso marginal** y es la tasa de cambio de ingreso respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad (*profit*, en inglés) total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P se llama **función utilidad**. La **función utilidad marginal** es P', la derivada de la función utilidad. En los ejercicios 57-62, se le pide que utilice las funciones costo marginal, ingreso y utilidad para minimizar los costos y maximizar los ingresos y utilidades.

V EJEMPLO 6 Una tienda ha estado vendiendo 200 reproductores de discos Blu-ray por semana a \$350 cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada \$10 de descuento ofrecido a los compradores, el número de unidades vendidas se incrementará en 20 a la semana. Encuentre la función demanda y la función ingreso. ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la tienda para maximizar sus ingresos?

SOLUCIÓN Si x es el número de reproductores Blu-ray vendidos por semana, entonces el aumento semanal de ventas es $x - 200$. Por cada aumento de 20 unidades vendidas, el precio se reduce por \$10. Por tanto, por cada unidad adicional vendida, la disminución del precio será $\frac{1}{20} \times 10$, y la función demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Dado que $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Este valor de x da un máximo absoluto por la prueba de la primera derivada (o simplemente al observar que la gráfica de R es una parábola que abre hacia abajo). El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es $350 - 225 = 125$. Por tanto, para maximizar el ingreso, la tienda debe ofrecer un descuento de \$125.

4.7 Ejercicios

1. Considere el siguiente problema: encuentre dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es un máximo.

a) Haga una tabla de valores como la siguiente, para la que la suma de los números en las dos primeras columnas siempre es 23. Sobre la base de las evidencias de la tabla, estime la respuesta al problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

b) Utilice el cálculo para resolver el problema y compare con su respuesta al inciso a).

2. Encuentre dos números cuya diferencia es 100 y cuyo producto es un mínimo.

3. Encuentre dos números positivos cuyo producto es 100 y cuya suma es un mínimo.

4. La suma de dos números positivos es 16. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de sus cuadrados?

5. ¿Cuál es la distancia vertical máxima entre la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?

6. ¿Cuál es la distancia vertical mínima entre las parábolas $y = x^2 + 1$ y $y = x - x^2$?

7. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 metros, cuya área sea tan grande como sea posible.

8. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con área de 1 000 m^2 cuyo perímetro sea tan pequeño como sea posible.

9. Un modelo utilizado para el rendimiento (*yield*) Y de una producción agrícola como una función del nivel de nitrógeno N en el suelo (medido en unidades adecuadas) es

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeno ofrece el mejor rendimiento?

10. La rapidez (en mg carbono/m^3/h) en que la fotosíntesis tiene lugar para una especie de fitoplancton es modelada por la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

donde I es la intensidad de luz (medida en miles de pie-candela) ¿Para qué intensidad de luz P es máxima?

11. Considere el siguiente problema: un agricultor que dispone de 750 pies de material para construir una barda quiere delimitar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con bardas paralelas a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro corrales?
a) Dibuje varios diagramas que ilustren la situación, algunos con corrales anchos y largos cortos, y otros con corrales angostos y grandes largos. Encuentre las áreas totales de estas configuraciones. ¿Parece que hay un área máxima? Si es así, estímela.
b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación general. Introduzca la notación y etiquete el diagrama con sus símbolos.
c) Escriba una expresión para el área total.
d) Utilice la información proporcionada para plantear una ecuación que relacione las variables.
e) Utilice el inciso d) para expresar el área total como una función de una variable.
f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con su estimación en el inciso a).

12. Considere el siguiente problema: se desea construir una caja con tapa abierta, utilizando una pieza cuadrada de cartón de 3 pies de ancho, recortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas y doblando los costados. Encuentre el volumen más grande que esa caja puede tener.
a) Dibuje varios diagramas para ilustrar la situación, algunas cajas de poca altura con bases grandes y algunas cajas de mucha altura con bases pequeñas. Encuentre los volúmenes de varias de esas cajas. ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo.
b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación general. Introduzca la notación y etiquete el diagrama con sus símbolos.
c) Escriba una expresión para el volumen.
d) Utilice la información proporcionada para plantear una ecuación que relacione las variables.
e) Utilice el inciso d) para expresar el volumen como función de una variable.
f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con su estimación en el inciso a).

13. Un agricultor quiere cercar un área de 1.5 millones de pies cuadrados en un terreno rectangular y luego dividirlo por la mitad, con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Cómo puede el agricultor hacer esto para minimizar el costo de la barda?

14. Una caja con una base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que ha de utilizarse.

15. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa; encuentre el mayor volumen posible de la caja.

16. Un contenedor rectangular de almacenamiento sin tapa ha de tener un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces el ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado y el material para los costados cuesta \$6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales que hagan más barato el contenedor.

17. Resuelva el ejercicio 16 suponiendo que el contenedor tiene una tapa fabricada con el mismo material que los lados.

18. a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área determinada, el de perímetro más pequeño es un cuadrado.
b) Pruebe que de todos los rectángulos con un perímetro determinado, el de mayor área es un cuadrado.

19. Encuentre el punto sobre la recta $y = 2x + 3$ que está más cerca del origen.

20. Halle el punto sobre la curva $y = \sqrt{x}$ que está más cerca del punto (3, 0).

21. Busque los puntos sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que están más lejos del punto (1, 0).

22. Encuentre, con una aproximación de dos decimales, las coordenadas del punto sobre la curva $y = \text{sen}\, x$ que está más cerca del punto (4, 2).

23. Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un círculo de radio r.

24. Busque el rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

25. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un triángulo equilátero de lado L si uno de los lados del rectángulo se encuentra sobre la base del triángulo.

26. Halle el área del trapecio más grande que puede ser inscrito en un círculo de radio 1 y cuya base es un diámetro del círculo.

27. Busque las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que puede ser inscrito en un círculo de radio r.

28. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito en un triángulo rectángulo con catetos de longitudes de 3 cm y 4 cm si dos lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos.

29. Halle el cilindro de mayor volumen posible que puede inscribirse en una esfera de radio r.

30. Busque el cilindro de mayor volumen posible que puede inscribirse en un cono de altura h y radio base r.

31. Encuentre el cilindro circular recto de mayor superficie que puede inscribirse en una esfera de radio r.

32. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. (Así, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Véase el ejercicio 62 en la página 22). Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana para que sea admitida la mayor cantidad posible de luz.

33. Los márgenes superior e inferior de un cartel son de 6 cm y los márgenes de los lados de 4 cm. Si el área de impresión sobre el cartel se fija en 384 cm^2, encuentre las dimensiones del cartel con la menor área.

34. Un cartel debe tener un área de 180 pulg^2 con márgenes de 1 pulg en la parte inferior y laterales, y un margen de 2 pulg en la parte superior. ¿Qué dimensiones darán la mayor área de impresión?

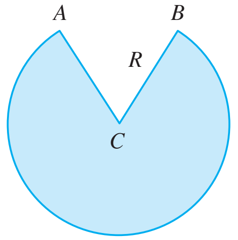
35. Un pedazo de alambre de 10 m de largo está cortado en dos piezas. Una pieza está doblada en forma de cuadrado y la otra de un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total encerrada sea a) un máximo?, ¿b) un mínimo?

36. Conteste el ejercicio 35 si una pieza está doblada en forma de un cuadrado y la otra de un círculo.

37. Se hace una lata cilíndrica sin tapa para contener V cm^3 de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo del metal para hacer la lata.

38. Una barda de 8 pies de altura corre paralela a una distancia de 4 pies de un edificio alto. ¿Cuál es la escalera de menor longitud que, colocada en el suelo, pasando sobre la barda, alcanzará la pared del edificio?

39. Un recipiente cónico para beber se hace de una pieza circular de papel de radio R, recortando un sector y uniendo los bordes CA y CB. Encuentre la capacidad máxima de dicho recipiente.



40. Un recipiente para beber, en forma de cono, se diseña para contener 27 cm^3 de agua. Encuentre la altura y el radio del cono que utilizará la menor cantidad de papel.

41. Un cono de altura h está inscrito en un cono de mayor tamaño con altura H, de manera que su vértice está en el centro de la base del cono más grande. Demuestre que el cono interior tiene volumen máximo cuando $h = \frac{1}{3}H$.

42. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con un plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante denominada coeficiente de fricción. ¿Para qué valor de θ es F más pequeña?

43. Si se conecta una resistencia de R ohms a través de una batería de E volts con resistencia interna de r ohms, entonces la potencia (en vatios) en la resistencia externa es

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$

Si E y r son fijos, pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

44. Para un pez nadando a una rapidez v relativa al agua, el gasto de energía por unidad de tiempo es proporcional a v^3. Se cree que durante la migración, los peces intentan minimizar la energía total requerida para nadar una distancia fija. Si los peces están nadando contra una corriente u ($u < v$), entonces el tiempo necesario para nadar una distancia L es $L/(v - u)$, y la energía total E necesaria para nadar la distancia viene dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

donde a es la constante de proporcionalidad.

a) Determine el valor de v que minimiza E.
b) Trace la gráfica de E.

Nota: este resultado ha sido verificado experimentalmente; en la migración, los peces nadan contra la corriente a una velocidad de 50% mayor que la rapidez de la corriente.

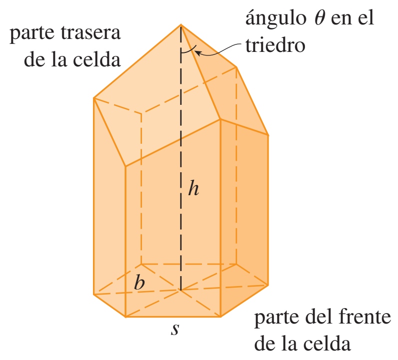
45. En un panal, cada celda es un prisma hexagonal regular, abierto en un extremo en un ángulo triedro en el otro extremo como en la figura. Se cree que las abejas forman sus celdas de modo que se minimice la superficie para un volumen determinado, utilizando así la menor cantidad de cera en la construcción de la celda. El examen de estas celdas ha demostrado que la medida del ángulo θ del vértice es sorprendentemente consistente. Basado en la geometría de la celda, puede demostrarse que la superficie S está dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \cot \theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right) \csc \theta$$

donde s, la longitud de los lados del hexágono y h, la altura, son constantes.

a) Calcule $dS/d\theta$.
b) ¿Qué ángulo deberían preferir las abejas?
c) Determine la superficie mínima de la celda (en términos de s y h).

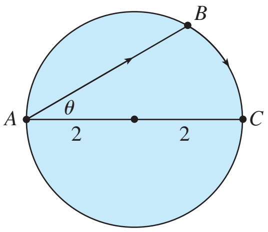
Nota: se han realizado las mediciones reales del ángulo θ en panales, y las medidas de estos ángulos difieren raramente del valor calculado por más de 2°.



46. Un barco sale de un muelle a las 14:00 y viaja hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Otro barco ha estado dirigiéndose al este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 15:00. ¿A qué hora estuvieron los dos barcos más cerca uno del otro?

47. Resuelva el problema en el ejemplo 4 si el río es de 5 km de ancho y el punto B está a sólo 5 km río abajo de A.

48. Una mujer, en un punto A en la orilla de un lago circular con radio de 2 mi, quiere llegar al punto C diametralmente opuesto a A al otro lado del lago en el menor tiempo posible (véase la figura). Ella puede caminar a una rapidez de 4 mi/h y remar a 2 mi/h. ¿Cómo debe proceder?



49. Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a tanques de almacenamiento situados en la orilla sur del río, 6 km al este de la refinería. El costo de colocación de tubería es \$400 000/km sobre la tierra a un punto P a la orilla norte y \$800 000/km bajo el río a los tanques. Para minimizar el costo de la tubería, ¿dónde debe ubicarse P?

50. Supongamos que la refinería en el ejercicio 49 está situada a 1 km al norte del río. ¿Dónde debe estar ubicado P?

51. La iluminación de un objeto por una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad de la fuente, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Si dos fuentes luminosas, una tres veces más intensa que la otra, se colocan a 10 pies de distancia, ¿dónde se debe colocar un objeto en la recta entre las fuentes a fin de recibir la menor iluminación?

52. Encuentre la ecuación de la recta a que pasa por el punto (3, 5) que corta el primer cuadrante con la menor área.

53. Sean a y b números positivos. Encuentre la longitud del menor segmento de recta que corta el primer cuadrante y pasa por el punto (a, b).

54. ¿En cuáles puntos sobre la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ la recta tangente tiene la mayor pendiente?

55. ¿Cuál es la longitud más corta posible del segmento de recta que corta el primer cuadrante y es tangente a la curva $y = 3/x$ en algún punto?

56. ¿Cuál es el triángulo de menor área posible que corta el primer cuadrante y cuya hipotenusa es tangente a la parábola $y = 4 - x^2$ en algún punto?

57. a) Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un producto, entonces el **costo promedio** por unidad es de $c(x) = C(x)/x$. Demuestre que si el costo promedio es un mínimo, entonces el costo marginal es igual al costo promedio.

b) Si $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, en dólares, encuentre i) el costo, el costo promedio y el costo marginal a un nivel de producción de 1000 unidades; ii) el nivel de producción que minimizará el costo promedio y iii) el costo promedio mínimo.

58. a) Demuestre que si la utilidad $P(x)$ es un máximo, entonces el ingreso marginal es igual al costo marginal.

b) Si $C(x) = 16\,000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ es la función costo y $p(x) = 1700 - 7x$ es la función demanda, encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

59. Un equipo de beisbol juega en un estadio con capacidad para 55 000 espectadores. Con el precio de las entradas a \$10, la asistencia promedio había sido de 27 000. Cuando los precios se redujeron a \$8, la asistencia promedio subió a 33 000.

a) Encuentre la función demanda, suponiendo que es lineal.

b) ¿Cómo se deben establecer los precios de las entradas para maximizar los ingresos?

60. Durante los meses de verano, Tomás hace y vende collares en la playa. El verano pasado vendió los collares a \$10 y sus ventas promedio fueron de 20 por día. Cuando aumentó el precio por \$1, encontró que el promedio disminuyó dos ventas por día.

a) Encuentre la función demanda, suponiendo que es lineal.

b) Si el material para cada collar le cuesta a Tomás \$6, ¿qué precio de venta debe maximizar su utilidad?

61. Un fabricante ha estado vendiendo 1000 televisores de pantalla plana a la semana a \$450. Un estudio de mercado indica que, por cada \$10 de descuento ofrecido al comprador, el número de televisores vendidos se incrementará en 100 por semana.

a) Encuentre la función demanda.

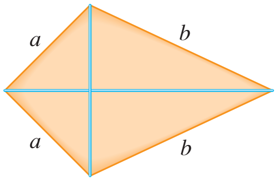
b) ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía al comprador a fin de maximizar sus utilidades?

c) Si la función costo semanal es $C(x) = 68\,000 + 150x$, ¿cómo debería el fabricante establecer el tamaño de la rebaja, a fin de maximizar sus ganancias?

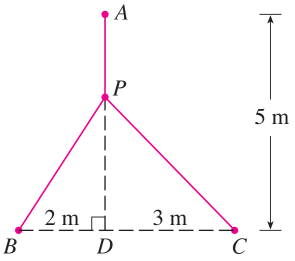
62. El administrador de un complejo habitacional de 100 apartamentos sabe por experiencia que todas las unidades serán ocupadas si el alquiler es de \$800 al mes. Un estudio de mercado sugiere que, en promedio, una unidad adicional permanecerá vacante por cada incremento de \$10 en el alquiler. ¿Qué renta debe cobrar el administrador para maximizar los ingresos?

63. Demuestre que, de todos los triángulos isósceles con un determinado perímetro, el de mayor área es equilátero.

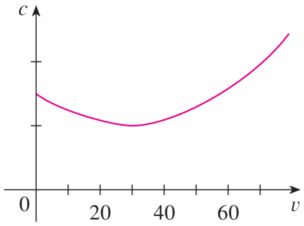
SAC **64.** El marco de una cometa está hecho de seis piezas de madera. Las cuatro piezas exteriores se han recortado con las longitudes indicadas en la figura. Para maximizar el área de la cometa, ¿qué longitud deben tener las piezas diagonales?



65. Un punto P debe estar ubicado en algún lugar sobre la recta AD, de manera que la longitud total L de cables ligados de P a los puntos A, B y C se minimice (véase la figura). Exprese L como una función de $x = |AP|$ y utilice las gráficas de L y dL/dx se para estimar el valor mínimo de L.



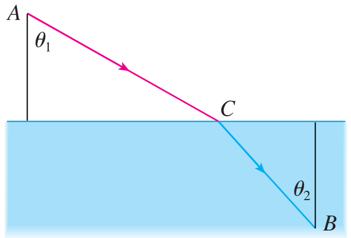
66. La gráfica muestra el consumo de combustible c de un automóvil (medido en galones por hora) en función de la velocidad v del automóvil. A muy bajas velocidades el motor funciona de manera ineficiente, así que inicialmente c disminuye a medida que aumenta la velocidad. Pero a alta velocidad el consumo de combustible se incrementa. Puede verse que $c(v)$ está minimizada para este automóvil cuando $v \approx 30$ mi/h. Sin embargo, para la eficiencia de combustible, lo que debe reducirse al mínimo no es el consumo en galones por hora, sino más bien el consumo de combustible en galones *por milla*. Vamos a llamar G a este consumo. Utilizando la gráfica, estime la velocidad a la que G tiene su valor mínimo.



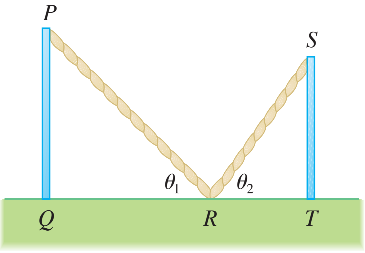
67. Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. De acuerdo con el principio de Fermat, un rayo de luz viajará desde un punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo de recorrido. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

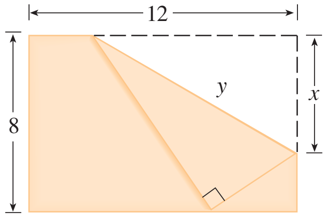
donde θ_1 (el ángulo de incidencia) y θ_2 (el ángulo de refracción) son como se muestra. Esta ecuación es conocida como la ley de Snell.



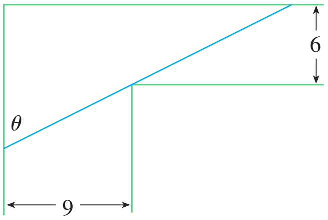
68. Dos postes verticales PQ y ST están asegurados por una cuerda PRS que van desde la parte superior del primer poste a la parte superior del segundo poste como en la figura. Demuestre que la longitud más corta de esa cuerda se produce cuando $\theta_1 = \theta_2$.



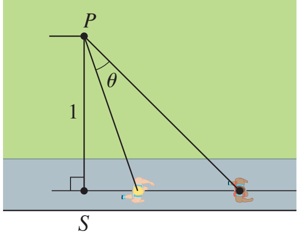
69. Se pliega la esquina superior derecha de un pedazo de papel de 12 pulg por 8 pulg, como en la figura, sobre la orilla inferior. ¿Cómo debería usted plegarla para minimizar la longitud del pliegue? En otras palabras, ¿cómo se elige x para minimizar y?



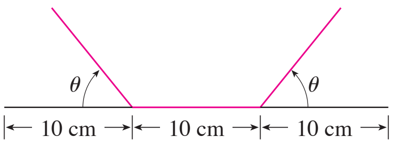
70. Se lleva cargando un tubo de acero por un pasillo de 9 metros de ancho. Al final de la sala hay un giro recto en un estrecho pasillo de 6 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que puede dar la vuelta horizontalmente alrededor de la esquina?



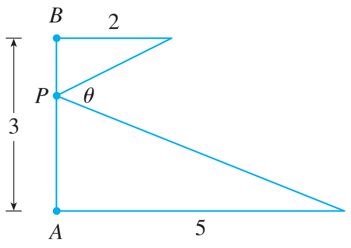
71. Un observador se encuentra en un punto P a una unidad de una pista. Dos corredores comienzan en el punto S en la figura y corren a lo largo de la pista. Un atleta corre tres veces más rápido que el otro. Encuentre el valor máximo del ángulo de vista del observador θ entre los corredores. [*Sugerencia:* maximice θ.]



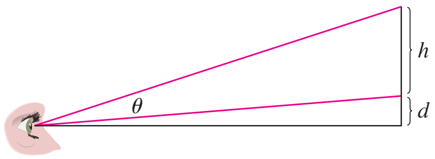
72. Se desea construir una caída de agua de lluvia utilizando una hoja de metal de 30 cm de ancho, plegando hasta un tercio a cada lado de la hoja con un ángulo θ. ¿Cómo debe elegirse θ de manera que el canal conduzca la cantidad máxima de agua?



73. ¿Dónde debe elegirse el punto P sobre el segmento de recta AB a fin de maximizar el ángulo θ?



74. Una pintura en una galería de arte tiene altura h y está colgada de manera que su borde inferior esté a una distancia d sobre el ojo de un observador (como en la figura). ¿Hasta qué punto de la pared debe estar el observador para tener la mejor vista? (En otras palabras, dónde debe pararse el observador para maximizar el ángulo θ subtendido a su ojo por la pintura?)

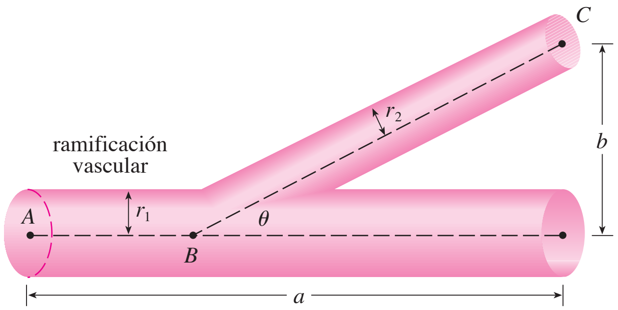


75. Encuentre el rectángulo de área máxima que puede ser circunscrito por un rectángulo dado con longitud L y ancho W. [*Sugerencia:* exprese el área en función de un ángulo θ.]

76. El sistema vascular de sangre consiste en vasos sanguíneos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que trasladan la sangre desde el corazón hasta los órganos y de éstos al corazón. Este sistema debe trabajar de manera que minimice la energía gastada por el corazón al bombear la sangre. En particular, esta energía se reduce cuando disminuye la resistencia de la sangre. Una de las leyes de Poiseuille da la resistencia R de la sangre como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud de los vasos sanguíneos, r es el radio y C es una constante positiva, determinada por la viscosidad de la sangre. (Poiseuille estableció esta ley experimentalmente, pero también de la ecuación 8.4.2.) La figura muestra un vaso principal con radio r_1 bifurcado en un ángulo θ en un vaso más pequeño con radio r_2.



a) Utilice la ley de Poiseuille para demostrar que la resistencia total de la sangre a lo largo de la ruta ABC es

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

donde a y b son las distancias que se muestran en la figura.

b) Demuestre que esta resistencia está minimizada cuando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

c) Encuentre el ángulo de bifurcación óptimo (aproximado al grado más cercano) cuando el radio de los vasos sanguíneos más pequeños es dos tercios el radio del vaso más grande.

© Manfred Kage / Peter Arnold Images / Photolibrary

77. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre grandes masas de agua durante el día. Se cree que requieren más energía para volar sobre el agua que sobre tierra porque el aire generalmente se eleva sobre la tierra y cae sobre el agua durante el día. Un pájaro con estas tendencias es lanzado desde una isla que está a 5 km del punto B más cercano a una costa recta, vuela a un punto C sobre la costa y luego vuela a lo largo de la costa hasta su lugar de anidación D. Suponga que el ave elige instintivamente un camino que minimiza su gasto de energía. Los puntos B y D están a 13 km de distancia uno del otro.

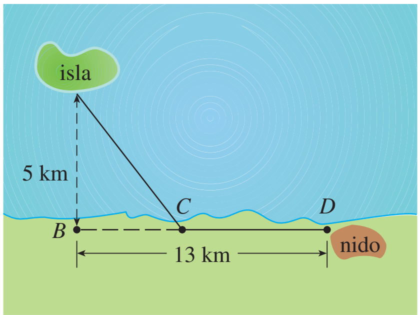
a) En general, si requiere 1.4 veces más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra, ¿a qué punto C debe el ave

volar a fin de minimizar la energía total gastada en regresar a su zona de anidación?

b) Sean W y L la energía (en joules) por kilómetro volado sobre agua y tierra, respectivamente. ¿Qué significaría un valor muy grande de la relación W/L en términos del vuelo de las aves? ¿Qué significaría un valor pequeño? Determine la relación W/L correspondiente al gasto mínimo de energía.

c) ¿Cuál debería ser el valor de W/L para que el ave vuele directamente a su zona de anidación D? ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele a B y luego a lo largo de la orilla a D?

d) Si los ornitólogos observan que las aves de cierta especie llegan a la orilla en un punto a 4 km de B, ¿cuántas veces más energía necesita un ave para volar sobre el agua que sobre la tierra?



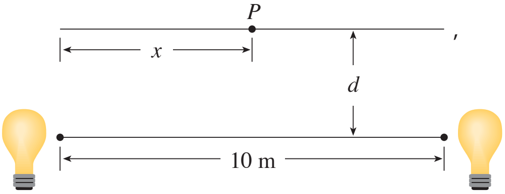
78. Dos fuentes luminosas de idéntica intensidad se colocan separadas 10 m. Un objeto se ha de colocar en un punto P sobre una recta ℓ paralela a la recta que une las fuentes de luz y a una distancia d metros de ella (véase la figura). Queremos localizar P sobre ℓ de manera que se minimice la intensidad de iluminación. Tenemos que utilizar el hecho de que la intensidad de iluminación de una fuente única es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen.

a) Encuentre una expresión para la intensidad $I(x)$ en el punto P.

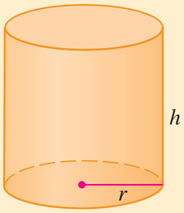
b) Si $d = 5$ m, utilice las gráficas de $I(x)$ y de $I'(x)$ para demostrar que la intensidad es minimizada cuando $x = 5$ m, es decir, cuando P está en el punto medio de ℓ.

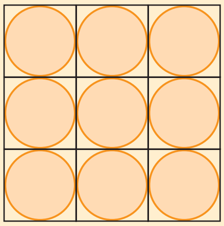
c) Si $d = 10$ m, demuestre que la intensidad (quizá sorprendentemente) *no* se minimiza en el punto medio.

d) En algún punto entre $d = 5$ m y $d = 10$ m hay un valor de transición de d en el que el punto de mínima iluminación cambia abruptamente. Calcule este valor de d por métodos gráficos. A continuación, encuentre el valor exacto de d.



PROYECTO DE APLICACIÓN **LA FORMA DE UNA LATA**





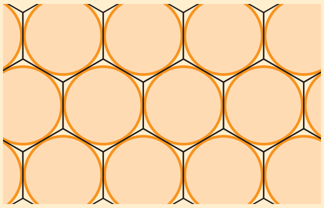
Discos cortados de cuadrados

En este proyecto investigamos la forma más económica para una lata. Primero interpretamos que esto significa que el volumen V de una lata cilíndrica está dado y que tenemos que encontrar la altura h y radio r que minimizan el costo del metal para fabricar la lata (véase la figura). Si estamos haciendo caso omiso de cualquier residuo de metal en el proceso de fabricación, el problema es minimizar la superficie del cilindro. Resolvimos este problema en el ejemplo 2, en la sección 4.7 y encontramos que $h = 2r$; es decir, la altura debe ser la misma que el diámetro. Pero si va a su alacena o a un supermercado con una regla, descubrirá que la altura es generalmente mayor que el diámetro, y la relación h/r varía desde 2 hasta aproximadamente 3.8. Vamos a ver si podemos explicar este fenómeno.

1. El material para las latas se corta de hojas de metal. Las partes cilíndricas se forman doblando rectángulos; estos rectángulos son cortados de la hoja buscando poco o ningún desperdicio. Pero si se cortan los discos superior e inferior de cuadrados de lado $2r$ (como en la figura), esto deja un desperdicio considerable de metal, que puede ser reciclado, pero tiene poco o ningún valor para los fabricantes de la lata. Si este es el caso, demuestre que la cantidad de metal utilizada es minimizada cuando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora



Discos cortados de hexágonos

2. Un embalaje más eficiente de los discos se obtiene dividiendo la hoja de metal en hexágonos y cortando las tapas circulares y bases de los hexágonos (véase la figura). Demuestre que si se adopta esta estrategia, entonces

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$

3. Los valores de h/r que encontramos en los problemas 1 y 2 son un poco más parecidos a los que realmente se ven en los estantes de los supermercados, pero todavía no se explica todo. Si miramos más de cerca algunas latas reales, vemos que la base y la tapa están formados por discos con radio mayor que r y están dobladas sobre los extremos de la lata. Si tomamos en cuenta esto aumentaríamos h/r. También es importante considerar que, además de los costos del metal, necesitamos incorporar la fabricación de la lata en el costo. Vamos a suponer que la mayoría de los gastos se incurren al unir a los lados de los bordes de las latas. Si cortamos los discos de hexágonos como en el problema 2, entonces el costo total es proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

donde k es el recíproco de la longitud que puede unirse para el costo de una unidad de área de metal. Demuestre que esta expresión se minimiza cuando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Grafique $\sqrt[3]{V}/k$ como una función de $x = h/r$ y utilice su gráfica para argumentar que cuando una lata es grande o la unión de las piezas es barata, deberíamos hacer h/r aproximadamente 2.21 (como en el problema 2). Pero cuando la lata es pequeña o la unión es costosa, h/r debería ser mucho mayor.

5. Nuestro análisis muestra que grandes latas deben ser casi cuadradas, pero pequeñas latas deben ser altas y delgadas. Observe las formas relativas de las latas en un supermercado. ¿Nuestra conclusión suele ser cierta en la práctica? ¿Existen excepciones? ¿Puede sugerir razones de por qué las pequeñas latas no son siempre altas y delgadas?

4.8 El método de Newton

Supongamos que un concesionario de automóviles le ofrece venderle un auto al contado en \$18 000 o en pagos de \$375 mensuales durante cinco años. A usted le gustaría saber qué tasa de interés mensual le cobrará el vendedor. Para encontrar la respuesta, tiene que resolver la ecuación

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0 \qquad \boxed{1}$$

(Los detalles se explican en el ejercicio 41). ¿Cómo resolvería tal ecuación?

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bc + c = 0$ hay una fórmula conocida para las raíces. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grado también hay fórmulas para las raíces, pero son muy complicadas. Si f es un polinomio de grado 5 o superior, no hay ninguna fórmula de este tipo (véase la nota en la página 212). Asimismo, no hay ninguna fórmula que nos permita encontrar las raíces exactas de una ecuación trascendente como $\cos x = x$.

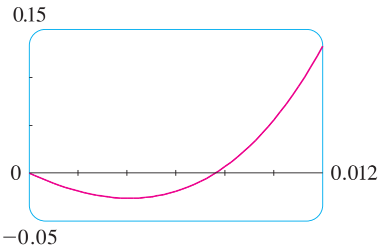


FIGURA 1

Podemos encontrar una solución *aproximada* para la ecuación 1 graficando el lado izquierdo de la ecuación. Mediante un dispositivo de graficación y tras experimentar con rectángulos de vista, obtenemos la gráfica de la figura 1.

Vemos que, además de la solución $x = 0$ que no nos interesa, hay una solución entre 0.007 y 0.008. Al hacer acercamientos se ve que la raíz es aproximadamente 0.0076.

Intente resolver la ecuación 1 utilizando el buscador numérico de raíces en su equipo de graficación o calculadora. Algunos equipos no son capaces de solucionarlo. Otros lo logran, pero requieren que especifique un punto de partida para la búsqueda.

Si se requiere más precisión pueden hacerse acercamientos repetidas veces, pero esto es algo tedioso. Una alternativa más rápida es utilizar un rastreador numérico de raíces con una calculadora o en un sistema algebraico computarizado. Con esto encontramos la raíz, con una aproximación de nueve decimales: 0.007628603.

¿Cómo funcionan esos buscadores numéricos de raíces? Utilizan una variedad de métodos, pero la mayoría de ellos utilizan algún **método de Newton**, también llamado **método de Newton-Raphson**. Explicaremos cómo funciona este método, en parte para mostrar lo que sucede dentro de una calculadora o computadora y en parte como una aplicación de la idea de aproximación lineal.

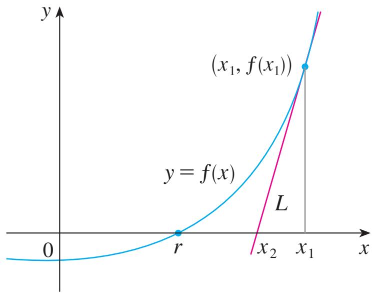


FIGURA 2

La geometría del método de Newton se muestra en la figura 2, donde la raíz que estamos tratando de encontrar está etiquetada con r. Comenzamos con una primera aproximación x_1, que se obtiene por suposición, o de un esbozo de la gráfica de f, o de una gráfica de f generada por el equipo de graficación. Considere la recta tangente L a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y miramos la intersección de L con el eje x, etiquetado con x_2. La idea del método de Newton es que la recta tangente es cercana a la curva y su intersección en x, x_2, cercana a la intersección de la curva con x (es decir, la raíz r que estamos buscando). Dado que la tangente es una recta, podemos encontrar fácilmente su intersección con el eje x.

Para encontrar una fórmula para x_2 en términos de x_1, recurrimos al hecho de que la pendiente de L es $f'(x_1)$; así que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Dado que la intersección de L con el eje x es x_2, hacemos $y = 0$, y obtenemos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, podemos resolver esta ecuación para x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Utilizamos x_2 como una segunda aproximación a r.

Enseguida repetimos este procedimiento con x_1 remplazándola por la segunda aproximación x_2, utilizando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Esto da una tercera aproximación:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

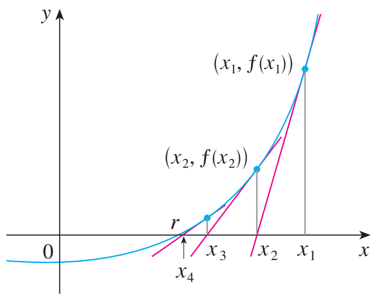


FIGURA 3

Si mantenemos este proceso, obtenemos una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ como se muestra en la figura 3. En general, si la n-ésima aproximación es x_n y $f'(x_n) \neq 0$, entonces la siguiente aproximación está dada por

2
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

El tema de sucesiones fue brevemente presentado en *A preview of Calculus* en la página 5. Una discusión en mayor detalle inicia en la sección 11.1.

Si los números x_n resultan más y más cercanos a r cuando n es muy grande, entonces decimos que la sucesión *converge* a r y escribimos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

Aunque la sucesión de aproximaciones converge a la raíz deseada para funciones del tipo ilustrado en la figura 3, en ciertas circunstancias la sucesión puede no converger.

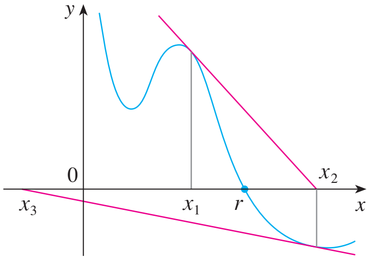


FIGURA 4

Por ejemplo, considere la situación que se muestra en la figura 4. Puede ver que x_2 es una peor aproximación que x_1. Esto suele ser el caso cuando $f'(x_1)$ está cerca de 0. Incluso puede ocurrir que una aproximación (como x_3 en la figura 4) caiga fuera del dominio de f. Entonces, el método de Newton falla y debe elegirse una mejor aproximación inicial x_1. Véase los ejercicios 31-34 para ejemplos concretos en que el método de Newton funciona muy lentamente o no funciona en absoluto.

V EJEMPLO 1 Empiece con $x_1 = 2$ para encontrar la tercera aproximación x_3 a la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN Aplicamos el método de Newton con

$$f(x_1) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

TEC En Module 4.8 usted puede investigar cómo funciona el método de Newton para varias funciones y qué pasa cuando se cambia x_1.

Newton mismo utilizó esta ecuación para ilustrar su método y eligió $x_1 = 2$ después de algunas experimentaciones porque $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 16$. La ecuación 2 resulta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Con $n = 1$ tenemos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

La figura 5 muestra la geometría detrás del primer paso en el método de Newton en el ejemplo 1. Ya que $f'(2) = 10$, la recta tangente a $y = x^3 - 2x - 5$ en $(2, -1)$ tiene la ecuación $y = 10x - 21$ así que su intersección con el eje x es $x_2 = 2.1$.

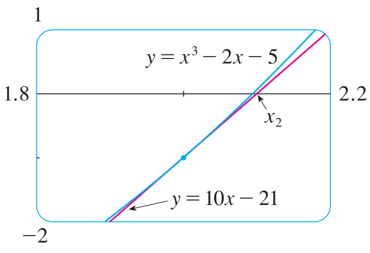


FIGURA 5

Entonces, con $n = 2$ obtenemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2} = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Resulta que esta tercera aproximación $x_3 \approx 2.0946$ es precisa a cuatro decimales.

Supongamos que queremos lograr una precisión dada, digamos con ocho decimales, usando el método de Newton. ¿Cómo sabemos cuándo parar? La regla que generalmente se utiliza es que podemos detener cuando aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} se ajustan a ocho decimales. (Se dará una declaración precisa sobre la exactitud en el método de Newton en el ejercicio 39 en la sección 11.11.)

Observe que el procedimiento que va de n a $n + 1$ es el mismo para todos los valores de n (se llama proceso *iterativo*). Esto significa que el método de Newton es especialmente conveniente para el uso con una calculadora programable o un equipo de computación.

V EJEMPLO 2 Utilice el método de Newton para encontrar $\sqrt[6]{2}$ con una aproximación de ocho decimales.

SOLUCIÓN Primero observamos que encontrar $\sqrt[6]{2}$ es equivalente a encontrar la raíz positiva de la ecuación

$$x^6 - 2 = 0$$

por lo que tomamos $f(x) = x^6 - 2$. Luego $f'(x) = 6x^5$ y la fórmula 2 (método de Newton) se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Si elegimos $x_1 = 1$ como una aproximación inicial, obtenemos

$$x_2 \approx 1.16666667$$
$$x_3 \approx 1.12644368$$
$$x_4 \approx 1.12249707$$
$$x_5 \approx 1.12246205$$
$$x_6 \approx 1.12246205$$

Puesto que x_5 y x_6 coinciden en ocho decimales, concluimos que

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

a ocho lugares decimales.

V EJEMPLO 3 Encuentre, con una aproximación a seis lugares decimales, la raíz de la ecuación $\cos x = x$.

SOLUCIÓN Primero rescribimos la ecuación en su forma estándar:

$$\cos x - x = 0$$

Hacemos $f(x) = \cos x - x$. Entonces $f'(x) = -\text{sen } x - 1$, así que la fórmula 2 resulta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\text{sen } x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\text{sen } x_n + 1}$$

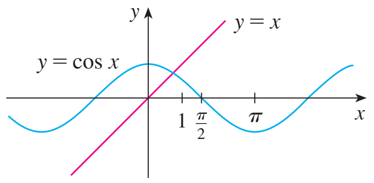


FIGURA 6

A fin de proponer un valor adecuado para x_1 esbozamos las gráficas de $y = \cos x$ e $y = x$ en la figura 6. Parece que se intersecan en un punto cuya coordenada x es algo menor que 1, así que vamos a tomar $x_1 = 1$ como una conveniente primera aproximación. Entonces, recordando poner en nuestra calculadora en modo radianes, obtenemos

$$x_2 \approx 0.75036387$$
$$x_3 \approx 0.73911289$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$
$$x_5 \approx 0.73908513$$

Como x_4 y x_5 concuerdan con seis decimales (ocho, de hecho), concluimos que la raíz de la ecuación, correcta a seis cifras decimales, es 0.739085.

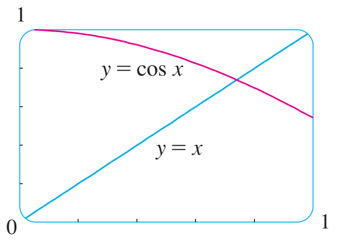


FIGURA 7

En lugar de utilizar el esbozo de la figura 6 para obtener una aproximación inicial para el método de Newton en el ejemplo 3, podríamos haber utilizado la gráfica más precisa que proporciona una calculadora o una computadora. La figura 7 sugiere que utilicemos $x_1 = 0.75$ como la aproximación inicial. Entonces el método de Newton da

$$x_2 \approx 0.73911114 \qquad x_3 \approx 0.73908513 \qquad x_4 \approx 0.73908513$$

y así obtenemos la misma respuesta que antes, pero con un paso menos.

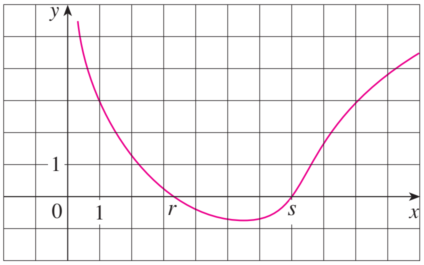
Cabría preguntarse por qué nos molestamos por completo con el método de Newton si está disponible un dispositivo de gráficos. ¿No es más fácil acercarnos en repetidas ocasiones y buscar las raíces, como hicimos en la sección 1.4? Si sólo se requiere uno o dos decimales de aproximación, entonces el método de Newton es inadecuado, y un dispositivo de gráficos es suficiente. Pero si se requiere seis u ocho decimales, entonces hacer acercamientos en repetidas ocasiones se hace tedioso. En general, es normalmente más rápido y más eficaz utilizar un equipo de cómputo y el método de Newton juntos: el dispositivo de gráficos para empezar y el método de Newton para terminar.

4.8 Ejercicios

1. La figura muestra la gráfica de una función f. Supongamos que se utiliza el método de Newton para aproximar la raíz r de la ecuación $f(x) = 0$ con aproximación inicial $x_1 = 1$.

a) Dibuje las rectas tangentes que se utilizan para encontrar x_2 y x_3 y estime los valores numéricos de x_2 y x_3.

b) ¿Sería $x_1 = 5$ una mejor primera aproximación? Explique.



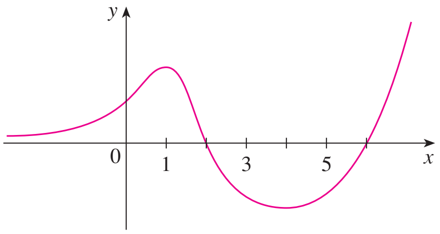
2. Siga las instrucciones para el ejercicio 1a), pero utilice $x_1 = 9$ como la aproximación inicial para encontrar la raíz s.

3. Suponga que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (2, 5) tiene la ecuación $y = 9 - 2x$. Si se utiliza el método de Newton para localizar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y la aproximación inicial es $x_1 = 2$, encuentre la segunda aproximación x_2.

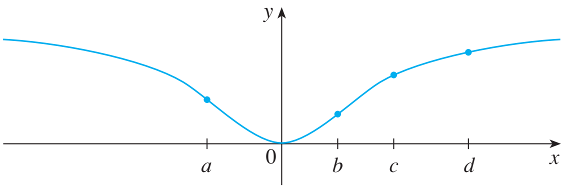
4. Para cada aproximación inicial, determine gráficamente lo que ocurre si se utiliza el método de Newton para la función cuya gráfica se muestra.

a) $x_1 = 0$ b) $x_1 = 1$ c) $x_1 = 3$

d) $x_1 = 4$ e) $x_1 = 5$



5. ¿Para cuál de las aproximaciones iniciales $x_1 = a$, b, c y d cree usted que el método de Newton funcionará y conducirá a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$?



6-8 Utilice el método de Newton con la aproximación inicial especificada x_1 para encontrar x_3, la tercera aproximación a la raíz de la ecuación dada. (Dé su respuesta con cuatro decimales.)

6. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0, \quad x_1 = -3$

7. $x^5 - x - 1 = 0, \quad x_1 = 1$

8. $x^7 + 4 = 0, \quad x_1 = -1$

9. Utilice el método de Newton con aproximación inicial de $x_1 = -1$ para encontrar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$. Explique cómo funciona el método graficando primero la función y su recta tangente en $(-1, 1)$.

10. Utilice el método de Newton con aproximación inicial $x_1 = 1$ para encontrar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^4 - x - 1 = 0$. Explique cómo funciona el método graficando primero la función y su recta tangente en $(1, -1)$.

11-12 Utilice el método de Newton para aproximar el número dado, correcto a ocho decimales.

11. $\sqrt[5]{20}$

12. $\sqrt[100]{100}$

13-16 Utilice el método de Newton para aproximar la raíz indicada de la ecuación, con una aproximación a seis decimales.

13. La raíz de $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$

14. La raíz de $2.2x^5 - 4.4x^3 + 1.3x^2 - 0.9x - 4.0 = 0$ en el intervalo $[-2, -1]$

15. La raíz negativa de $e^x = 4 - x^2$

16. La raíz positiva de $3 \operatorname{sen} x = x$

17-22 Utilice el método de Newton para encontrar todas las raíces de la ecuación con una aproximación a seis decimales.

17. $3 \cos x = x + 1$

18. $\sqrt{x + 1} = x^2 - x$

19. $(x - 2)^2 = \ln x$

20. $\dfrac{1}{x} = 1 + x^3$

21. $x^3 = \tan^{-1}x$

22. $\operatorname{sen} x = x^2 - 2$

23-28 Utilice el método de Newton para encontrar todas las raíces de la ecuación, correcta a ocho decimales. Comience por dibujar una gráfica para encontrar aproximaciones iniciales.

23. $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 10 = 0$

24. $x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 - x + 6 = 0$

25. $\dfrac{x}{x^2 + 1} = \sqrt{1 - x}$

26. $\cos(x^2 - x) = x^4$

27. $4e^{-x^2} \operatorname{sen} x = x^2 - x + 1$

28. $e^{\arctan x} = \sqrt{x^3 + 1}$

29. a) Aplique el método de Newton a la ecuación $x^2 - a = 0$ para obtener el siguiente algoritmo para la raíz cuadrada, utilizado por los antiguos babilonios para calcular $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

b) utilice el inciso a) para calcular $\sqrt{1000}$ correcta con seis decimales.

30. a) Aplique el método de Newton a la ecuación $1/x - a = 0$ para obtener el siguiente algoritmo recíproco:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(este algoritmo permite que una computadora encuentre recíprocos sin dividir realmente).

b) Utilice el inciso a) para calcular $1/1.6984$ correcto a seis cifras decimales.

31. Explique por qué no funciona el método de Newton para encontrar la raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 6 = 0$ si la aproximación inicial es elegida como $x_1 = 1$.

32. a) Utilice el método de Newton con $x_1 = 1$ para encontrar la raíz de la ecuación $x^3 - x = 1$ correcta a seis decimales.

b) Resuelva la ecuación en el inciso a) utilizando $x_1 = 0.6$ como la aproximación inicial.

c) Resuelva la ecuación en el inciso a) utilizando $x_1 = 0.57$. (Definitivamente, usted necesita una calculadora programable para esta parte.)

d) Grafique $f(x) = x^3 - x - 1$ y sus rectas tangentes en $x_1 = 1$, 0.6 y 0.57 para explicar por qué el método de Newton es tan sensible al valor de la aproximación inicial.

33. Explique por qué el método de Newton falla cuando se aplica a la ecuación $\sqrt[3]{x} = 0$ con cualquier aproximación inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre su explicación con una gráfica.

34. Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = 0$. Explique por qué el método de Newton no puede encontrar la raíz sin importar qué aproximación inicial $x_1 \neq 0$ se utilice. Ilustre su explicación con un dibujo.

35. a) Utilice el método de Newton para encontrar los números críticos de la función $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x$ correctos a seis lugares decimales.

b) Encuentre el valor mínimo absoluto de f correcto a cuatro decimales.

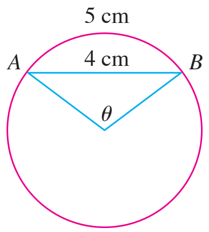
36. Utilice el método de Newton para encontrar el valor máximo absoluto de la función $f(x) = x \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, correcto a seis decimales.

37. Utilice el método de Newton para encontrar las coordenadas del punto de inflexión de la curva $y = x^2$ sen x, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, correcto a seis decimales.

38. De las infinitas rectas que son tangentes a la curva $y = -$sen x y pasan por el origen, hay una que tiene la mayor pendiente. Utilice el método de Newton para encontrar la pendiente de la recta, correcta a seis decimales.

39. Utilice el método de Newton para encontrar las coordenadas correctas a seis decimales, del punto sobre la parábola $y = (x - 1)^2$ que está más cerca del origen.

40. En la figura, la longitud de la cuerda AB es de 4 cm y la longitud del arco AB es 5 cm. Encuentre el ángulo central θ, en radianes, a cuatro decimales. Luego, dé la respuesta al grado más próximo.



41. Un concesionario de coches vende un automóvil nuevo en \$18 000. También ofrece vender el mismo auto por pagos de \$375 al mes durante cinco años. ¿Qué tasa de interés mensual está cobrando este distribuidor?

Para resolver este problema, tendrá usted que utilizar la fórmula para el valor presente A de una anualidad formada por pagos iguales de magnitud R con una tasa de interés i por periodo

$$A = \frac{R}{i}\left[1 - (1 + i)^{-n}\right]$$

Sustituyendo i por x, demuestre que

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

Utilice el método de Newton para resolver esta ecuación.

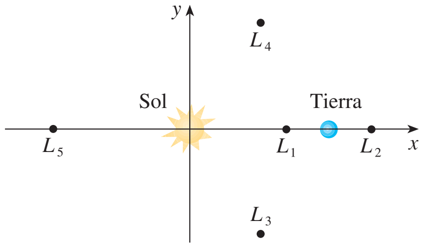
42. La figura muestra el Sol situado en el origen y la Tierra en el punto (1, 0). (Aquí, la unidad es la distancia entre los centros de la Tierra y el Sol, llamada *unidad astronómica*: 1 AU $\approx 1.496 \times 10^8$ km.) Hay cinco ubicaciones L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 en este plano de rotación de la Tierra alrededor del Sol, donde un satélite permanece inmóvil respecto a la Tierra porque las fuerzas que actúan sobre el satélite (incluyendo las atracciones gravitacionales de la Tierra y el Sol) se equilibran entre sí. Estas ubicaciones se denominan *puntos de libración*. (Un satélite de investigación solar se ha colocado en uno de estos puntos de libración.) Si m_1 es la masa del Sol, m_2 es la masa de la Tierra y $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que la coordenada x de L_1 es la única raíz de la ecuación de quinto grado

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2 + 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

y la coordenada x de L_2 es la raíz de la ecuación

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Utilizando el valor $r \approx 3.04042 \times 10^{-6}$, encuentre las ubicaciones de los puntos de libración a) L_1 y b) L_2.



4.9 Antiderivadas

Un físico que conoce la velocidad de una partícula podría desear conocer su posición en un instante dado. Un ingeniero que puede medir la cantidad variable a la cual se fuga el agua de un tanque quiere conocer la cantidad que se ha fugado durante cierto periodo. Un biólogo que conoce la rapidez a la que crece una población de bacterias puede interesarse en deducir el tamaño de la población en algún momento futuro. En cada caso, el problema es encontrar una función F cuya derivada es la función conocida f. Si tal función F existe, se llama *antiderivada* de f.

Definición Una función F recibe el nombre de **antiderivada** de f sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Por ejemplo, sea $f(x) = x^2$. No es difícil descubrir una antiderivada de f si utiliza la regla de la potencia. En efecto, si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, entonces $F'(x) = x^2 = f(x)$. Pero la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ también satisface $G'(x) = x^2$. Por tanto, F y G son antiderivadas de f. De hecho, cualquier función de la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, donde C es una constante, es una antiderivada de f. Surge la pregunta: ¿hay otras?

Para contestar la pregunta, recordemos que en la sección 4.2 utilizamos el teorema del valor medio para demostrar que si dos funciones tienen derivadas idénticas sobre un intervalo, entonces éstas deben diferir en una constante (corolario 4.2.7). Por tanto, si F y G son dos antiderivadas cualesquiera de f, entonces

$$F'(x) = f(x) = G'(x),$$

así que $G(x) - F(x) = C$, donde C es una constante. Esto lo podemos escribir como $G(x) = F(x) + C$, de modo que se tiene el siguiente resultado.

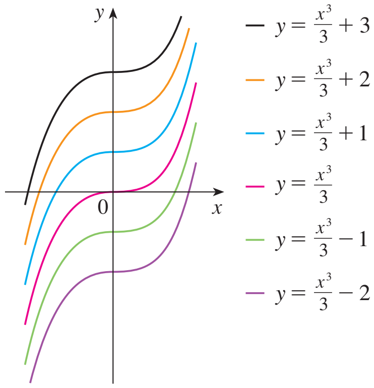


FIGURA 1
Miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = x^2$

1 Teorema Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f sobre I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

De nuevo, para la función $f(x) = x^2$, vemos que la antiderivada general de f es $\frac{1}{3}x^3 + C$. Al asignar valores específicos a la constante C, obtenemos una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales de una a otra (véase la figura 1). Esto tiene sentido porque cada curva debe tener la misma pendiente en cualquier valor conocido de x.

EJEMPLO 1 Encuentre la antiderivada más general de cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = 1/x$ c) $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$

SOLUCIÓN

a) Si $F(x) = -\cos x$, entonces $F'(x) = \operatorname{sen} x$, de manera que una antiderivada de sen x es $-\cos x$. Por el teorema 1, la antiderivada mas general es $G(x) = -\cos x + C$.

b) Con base en lo que se vio en la sección 3.6, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Por consiguiente, en el intervalo $(0, \infty)$ la antiderivada general de $1/x$ es $\ln x + C$. También aprendimos que

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$. Entonces, el teorema 1 afirma que la antiderivada general de $f(x) = 1/x$ es $\ln|x| + C$ sobre cualquier intervalo que no contenga $x = 0$. En particular, esto es verdadero sobre cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Por consiguiente, la antiderivada general de f es

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c) Utilice la regla de la potencia para descubrir una antiderivada de x^n. De hecho, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Así, la antiderivada general de $f(x) = x^n$ es

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Esto es válido para $n \geqslant 0$, ya que $f(x) = x^n$ está definida sobre el intervalo. Si n es negativo (pero $n \neq -1$), sólo es válida sobre cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$.

Como en el ejemplo 1, toda fórmula de derivación leída de derecha a izquierda da lugar a una fórmula de antiderivación. En la tabla 2 se enlistan algunas antiderivadas. Cada fórmula de la tabla es verdadera, puesto que la derivada de la función de la columna de la derecha aparece en la columna izquierda. En particular, en la primera fórmula se afirma que la antiderivada de una constante multiplicada por una función es una constante multiplicada por la antiderivada de la función. En la segunda fórmula se afirma que la antiderivada de una suma es la suma de las antiderivadas. (Se usa la notación $F' = f$, $G' = g$.)

2 Tabla de fórmulas de antiderivación

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
e^x	e^x	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$		

Para obtener la antiderivada más general, a partir de las particulares de la tabla 2, tenemos que sumar una constante (o constantes), como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Encuentre todas las funciones g tales que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUCIÓN Primero, escriba de nuevo la función dada en la forma siguiente:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

De esta manera, deseamos hallar una antiderivada de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Utilizando las fórmulas de la tabla 2 con el teorema 1, obtenemos

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4\cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$

En las aplicaciones del cálculo es muy común tener una situación como la del ejemplo 2, donde se requiere hallar una función, dado el conocimiento acerca de sus derivadas. Una ecuación que involucra las derivadas de una función se llama **ecuación diferencial**. Estas ecuaciones se estudian en cierto detalle en el capítulo 9; pero, por el momento, es posible resolver algunas ecuaciones diferenciales elementales. La solución general de una ecuación diferencial contiene una constante arbitraria (o varias constantes arbitrarias), como en el ejemplo 2. Sin embargo, puede haber algunas condiciones adicionales que determinen las constantes y, por tanto, especifican de manera única la solución.

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f' del ejemplo 3 y de su antiderivada f. Note que $f'(x) > 0$, de manera que f siempre es creciente. Observe también que, cuando f' tiene un máximo o un mínimo, f parece que tiene un punto de inflexión. De modo que la gráfica sirve como una comprobación de nuestro cálculo.

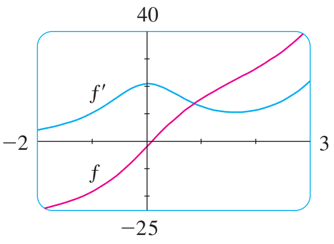


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Encuentre f si $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ y $f(0) = -2$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

es
$$f(x) = e^x + 20\tan^{-1}x + C$$

Para determinar C, utilizamos el hecho de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20\tan^{-1}0 + C = -2$$

En estos términos, tenemos $C = -2 - 1 = -3$, de modo que la solución particular es

$$f(x) = e^x + 20\tan^{-1}x - 3$$

V **EJEMPLO 4** Encuentre f si $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ es

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Si usamos una vez más las reglas de antiderivación, encontramos que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C y D, utilizamos las condiciones dadas: $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$. Ya que $f(0) = 0 + D = 4$, entonces $D = 4$. Puesto que

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

tenemos que $C = -3$. Por tanto, la función requerida es

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Si conocemos la gráfica de una función f, razonablemente debemos ser capaces de dibujar la gráfica de una antiderivada F. Por ejemplo, suponga que sabe que $F(0) = 1$. Entonces, hay un punto de donde partir, el punto (0, 1), y la dirección en la cual tiene que desplazar su lápiz la proporciona, en cada etapa, la derivada $F'(x) = f(x)$. En el ejemplo siguiente aplicamos los principios de este capítulo para mostrar cómo graficar F aun cuando no tenemos una fórmula para f. Este sería el caso, por ejemplo, cuando $f(x)$ está determinado por datos experimentales.

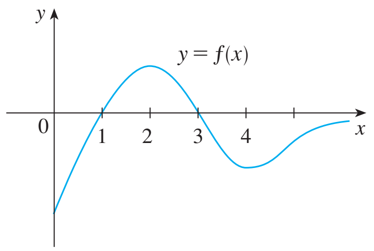


FIGURA 3

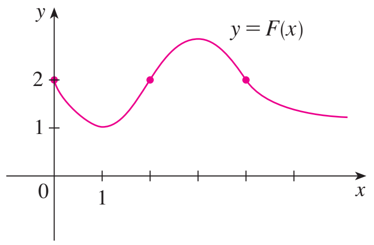


FIGURA 4

V EJEMPLO 5 La gráfica de una función f se muestra en la figura 3. Trace un esbozo de una antiderivada F, dado que $F(0) = 2$.

SOLUCIÓN Nos guía el hecho de que la pendiente de $y = F(x)$ es $f(x)$. Partimos del punto $(0, 2)$ y dibujamos F como una función inicialmente decreciente, ya que $f(x)$ es negativa cuando $0 < x < 1$. Observe que $f(1) = f(3) = 0$, de modo que F tiene rectas tangentes horizontales cuando $x = 1$ y $x = 3$. En el caso de $1 < x < 3$, $f(x)$ es positiva, y de este modo F es creciente. Observe que F tiene un mínimo local cuando $x = 1$ y un máximo local cuando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ es negativa y F es decreciente en $(3, \infty)$. Ya que $f(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$, la gráfica de F se vuelve más plana a medida que $x \to \infty$. Note también que $F''(x) = f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x = 2$, y de negativa a positiva en $x = 4$; así F tiene puntos de inflexión cuando $x = 2$ y $x = 4$. Utilizamos esta información para trazar la gráfica de la antiderivada en la figura 4.

Movimiento rectilíneo

La antiderivación es en particular útil al analizar el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. Recuerde que si el objeto tiene la función posición $s = f(t)$, entonces la función velocidad es $v(t) = s'(t)$. Esto significa que la función posición es una antiderivada de la función velocidad. Del mismo modo, la función aceleración es $a(t) = v'(t)$, de manera que la función velocidad es una antiderivada de la aceleración. Si se conocen la aceleración y los valores iniciales $s(0)$ y $v(0)$, entonces puede hallarse la función posición aplicando dos veces la antiderivada.

V EJEMPLO 6 Una partícula se mueve en línea recta y con una aceleración dada por $a(t) = 6t + 4$. Su velocidad inicial es $v(0) = -6$ cm/s y su desplazamiento inicial es $s(0) = 9$ cm. Encuentre su función posición $s(t)$.

SOLUCIÓN Dado que $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, la antiderivada da

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Pero $v(0) = -6$, así que $C = -6$ y

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Puesto que $v(t) = s'(t)$, s es la antiderivada de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Esto da $s(0) = D$. Dado que $s(0) = 9$, tenemos que $D = 9$, y la función posición requerida es

$$s(t) = t^3 + t^2 - 6t + 9$$

Un objeto cerca de la superficie de la Tierra está sujeto a una fuerza gravitacional que produce una aceleración hacia abajo denotada por g. Para un movimiento cercano a la Tierra, suponemos que g es constante y su valor es de unos 9.8 m/s^2 (o 32 pies/s^2).

EJEMPLO 7 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una rapidez de 48 pies/s desde el borde de un acantilado a 432 pies por encima del nivel del suelo. Encuentre su altura sobre el nivel del suelo t segundos más tarde. ¿Cuándo alcanza su altura máxima? ¿Cuándo choca contra el suelo?

SOLUCIÓN El movimiento es vertical y se elige la dirección positiva como la correspondiente hacia arriba. En un instante t, la distancia arriba del nivel del suelo $s(t)$ y la velocidad

$v(t)$ es decreciente. Por consiguiente, la aceleración debe ser negativa y

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$$

Tomando antiderivadas, tenemos

$$v(t) = -32t + C$$

Para determinar C, usamos la información dada $v(0) = 48$. Esto da $48 = 0 + C$, de manera que

$$v(t) = -32t + 48$$

La altura máxima se alcanza cuando $v(t) = 0$; es decir, después de 1.5 s. Como $s'(t) = v(t)$, la nueva antiderivada da

$$s(t) = -16t^2 + 48t + D$$

Utilizamos el hecho de que $s(0) = 432$, tenemos $432 = 0 + D$; por consiguiente,

$$s(t) = -16t^2 + 48t + 432$$

En la figura 5 se muestra la función posición de la pelota del ejemplo 7. La gráfica corrobora la conclusión obtenida: la pelota alcanza su altura máxima después de 1.5 s y choca contra el suelo después de 6.9 s.

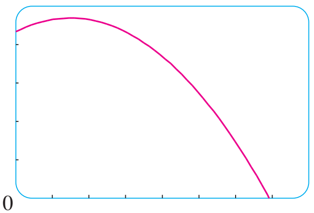


FIGURA 5

La expresión para $s(t)$ es válida hasta que la pelota choca contra el suelo. Esto sucede cuando $s(t) = 0$; o sea, cuando

$$-16t^2 + 48t + 432 = 0$$

o, equivalentemente, $$t^2 - 3t - 27 = 0$$

Con la fórmula cuadrática, resolvemos esta ecuación para obtener

$$t = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

No consideramos la solución con el signo menos, ya que da un valor negativo para t. En consecuencia, la pelota choca contra el nivel del suelo después de $3(1 + \sqrt{13})/2 \approx 6.9$ s.

4.9 Ejercicios

1-22 Encuentre la antiderivada más general de la función. (Compruebe su respuesta mediante la derivación.)

1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$

6. $f(x) = x(2 - x)^2$

7. $f(x) = 7x^{2/5} + 8x^{-4/5}$

8. $f(x) = x^{3.4} - 2x^{\sqrt{2}-1}$

9. $f(x) = \sqrt{2}$

10. $f(x) = e^2$

11. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$

12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{x}$

14. $f(t) = \dfrac{3t^4 - t^3 + 6t^2}{t^4}$

15. $g(t) = \dfrac{1 + t + t^2}{\sqrt{t}}$

16. $r(\theta) = \sec\theta \tan\theta - 2e^\theta$

17. $h(\theta) = 2 \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta$

18. $f(t) = \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{senh} t$

19. $f(x) = 5e^x - 3 \cosh x$

20. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6 \cos x$

21. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$

22. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

23-24 Encuentre la antiderivada F de f que satisfaga la condición dada. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de f y F.

23. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$

24. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

25-48 Halle f.

25. $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$

26. $f''(x) = x^6 - 4x^4 + x + 1$

27. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$

28. $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

29. $f'''(t) = \cos t$

30. $f'''(t) = e^t + t^{-4}$

31. $f'(x) = 1 + 3\sqrt{x}, \quad f(4) = 25$

32. $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4, \quad f(-1) = 2$

33. $f'(t) = 4/(1 + t^2), \quad f(1) = 0$

34. $f'(t) = t + 1/t^3, \quad t > 0, \quad f(1) = 6$

35. $f'(t) = 2 \cos t + \sec^2 t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2, \quad f(\pi/3) = 4$

36. $f'(x) = (x^2 - 1)/x, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = 0$

37. $f'(x) = x^{-1/3}, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$

38. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}, \quad f(\frac{1}{2}) = 1$

39. $f''(x) = -2 + 12x - 12x^2, \quad f(0) = 4, \quad f'(0) = 12$

40. $f''(x) = 8x^3 + 5, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 8$

41. $f''(\theta) = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$

42. $f''(t) = 3/\sqrt{t}, \quad f(4) = 20, \quad f'(4) = 7$

43. $f''(x) = 4 + 6x + 24x^2, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 10$

44. $f''(x) = x^3 + \operatorname{senh} x, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 2.6$

45. $f''(x) = 2 + \cos x, \quad f(0) = -1, \quad f(\pi/2) = 0$

46. $f''(t) = 2e^t + 3 \operatorname{sen} t, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$

47. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

48. $f'''(x) = \cos x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 3$

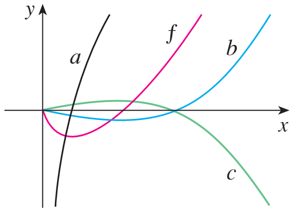
---

49. Dado que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 6)$ y que la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$, encuentre $f(2)$.

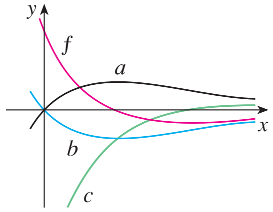
50. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la grafica de f.

51-52 Se proporciona la gráfica de una función f. ¿Qué gráfica es una antiderivada de f y por qué?

51.

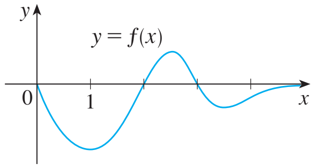


52.

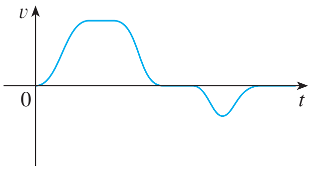


---

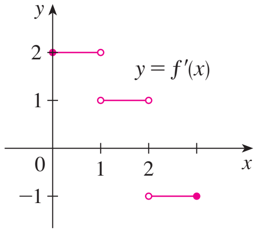
53. Se muestra la gráfica de una función en la figura. Trace un esbozo de una antiderivada F, dado que $F(0) = 1$.



54. En la figura se muestra la gráfica de la función velocidad de una partícula. Trace la gráfica de una función posición.



55. En la figura se muestra la gráfica de f'. Dibuje la gráfica de f si ésta es continua y $f(0) = -1$.



56. a) Utilice un dispositivo de graficación para dibujar $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.

b) A partir de la gráfica del inciso a), dibuje una gráfica aproximada de la antiderivada F que satisfaga $F(0) = 1$.

c) Aplique las reglas de esta sección a fin de hallar una expresión para $F(x)$.

d) Dibuje F usando la expresión del inciso c). Compare con su esbozo del inciso b).

57-58 Dibuje una gráfica de f y utilícela para esbozar la antiderivada que pasa por el origen

57. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

58. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

59-64 Una partícula se mueve de acuerdo con la información dada. Determine la posición de la partícula.

59. $v(t) = \operatorname{sen} t - \cos t, \quad s(0) = 0$

60. $v(t) = 1.5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

61. $a(t) = 2t + 1, \quad s(0) = 3, \quad v(0) = -2$

62. $a(t) = 3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 4$

63. $a(t) = 10 \operatorname{sen} t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

64. $a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

---

65. Una piedra se deja caer desde la plataforma superior de observación (la plataforma espacial) de la Torre CN, 450 m por encima del nivel del suelo.

a) Encuentre la distancia de la piedra arriba del nivel del suelo en el instante t.

b) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al nivel del suelo?

c) ¿Con qué velocidad choca contra el nivel del suelo?

d) Si la piedra se lanza hacia arriba a una rapidez de 5 m/s, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

66. Demuestre que para el movimiento en línea recta con aceleración constante a, velocidad inicial v_0 y desplazamiento inicial s_0, el desplazamiento después del tiempo t es

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

67. Se lanza un objeto hacia arriba con velocidad inicial v_0 metros por segundo, desde un punto a s_0 metros por encima del nivel del suelo. Demuestre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19.6[s(t) - s_0]$$

68. Se lanzan dos pelotas hacia arriba desde el borde del acantilado del ejemplo 7. La primera se lanza con una rapidez de 48 pies/s y la otra se arroja 1 s más tarde con una rapidez de 24 pies/s. ¿En algún momento rebasa una a la otra?

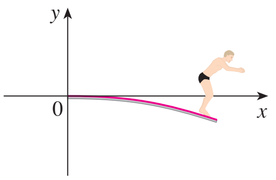
69. Se deja caer una piedra desde un desfiladero y choca contra el suelo con una rapidez de 120 pies/s. ¿Cuál es la altura del desfiladero?

70. Si un clavadista con masa m está en el borde de una plataforma de clavados con longitud L y densidad lineal ρ, entonces la plataforma adopta la forma de una curva $y = f(x)$, donde

$$EIy'' = mg(L - x) + \frac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

E e I son constantes positivas que dependen del material con que está hecha la plataforma y g (< 0) es la aceleración debida a la gravedad.

a) Halle una expresión para la forma de la curva.
b) Use $f(L)$ para estimar la distancia debajo de la horizontal al borde de la plataforma.



71. Una compañía estima que el costo marginal (en dólares por artículo) de producir x artículos es de $1.92 - 0.002x$. Si el costo de producción de un artículo es de \$562, encuentre el costo de producir 100 artículos.

72. La densidad lineal de una varilla con una longitud de 1 m se expresa por medio de $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$ en gramos por centímetro, donde x se mide en centímetros desde uno de los extremos de la varilla. Encuentre la masa de esta última.

73. Dado que las gotas de lluvia crecen a medida que caen, su área superficial aumenta y, por tanto, se incrementa la resistencia a su caída. Una gota de lluvia tiene una velocidad inicial hacia abajo de 10 m/s, y su aceleración hacia abajo es

$$a = \begin{cases} 9 - 0.9t & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Si al inicio la gota de lluvia está a 500 m arriba de la superficie de la tierra, ¿cuánto tarda en caer?

74. Un vehículo se desplaza a 50 mi/h cuando aplica los frenos, lo que produce una desaceleración constante de 22 pies/s^2. ¿Cuál es la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse?

75. ¿Qué aceleración constante se requiere para incrementar la rapidez de un vehículo desde 30 mi/h hasta 50 mi/h en 5 s?

76. Un automóvil frenó con una desaceleración constante de 16 pies/s^2, lo que genera antes de detenerse unas marcas de deslizamiento que miden 200 pies. ¿Qué tan rápido se desplazaba el vehículo cuando se aplicaron los frenos?

77. Un automóvil se desplaza a 100 km/h cuando el conductor ve un accidente 80 m más adelante y aplica los frenos apresuradamente. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener el vehículo a tiempo de evitar chocar con los vehículos accidentados?

78. Un modelo de cohete se dispara verticalmente hacia arriba a partir del reposo. Su aceleración durante los primeros tres segundos es $a(t) = 60t$, momento en que se agota el combustible y se convierte en un cuerpo en "caída libre". Después de 14 s, se abre el paracaídas del cohete y la velocidad (hacia abajo) disminuye linealmente hasta -18 pies/s en 5 s. Entonces el cohete "flota" hasta el piso a esa velocidad.

a) Determine la función posición s y la función velocidad v (para todos los tiempos t). Dibuje s y v.
b) ¿En qué momento el cohete alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?
c) ¿En qué momento aterriza?

79. Un tren "bala" de alta velocidad acelera y desacelera a una razón de 4 pies/s^2. Su rapidez de crucero máxima es de 90 mi/h.

a) ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer el tren si se acelera desde el reposo hasta que alcanza su rapidez de crucero y, a continuación, corre a esa rapidez durante 15 minutos?
b) Suponga que el tren parte del reposo y debe detenerse por completo en 15 minutos. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer en estas condiciones?
c) Encuentre el tiempo mínimo que tarda el tren en viajar entre dos estaciones consecutivas que se encuentran a 45 millas de distancia.
d) El viaje de una estación a la siguiente dura 37.5 minutos. ¿Cuál es la distancia entre las estaciones?

4 Repaso

Verificación de conceptos

1. Explique la diferencia entre máximo absoluto y máximo local. Ilustre por medio de un dibujo.
2. a) ¿Qué dice el teorema del valor extremo?
   b) Explique cómo funciona el método del intervalo cerrado.
3. a) Enuncie el teorema de Fermat.
   b) Defina un número crítico de f.
4. a) Enuncie el teorema de Rolle.
   b) Enuncie el teorema del valor medio y dé una interpretación geométrica.
5. a) Enuncie la prueba de creciente/decreciente.
   b) ¿Qué significa decir que f es cóncava hacia arriba sobre un intervalo I?
   c) Enuncie la prueba de la concavidad.
   d) ¿Qué son los puntos de inflexión? ¿Cómo puede hallarlos?
6. a) Enuncie la prueba de la primera derivada.
   b) Enuncie la prueba de la segunda derivada.
   c) ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas relativas de estas pruebas?
7. a) ¿Qué afirma la regla de l'Hospital?
   b) ¿Cómo puede usar la Regla de l'Hospital si tiene un producto $f(x)g(x)$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \infty$ conforme $x \to a$?
   c) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene una diferencia $f(x) - g(x)$ donde $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ a medida que $x \to a$?
   d) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene una potencia $[f(x)]^{g(x)}$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ conforme $x \to a$?
8. Si tiene una calculadora graficadora o una computadora, ¿por qué necesita el cálculo para dibujar una función?
9. a) Dada una aproximación inicial x_1 para una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, explique geométricamente, mediante un dibujo, ¿cómo se obtiene la segunda aproximación x_2 en el método de Newton?
   b) Escriba una expresión para x_2 en términos de x_1, $f(x_1)$ y $f'(x_1)$.
   c) Escriba una expresión para x_{n+1} en términos de x_n, $f(x_n)$ y $f'(x_n)$.
   d) ¿Bajo qué circunstancias es probable que el método de Newton falle o funcione muy lentamente?
10. a) ¿Qué es una antiderivada de una función f?
    b) Suponga que F_1 y F_2 son antiderivadas de f sobre un intervalo I. ¿Cómo se relacionan F_1 y F_2?

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo o un mínimo locales en c.
2. Si f tiene un valor mínimo absoluto en c, entonces $f'(c) = 0$.
3. Si f es continua sobre (a, b), entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y k en (a, b).
4. Si f es derivable y $f(-1) = f(1)$, entonces existe un número c tal que $|c| < 1$ y $f'(c) = 0$.
5. Si $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, entonces f es decreciente sobre $(1, 6)$.
6. Si $f''(2) = 0$, entonces $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.
7. Si $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, entonces $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.
8. Existe una función f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para toda x.
9. Existe una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x.
10. Existe una función f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x.
11. Si f y g son crecientes sobre un intervalo I, entonces $f + g$ es creciente sobre I.
12. Si f y g son crecientes sobre un intervalo I, entonces $f - g$ es creciente sobre I.
13. Si f y g son crecientes sobre un intervalo I, entonces fg es creciente sobre I.
14. Si f y g son funciones crecientes positivas sobre un intervalo I, entonces fg es creciente sobre I.
15. Si f es creciente y $f(x) > 0$ en I, entonces $g(x) = 1/f(x)$ es decreciente sobre I.
16. Si f es par, entonces f' es par.
17. Si f es periódica, entonces f' es periódica.
18. La antiderivada más general de $f(x) = x^{-2}$ es
$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$
19. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para toda x, entonces $f(1) \neq f(0)$.
20. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 1$

Ejercicios

1-6 Encuentre los valores extremos locales y absolutos de la función sobre el intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad [2, 4]$

2. $f(x) = x\sqrt{1 - x}, \quad [-1, 1]$

3. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 1}, \quad [-2, 2]$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad [-2, 1]$

5. $f(x) = x + 2\cos x, \quad [-\pi, \pi]$

6. $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad [-1, 3]$

7-14 Obtenga el límite.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\tan x}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{x + \operatorname{sen} 2x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x^2 - x^3)e^{2x}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-} (x - \pi)\csc x$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

14. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$

15-17 Trace la gráfica de una función que satisface las condiciones dadas.

15. $f(0) = 0, \quad f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0,$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 6} f(x) = -\infty,$

$f'(x) < 0$ sobre $(-\infty, -2), (1, 6)$ y $(9, \infty)$,

$f'(x) > 0$ sobre $(-2, 1)$ y $(6, 9)$,

$f''(x) > 0$ sobre $(-\infty, 0)$ y $(12, \infty)$,

$f''(x) < 0$ sobre $(0, 6)$ y $(6, 12)$

16. $f(0) = 0, \quad f$ es continua y par,

$f'(x) = 2x$ si $0 < x < 1, \quad f'(x) = -1$ si $1 < x < 3,$

$f'(x) = 1$ si $x > 3$

17. f es impar, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$,

$f'(x) > 0$ para $x > 2$, $\quad f''(x) > 0$ para $0 < x < 3$,

$f''(x) < 0$ para $x > 3$, $\quad \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$

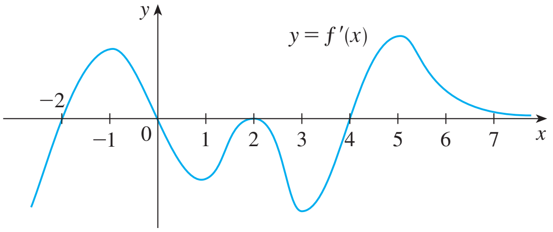
18. En la figura se ilustra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.

a) ¿Sobre qué intervalos f es creciente o decreciente?

b) ¿Para qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?

c) Trace la gráfica de f''.

d) Trace la posible gráfica de f.



19-34 Trace la curva mediante los criterios de la sección 4.5.

19. $y = 2 - 2x - x^3$

20. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

22. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

23. $y = \dfrac{1}{x(x - 3)^2}$

24. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

25. $y = x^2/(x + 8)$

26. $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$

27. $y = x\sqrt{2 + x}$

28. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

29. $y = e^x \operatorname{sen} x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

30. $y = 4x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$

32. $y = e^{2x - x^2}$

33. $y = (x - 2)e^{-x}$

34. $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35-38 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. Use las gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos de incremento y decremento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión. En el ejercicio 35 aplique el cálculo para determinar estas cantidades con exactitud.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x + 3}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6.5 \operatorname{sen} x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

39. Trace la gráfica $f(x) = e^{-1/x^2}$ en un rectángulo de vista en que aparezcan todos los aspectos principales de la función. Estime los puntos de inflexión. Enseguida, aplique el cálculo para determinarlos con exactitud.

SAC **40.** a) Grafique la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.

b) Explique la forma de la gráfica calculando los límites de $f(x)$ conforme x tiende a ∞, $-\infty$, 0^+ y 0^-.

c) Use la gráfica de f para estimar las coordenadas de los puntos de inflexión.

d) Utilice su SAC para calcular y trazar la gráfica de f''.

e) Con la gráfica del inciso d) estime el punto de inflexión con más exactitud.

Se requiere calculadora graficadora o computadora — SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

SAC **41-42** Utilice las gráficas de f, f' y f'' para estimar la coordenada x de los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión de f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

42. $f(x) = e^{-0.1x} \ln(x^2 - 1)$

43. Investigue la familia de funciones de $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$ ¿Cuáles características en común tienen los miembros de esta familia? ¿En qué difieren? ¿Para cuáles valores de C es f continua en $(+\infty, \infty)$? ¿Para cuáles valores de C f no tiene gráfica? ¿Qué sucede conforme $C \to \infty$?

44. Investigue la familia de funciones $f(x) = cxe^{-cx^2}$. ¿Qué le ocurre a los puntos máximos y mínimos y a los puntos de inflexión al cambiar c? Ilustre sus conclusiones dibujando varios miembros de la familia.

45. Demuestre que la ecuación $3x + 2\cos x + 5 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

46. Suponga que f es continua sobre $[0, 4]$, $f(0) = 1$, y $2 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para toda x en $(0, 4)$. Demuestre que $9 \leqslant f(4) \leqslant 21$.

47. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = x^{1/5}$ sobre el intervalo $[32, 33]$, demuestre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2.0125$$

48. ¿Para cuáles valores de las constantes a y b se tiene que $(1, 3)$ es un punto de inflexión de la curva $y = ax^3 + bx^2$?

49. Sea $g(x) = f(x^2)$, donde f es dos veces derivable para toda x, $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 0$ y f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$, y cóncava hacia arriba sobre $(0, \infty)$.

a) ¿En cuáles números tiene g un valor extremo?

b) Discuta la concavidad de g.

50. Halle dos números enteros positivos tales que la suma del primer número y cuatro veces el segundo sea 1000 y el producto de los números sea lo más grande posible.

51. Demuestre que la distancia más corta desde el punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encuentre el punto sobre la hipérbola $xy = 8$ que está más cercano al punto $(3, 0)$.

53. Halle el área más pequeña posible de un triángulo isósceles que está circunscrito a una circunferencia de radio r.

54. Encuentre el volumen del cono circular más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.

55. En ΔABC, D queda sobre AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm y $|CD| = 5$ cm. ¿Dónde se debe situar un punto P sobre CD de tal modo que la suma $|PA| + |PB| + |PC|$ sea mínima?

56. Resuelva el ejercicio 55 cuando $|CD| = 2$ cm.

57. La velocidad de una ola de longitud L en agua profunda es

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

donde K y C son constantes positivas conocidas. ¿Cuál es la longitud de la ola que da la velocidad mínima?

58. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen V, en forma de un cilindro circular recto rematado por un hemisferio. ¿Cuáles dimensiones requerirán la cantidad mínima de metal?

59. Un equipo de *hockey* juega en una arena con capacidad de 15 000 espectadores. Con el precio del boleto fijado en \$12, la asistencia promedio en un juego es de 11 000 espectadores. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que disminuya el precio del boleto, la asistencia promedio aumentará 1000. ¿Cómo deben fijar los propietarios del equipo el precio de la entrada para maximizar sus ingresos provenientes de la venta de boletos?

60. Un fabricante determina que el costo de fabricar x unidades de un artículo es $C(x) = 1800 + 25x - 0.2x^2 + 0.001x^3$ y la función de demanda es $p(x) = 48.2 - 0.03x$.

a) Grafique las funciones costo e ingreso y úselas para estimar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.

b) Aplique el cálculo a fin de hallar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.

c) Estime el nivel de producción que minimice el costo promedio.

61. Aplique el método de Newton para calcular la raíz de la ecuación $x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ con una aproximación de seis decimales.

62. Aplique el método de Newton para hallar todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ a una exactitud de seis decimales.

63. Aplique el método de Newton para hallar el valor máximo absoluto de la función $f(t) = \cos t + t - t^2$, a una exactitud de ocho decimales.

64. Utilice la guía de la sección 4.5 para trazar la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Recurra al método de Newton si es necesario.

65-72 Determine f.

65. $f'(x) = \cos x - (1 - x^2)^{-1/2}$

66. $f'(x) = 2e^x + \sec x \tan x$

67. $f'(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

68. $f'(x) = \operatorname{senh} x + 2\cosh x, \quad f(0) = 2$

69. $f'(t) = 2t - 3\operatorname{sen} t, \quad f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \quad f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0$

73-74 Una partícula se mueve de acuerdo con lo siguiente. Encuentre la posición de la partícula.

73. $v(t) = 2t - 1/(1 + t^2), \quad s(0) = 1$

74. $a(t) = \operatorname{sen} t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 2$

---

75. a) Si $f(x) = 0.1e^x + \operatorname{sen} x$, $-4 \leq x \leq 4$, use la gráfica de f para dibujar una gráfica aproximada de la antiderivada F de f que satisfaga $F(0) = 0$.
b) Encuentre una expresión para $F(x)$.
c) Dibuje F con la expresión del inciso b). Compare con su esquema del inciso a).

76. Investigue la familia de curvas dada por

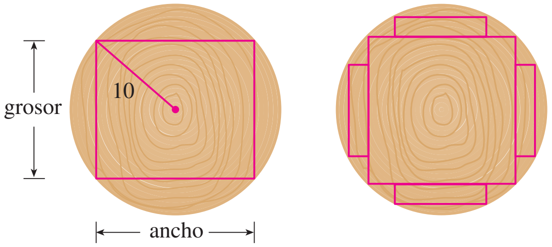
$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

En particular, determine el valor de transición de c en que cambia la cantidad de números críticos y el valor de transición en que varia el número de puntos de inflexión. Ilustre con gráficas las formas posibles.

77. Se deja caer un recipiente metálico desde un helicóptero a 500 m arriba de la superficie de la Tierra. Su paracaídas no se abre, pero el recipiente ha sido diseñado para soportar una velocidad de impacto de 100 m/s. ¿Se reventará o no?

78. En una carrera de automóviles a lo largo de una pista recta, el auto A deja atrás dos veces al vehículo B. Demuestre que en algún momento en la carrera las aceleraciones de los automóviles fueron iguales. Plantee los supuestos que haga.

79. Se va a cortar una viga rectangular a partir de un tronco cilíndrico que tiene un radio de 10 pulgadas.
a) Demuestre que la viga de área máxima de sección transversal es cuadrada.
b) Se van a cortar cuatro tablones rectangulares de las cuatro secciones del tronco que quedan después de cortar la viga cuadrada. Determine las dimensiones de los tablones que tendrán el área máxima de la sección transversal.
c) Suponga que la resistencia de la viga rectangular es proporcional al producto de su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más fuerte que se puede cortar a partir del tronco cilíndrico.



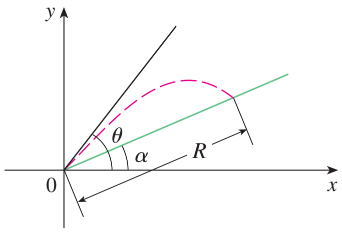
80. Si se dispara un proyectil a una velocidad inicial v a un ángulo de inclinación θ a partir de la horizontal, por tanto, su trayectoria, despreciando la resistencia del aire, es la parábola

$$y = (\tan \theta)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2\theta} x^2 \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

a) Suponga que el proyectil se dispara desde la base de un plano inclinado que forman un ángulo α, $\alpha > 0$, respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. Demuestre que el alcance del proyectil, medido por encima de la pendiente, se expresa mediante

$$R(\theta) = \frac{2v^2 \cos\theta \, \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g \cos^2\alpha}$$

b) Determine θ de modo que R sea un máximo.
c) Suponga que el plano forma un ángulo α *abajo* de la horizontal. Determine el alcance R en este caso y el ángulo en el cual debe dispararse el proyectil para maximizar R.

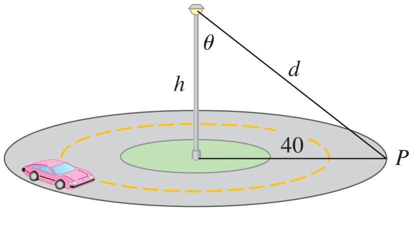


81. Demuestre que, para $x > 0$,

$$\frac{x}{1 + x^2} < \tan^{-1} x < x$$

82. Trace la gráfica de una función f tal que $f'(x) < 0$ para toda x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ y $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) + x] = 0$.

83. Una luz se coloca encima de un poste de altura h pies, con el fin de iluminar un círculo, que tiene radio de 40 pies, ocupado por el tráfico. La intensidad de iluminación I en cualquier punto P en el círculo es directamente proporcional al coseno del ángulo θ (véase la figura) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d de la fuente de luz.
a) ¿Qué tan alto debe estar la luz sobre el poste de manera que se maximice I?
b) Supongamos que la luz sobre el poste está a h pies de altura y que una mujer está caminando hacia afuera de la base del poste a una rapidez de 4 pies/s. ¿Con qué rapidez disminuye la intensidad de la luz en el punto a su espalda a 4 pies sobre el suelo, cuando ella alcanza el borde exterior del círculo de tráfico?



84. Está fluyendo agua a un ritmo constante dentro de un tanque esférico. Sea $V(t)$ el volumen de agua en el tanque y $H(t)$ la altura del agua en el tanque en el tiempo t.
a) ¿Cuáles son los significados de $V'(t)$ y $H'(t)$? ¿Son estas derivadas positivas, negativas o cero?
b) ¿Es $V''(t)$ positiva, negativa o cero? Explique.
c) Sean t_1, t_2 y t_3 los tiempos cuando el tanque está lleno a un cuarto, la mitad y a tres cuartas partes del total, respectivamente. ¿Son los valores $H''(t_1)$, $H''(t_2)$ y $H''(t_3)$ positivos, negativos o cero? ¿Por qué?

Problemas adicionales

Uno de los principios más importantes en la resolución de problemas es la *analogía* (véase la pagina 75). Si tiene dificultades para comenzar un problema, conviene resolver un problema semejante más sencillo. En el ejemplo siguiente se ilustra el principio. Cubra la solución e intente resolverlo primero.

EJEMPLO 1 Si x, y y z son números positivos, demuestre que

$$\frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{xyz} \geqslant 8$$

SOLUCIÓN Puede resultar difícil empezar con este problema. (Algunos estudiantes lo han atacado multiplicando el numerador, pero eso sólo genera dificultades.) Intente pensar en un problema similar más sencillo. Cuando intervienen varias variables, a menudo resulta útil pensar en un problema análogo con menos variables. En este caso, puede reducir el número de variables de tres a una y probar la desigualdad análoga

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para } x > 0$$

De hecho, si puede probar $\boxed{1}$, entonces se deduce la desigualdad deseada porque

$$\frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{xyz} = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)\left(\frac{y^2 + 1}{y}\right)\left(\frac{z^2 + 1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

La clave para demostrar $\boxed{1}$ es reconocer que es una versión disfrazada de problema de mínimo. Si hace

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

entonces $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de tal suerte que $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$. También, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$, y $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Por consiguiente, el valor mínimo absoluto de f es $f(1) = 2$. Esto significa que

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos los valores positivos de } x$$

y, como se mencionó, por multiplicación se infiere la desigualdad dada.

La desigualdad $\boxed{1}$ pudo probarse sin cálculo. De hecho, si $x > 0$, tenemos

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x - 1)^2 \geqslant 0$$

Debido a que la última desigualdad es obviamente verdadera, la primera también lo es.

RP RETOME EL CONCEPTO

¿Qué ha aprendido a partir de la solución de este ejemplo?

- Para resolver un problema que involoucra varias variables, podría ayudar resolver un problema semejante con una variable.
- Cuando intente probar una desigualdad, podría ayudar si piensa en ella como en un problema de máximos y mínimos.

Problemas

1. Si un rectángulo tiene su base sobre el eje x y dos vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$, demuestre que el rectángulo tiene el área más grande posible cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la curva.

2. Demuestre que $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para toda x.

3. ¿La función $f(x) = e^{10|x-2|-x^2}$ tiene un máximo absoluto? Si es así, encuéntrelo. ¿Qué hay del máximo absoluto?

4. Demuestre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos los números x y y tales que $|x| \leqslant 2$ y $|y| \leqslant 2$.

5. Demuestre que los puntos de inflexión de la curva $y = (\operatorname{sen} x)/x$ está sobre la curva $y^2(x^4 + 4) = 4$.

6. Encuentre el punto sobre la parábola $y = 1 - x^2$ en el cual la recta tangente corta el primer cuadrante en un triángulo con área mínima.

7. Si a, b, c y d son constantes tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

halle el valor de la suma $a + b + c + d$.

8. Esquematice el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $|x + y| \leqslant e^x$.

9. Encuentre los puntos más altos y más bajos sobre la curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

10. ¿Para qué valores de c la curva $y = cx^3 + e^x$ tiene puntos de inflexión?

11. Si $P(a, a^2)$ es cualquier punto sobre la parábola $y = x^2$, excepto en el origen, sea Q el punto donde la recta normal cruza la parábola una vez más (véase la figura). Demuestre que el segmento de recta PQ tiene la longitud más corta posible cuando $a = 1/\sqrt{2}$.

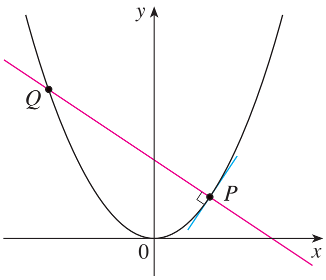
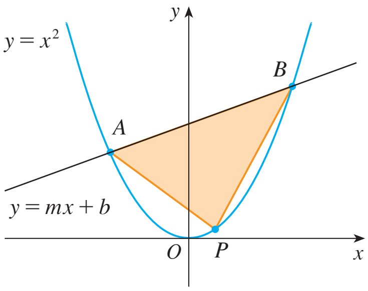


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

12. Trace la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

13. La recta $y = mx + b$ corta a la parábola $y = x^2$ en los puntos A y B (véase la figura). Determine el punto P sobre el arco AOB de la parábola que maximiza el área del triángulo PAB.



14. $ABCD$ es un trozo cuadrado de papel con lados de longitud 1 m. Se dibuja un cuarto de circunferencia desde B hasta D, con centro en A. El trozo de papel se dobla a lo largo de EF con E sobre AB y F sobre AD, de manera que A cae sobre el cuarto de circunferencia. Determine las áreas máxima y mínima que podría tener el triángulo AEF.

15. ¿Para qué números positivos a la curva $y = a^x$ corta a la recta $y = x$?

16. ¿Para qué valores de a es verdadera la siguiente ecuación?

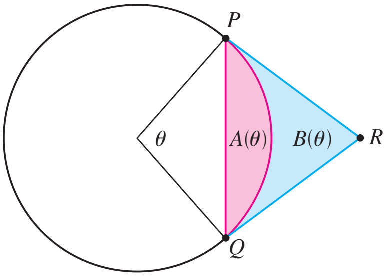
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x = e$$

17. Sea $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y n es un entero positivo. Si se sabe que $|f(x)| \leqslant |\operatorname{sen} x|$ para toda x, demuestre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$$

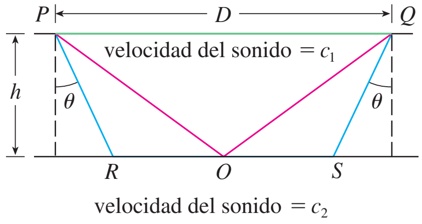
18. Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ, como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ. Sea $B(\theta)$ el área entre las rectas tangentes PR, QR y el arco. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



19. La velocidad del sonido c_1 en una capa superior y c_2 en una capa inferior de roca y el espesor h de la capa superior pueden calcularse mediante la exploración sísmica, si la velocidad del sonido en la capa inferior es mayor que la velocidad en la capa superior. Se hace detonar una carga de dinamita en el punto P y las señales transmitidas se registran en el punto Q, el cual está a una distancia D de P. La primera señal que llega a Q viaja por la superficie y tarda T_1 segundos. La siguiente señal viaja desde el punto P al punto R, desde R a S en la capa inferior y luego a Q, lo cual le lleva T_2 segundos. La tercera señal es reflejada por la capa inferior en el punto medio O de RS y tarda T_3 segundos en llegar a Q.

a) Exprese T_1, T_2 y T_3 en función de D, h, c_1, c_2 y θ.
b) Demuestre que T_2 es un mínimo cuando $\operatorname{sen} \theta = c_1/c_2$.
c) Suponga que $D = 1$ km, $T_1 = 0.26$ s, $T_2 = 0.32$ s y $T_3 = 0.34$ s. Calcule c_1, c_2 y h.



Nota: los geofísicos usan esta técnica cuando estudian la estructura de la corteza terrestre, ya sea con fines de exploración petrolera o para la detección de enormes fallas en las rocas.

20. ¿Para qué valores de c existe una recta que cruce la curva

$$y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$$

en cuatro puntos diferentes?

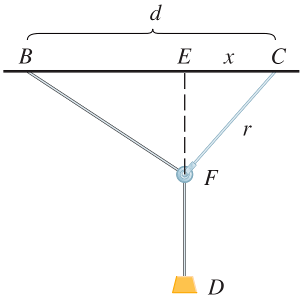


FIGURA PARA EL PROBLEMA 21

21. Uno de los problemas que planteó el marqués de l'Hospital en su libro de texto *Analyse des Infiniment Petits* concierne a una polea conectada al techo de una habitación en un punto C mediante una cuerda de longitud r. En otro punto B sobre el techo, a una distancia d de C (donde $d > r$), una cuerda de longitud ℓ se conecta a la polea y pasa por ésta en F y se ata a un peso W. El peso se libera y alcanza el reposo en su posición de equilibrio D. Tal y como argumentó l'Hospital, esto sucede cuando la distancia $|ED|$ se maximiza. Demuestre que cuando el sistema alcanza el punto de equilibrio, el valor de x es

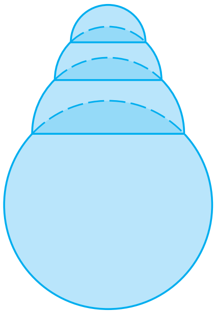
$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

Observe que esta expresión es independiente tanto de W como de ℓ.

22. Dada una esfera con radio r, encuentre la altura de una pirámide de volumen mínimo cuya base es un cuadrado y cuyas caras base y triangular son tangentes a la esfera. ¿Qué sucede si la base de la pirámide es un n-ágono regular? (Un n-ágono regular es un polígono con n lados y ángulos iguales.) (Use el hecho de que el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base.)

23. Suponga que una bola de nieve se derrite de tal modo que su volumen disminuye en proporción directa a su área superficial. Si tarda tres horas en que la bola disminuya a la mitad de su volumen original, ¿cuánto tardará la bola en fundirse totalmente?

24. Una burbuja hemisférica se coloca sobre una burbuja esférica de radio 1. Después, una burbuja hemisférica más pequeña se coloca sobre la primera. Este proceso prosigue hasta que se forman n cámaras, incluso la esfera. (La figura muestra el caso $n = 4$). Utilice la inducción matemática para demostrar que la altura máxima de cualquier torre de burbujas con n cámaras es $1 + \sqrt{n}$.



5 Integrales

En el ejemplo 7 de la sección 5.4 veremos cómo utilizar los datos de consumo de energía y una integral para calcular la cantidad de energía utilizada en un día en la ciudad de San Francisco.

© Nathan Jaskowiak / Shutterstock

En el capítulo 2 utilizamos los problemas de la recta tangente y la velocidad para introducir el concepto de derivada, que es la idea central en el cálculo diferencial. De la misma manera, este capítulo comienza con los problemas de área y distancia y los utiliza para formular la idea de integral definida, que es el concepto básico del cálculo integral. Veremos en los capítulos 6 y 8 cómo utilizar la integral para resolver problemas relacionados con volúmenes, longitud de curvas, predicciones de una población, registro cardiaco, fuerzas sobre una presa, trabajo, excedente de consumo y el beisbol, entre muchas otras situaciones.

Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada; veremos en este capítulo que este teorema simplifica en gran medida la resolución de muchos problemas.

5.1 Áreas y distancias

Ahora es *un* buen momento para leer (o volver a leer) *Presentación preliminar del cálculo* (véase la página 1), que analiza las ideas unificadoras del cálculo y lo ayuda a situarse en la perspectiva de donde está y hacia dónde va.

En esta sección se descubre que, al intentar calcular el área bajo una curva o la distancia recorrida por un automóvil, se llega al mismo tipo especial de límite.

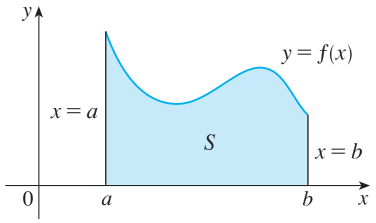


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

El problema del área

Empezaremos por intentar resolver el *problema del área*: encuentre el área de la región S que está debajo de la curva $y = f(x)$, desde a hasta b. Esto significa que S (figura 1) está limitada por la grafica de una función continua f [donde $f(x) \geqslant 0$], las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje x.

Al intentar resolver el problema del área, debemos preguntarnos: ¿cuál es el significado de la palabra *área?* Esta cuestión es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, se define como el producto del largo y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base multiplicada por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos (figura 2) y sumar las áreas de esos triángulos.

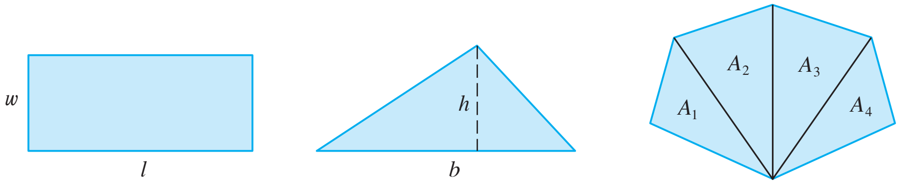


FIGURA 2 $A = lw$ $A = \frac{1}{2}bh$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región, pero parte del problema del área es hacer que esta idea intuitiva se precise dando una definición exacta.

Recuerde que al definir una recta tangente, primero obtuvimos una aproximación de la pendiente de la recta tangente para las pendientes de rectas secantes y, a continuación, tomamos el límite de estas aproximaciones. Sigamos una idea similar para las áreas. En primer lugar obtenemos una aproximación de la región S representándola por medio de rectángulos, y después tomamos el límite de las áreas de los rectángulos cuando se incrementa el número de éstos. En el ejemplo siguiente se ilustra el procedimiento.

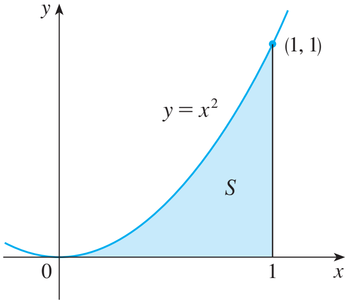


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$, desde 0 hasta 1 (la región parabólica S se ilustra en la figura 3).

SOLUCIÓN En primer lugar, el área S debe encontrarse en alguna parte entre 0 y 1 porque S está contenida en un cuadrado de lado 1, pero, en verdad, podemos lograr algo mejor que eso. Suponga que dividimos S en cuatro franjas, S_1, S_2, S_3 y S_4, al trazar las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 4a).

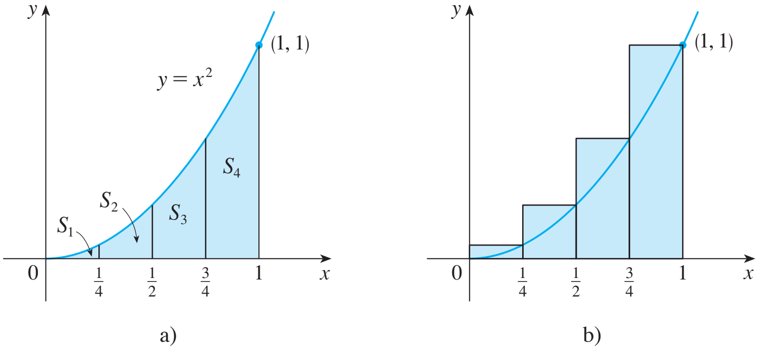


FIGURA 4

Podemos obtener una aproximación de cada franja por medio de un rectángulo cuya base sea la misma que la de la franja y cuya altura sea la misma que la del lado derecho de la propia franja [véase la figura 4b)]. En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos de la derecha de los subintervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Cada rectángulo tiene un ancho de $\frac{1}{4}$, y las alturas son $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ y 1^2. Si denotamos con R_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtenemos

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

A partir de la figura 4b) vemos que el área A de S es menor que R_4, de modo que

$$A < 0.46875$$

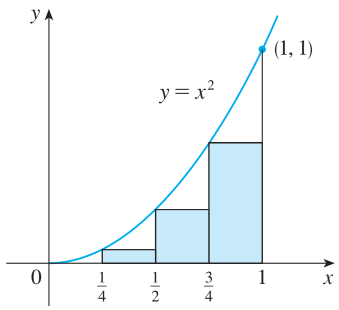


FIGURA 5

En lugar de usar los rectángulos de la figura 4b), podríamos utilizar los rectángulos más pequeños de la figura 5, cuyas alturas son los valores de f en los puntos extremos de la izquierda de los subintervalos. (El rectángulo de la extrema izquierda se ha aplastado debido a que su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Vemos ahora que el área de S es mayor que L_4, de modo que se tienen estimaciones superior e inferior para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Es posible repetir este procedimiento con un número mayor de franjas. En la figura 6 se muestra lo que sucede cuando dividimos la región S en ocho franjas de anchos iguales.

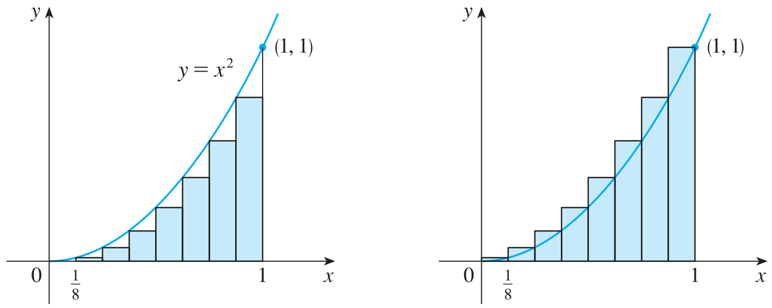


FIGURA 6
Aproximación a S con ocho rectángulos

a) Usando los puntos extremos a la izquierda

b) Usando los puntos extremos a la derecha

Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), obtenemos mejores estimaciones inferior y superior para A:

$$0.2734375 < \mathrm{A} < 0.3984375$$

De modo que una posible respuesta para la pregunta es decir que el área verdadera de S se encuentra entre 0.2734375 y 0.3984375.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Podríamos obtener mejores estimaciones al incrementar el número de franjas. En la tabla que aparece a la izquierda se muestran los resultados de cálculos semejantes (por computadora), usando n rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos extremos de la izquierda (L_n) o con los puntos extremos de la derecha (R_n). En particular, al usar 50 franjas, el área se encuentra entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas, lo estrecha incluso más: A se halla entre 0.3328335 y 0.3338335. Una buena estimación se obtiene promediando estos números: $A \approx 0.3333335$.

Con base en los valores de la tabla en el ejemplo 1, parece que R_n tiende a $\frac{1}{3}$ conforme n crece. Esto se confirma en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 2 Para la región S del ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores tiende a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

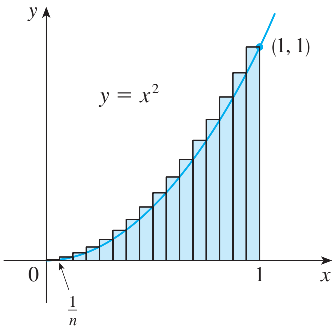


FIGURA 7

SOLUCIÓN R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos de la figura 7. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/n$, y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; es decir, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. De este modo,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

Aquí necesitamos la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos:

1 $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es posible que ya antes haya visto esta fórmula. Se demuestra en el ejemplo 5 del apéndice E.

Poniendo la fórmula 1 en nuestra expresión para R_n, obtenemos

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aquí estamos calculando el límite de la sucesión $\{R_n\}$. Las sucesiones y sus límites fueron discutidos en la *Presentación preliminar del cálculo* y serán estudiados en detalle en la sección 11.1. La idea es muy similar a un límite en el infinito (sección 2.6), salvo que en la expresión $\lim_{n\to\infty}$, restringimos n a un número entero positivo. En particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Cuando escribimos $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$ queremos decir que podemos hacer R_n tan cercano a $\frac{1}{3}$ como queramos, tomando n suficientemente grande.

Puede demostrarse que las sumas de aproximación inferiores también tienden a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

Con base en las figuras 8 y 9 parece que, conforme n crece, tanto L_n como R_n son cada vez mejores aproximaciones para el área de S. Por tanto, *definimos* el área A como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación; esto es,

TEC En Visual 5.1 puede crear figuras como la 8 y 9 para otros valores de n.

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

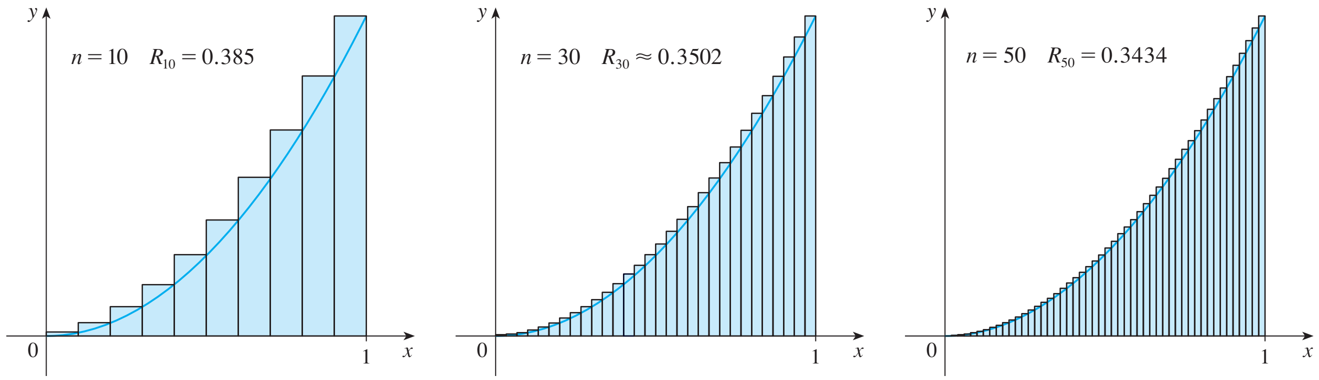


FIGURA 8 Los puntos extremos derechos producen sumas por arriba porque $f(x) = x^2$ es creciente.

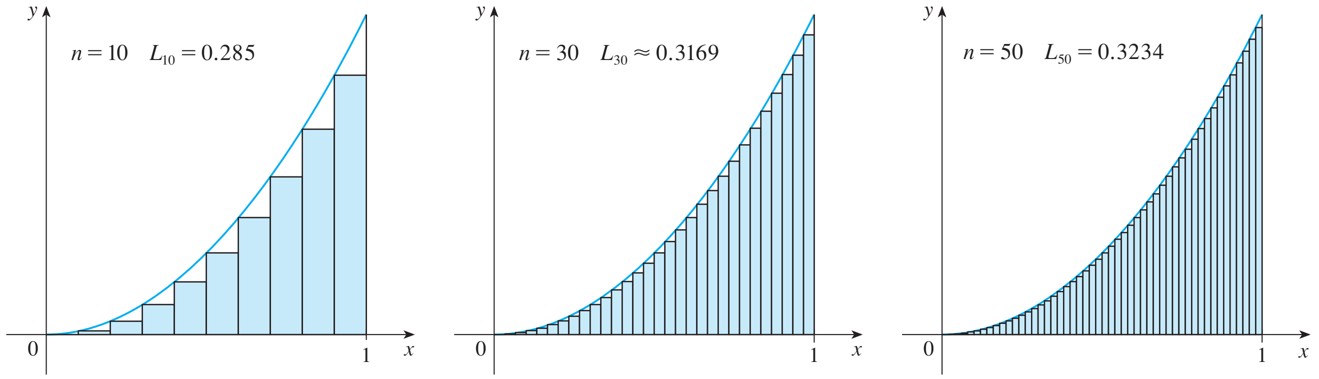


FIGURA 9 Los puntos extremos izquierdos producen sumas por abajo porque $f(x) = x^2$ es creciente.

Apliquemos la idea de los ejemplos 1 y 2 a la región más general S de la figura 1. Empecemos por subdividir S en n franjas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de anchos iguales, como en la figura 10.

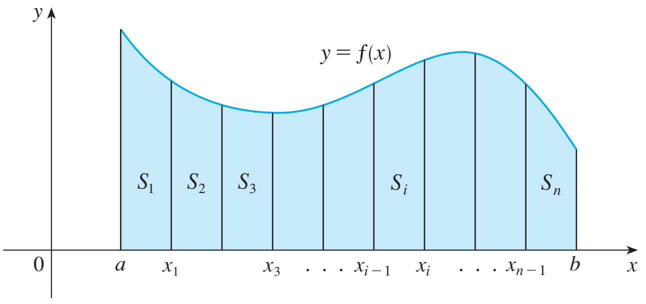


FIGURA 10

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, de modo que el ancho de cada una de las n franjas es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Estas franjas dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos extremos de la derecha de los subintervalos son

$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$

Aproximamos la i-ésima franja, S_i, con un rectángulo de ancho Δx y altura $f(x_i)$, que es el valor de f en el punto extremo de la derecha (véase la figura 11). Entonces, el área del i-ésimo rectángulo es $f(x_i)\,\Delta x$. Lo que concebimos de manera intuitiva como el área de S se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos:

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

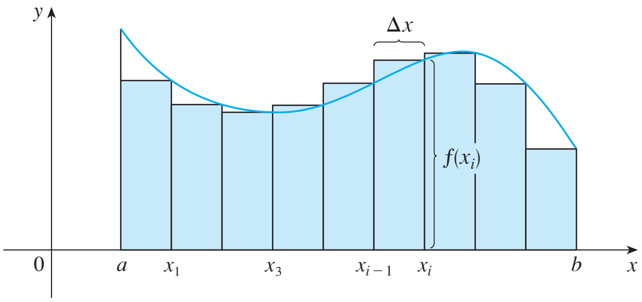


FIGURA 11

En la figura 12 se muestra esta aproximación para $n = 2$, 4, 8 y 12. Note que esta aproximación parece mejorarse a medida que se incrementa la cantidad de franjas; es decir, cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, definimos el área A de la región S de la manera siguiente:

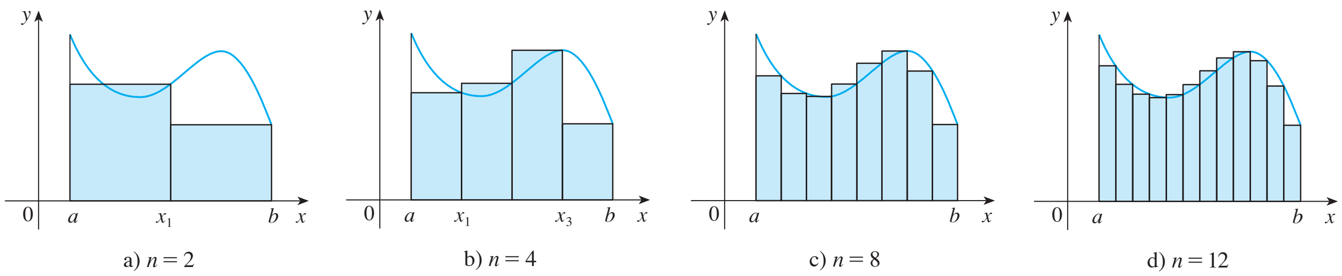


FIGURA 12

2 Definición El **área** A de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Puede demostrarse que el límite de la definición 2 siempre existe, porque se supone que f es continua. También es posible demostrar que se obtiene el mismo valor con los puntos extremos de la izquierda:

3 $$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De hecho, en lugar de usar los puntos extremos de la izquierda o los de la derecha, podríamos tomar la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en *cualquier* número x_i^*, en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A estos números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ se les llama **puntos muestra**. En la figura 13 se presentan los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestra diferentes de los puntos extremos. Así, una expresión más general para el área de S es

4 $$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

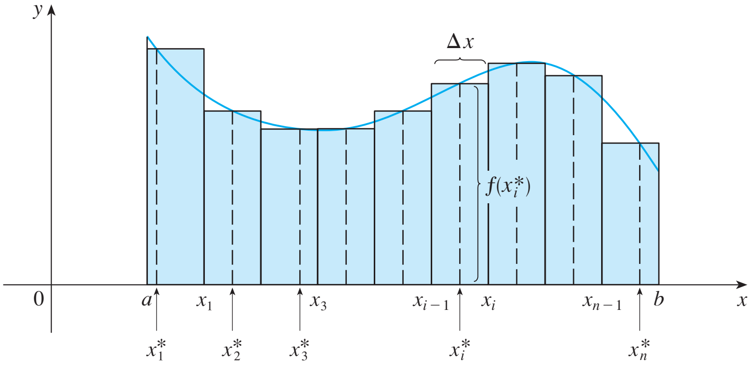


FIGURA 13

NOTA Puede demostrarse que una definición equivalente de área es la siguiente: *A es el único número más grande que todas las sumas inferiores y menor que todas las sumas superiores*. Vimos en los ejemplos 1 y 2, por ejemplo, que el área $\left(A = \frac{1}{3}\right)$ está atrapada entre todas las sumas de aproximación izquierda L_n y todas las sumas de aproximación derecha R_n. La función de esos ejemplos, $f(x) = x^2$, pasa a ser creciente sobre $[0, 1]$ y así las sumas inferiores surgen de los extremos izquierdos y las sumas superiores de los extremos de la derecha. (Véanse las figuras 8 y 9). En general, formamos **sumas inferiores** (y **superiores**) mediante la selección de los puntos muestra x_1^* de manera que $f(x_1^*)$ es el valor mínimo (y máximo) de f sobre el i-ésimo subintervalo. (Véase la figura 14 y los ejercicios 7-8).

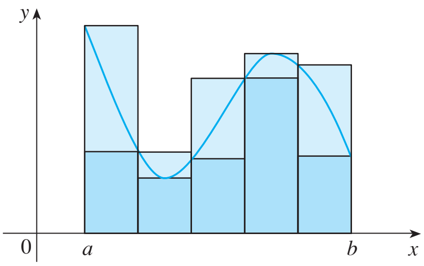


FIGURA 14
Sumas inferiores (rectángulos cortos)
Sumas superiores (rectángulos altos)

Esto indica que hay que terminar con $i = n$.

Esto indica que hay que sumar. $\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

Esto indica que hay que empezar con $i = m$.

Si necesita practicar la notación sigma, vea los ejemplos e intente resolver algunos de los del apéndice E.

A menudo se usa la **notación sigma** para escribir de manera más compacta las sumas de muchos términos. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Con esto, las expresiones para el área que se dan en las ecuaciones 2, 3 y 4, pueden escribirse como:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

También podríamos rescribir la fórmula 1 de esta manera:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EJEMPLO 3 Sea A el área de la región que está bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = 2$.

a) Con los puntos extremos de la derecha, encuentre una expresión para A como un límite. No evalúe ese límite.

b) Estime el área tomando los puntos muestra como los puntos medios y utilizando cuatro subintervalos y luego con 10 subintervalos.

SOLUCIÓN

a) Dado que $a = 0$ y $b = 2$, el ancho de un subintervalo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Por tanto, $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$ y $x_n = 2n/n$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación es

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición 2, el área es

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Si se usa la notación sigma, se podría escribir

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

Es difícil evaluar directamente a mano este límite, pero se facilita con la ayuda de un sistema algebraico computarizado (véase el ejercicio 28). En la sección 5.3 hallaremos A con más facilidad aplicando un método diferente.

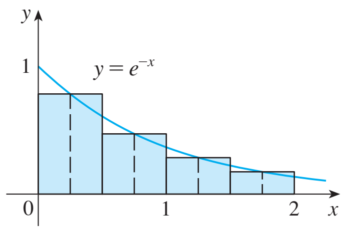


FIGURA 15

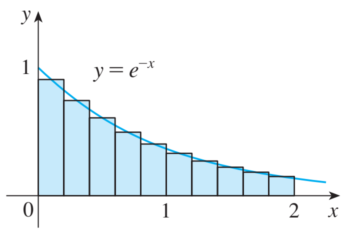


FIGURA 16

b) Con $n = 4$, los subintervalos de igual ancho, $\Delta x = 0.5$, son $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$. Los puntos medios de estos subintervalos son x_1^* 0.25, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$ y $x_4^* = 1.75$, y la suma de las áreas de los cuatro rectángulos de aproximación (véase la figura 15) es

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0.25)\,\Delta x + f(0.75)\,\Delta x + f(1.25)\,\Delta x + f(1.75)\,\Delta x \\ &= e^{-0.25}(0.5) + e^{-0.75}(0.5) + e^{-1.25}(0.5) + e^{-1.75}(0.5) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}) \approx 0.8557 \end{aligned}$$

De este modo, una estimación para el área es

$$A \approx 0.8557$$

Con $n = 10$, los subintervalos son $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.4]$, $\ldots$, $[1.8, 2]$, y los puntos medios son $x_1^* = 0.1$, $x_2^* = 0.3$, $x_3^* = 0.5, \ldots, x_{10}^* = 1.9$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} A \approx M_{10} &= f(0.1)\,\Delta x + f(0.3)\,\Delta x + f(0.5)\,\Delta x + \cdots + f(1.9)\,\Delta x \\ &= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \cdots + e^{-1.9}) \approx 0.8632 \end{aligned}$$

Con base en la figura 16, parece que esta estimación es mejor que la que se hizo con $n = 4$.

El problema de la distancia

Consideremos ahora el *problema de la distancia*: halle la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo de tiempo, si se conoce la velocidad del objeto en todo momento. (En cierto sentido, este es el problema inverso del problema de la velocidad que se analizó en la sección 2.1.) Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia es fácil de resolver por medio de la formula:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

Pero si la velocidad varía, no es fácil hallar la distancia recorrida. Investigamos el problema en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 4 Supongamos que el odómetro de nuestro automóvil esta averiado y que deseamos estimar la distancia que ha recorrido en un intervalo de tiempo de 30 segundos. Tomamos las lecturas del velocímetro cada cinco segundos y las registramos en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades coherentes, convertimos las lecturas de velocidad a pies por segundo (1 mi/h = 5 280/3 600 pies/s):

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (pies/s)	25	31	35	43	47	46	41

Durante los primeros cinco segundos, la velocidad no cambia mucho, de modo que podemos estimar la distancia recorrida durante ese tiempo al suponer que la velocidad es

constante. Si tomamos la velocidad durante este intervalo de tiempo, con velocidad inicial (25 pies/s), entonces obtenemos la distancia aproximada recorrida durante los primeros cinco segundos:

$$25\,\text{pies/s} \times 5\,\text{s} = 125\,\text{pies}$$

De manera análoga, durante el segundo intervalo de tiempo la velocidad es aproximadamente constante, y tomamos la velocidad correspondiente a $t = 5$ s. De modo que nuestra estimación para la distancia recorrida desde $t = 5$s hasta $t = 10$ s es

$$31\,\text{pies/s} \times 5\,\text{s} = 155\,\text{pies}$$

Si sumamos estimaciones similares para los otros intervalos de tiempo, obtenemos una estimación para la distancia total recorrida:

$$(25 \times 5) + (31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) = 1\,135\,\text{pies}$$

Podríamos así haber utilizado la velocidad al *final* de cada periodo de tiempo en lugar de la velocidad al principio como nuestra supuesta velocidad constante. Entonces nuestra estimación se convierte en

$$(31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) + (41 \times 5) = 1\,215\,\text{pies}$$

Si buscáramos una estimación más exacta, habríamos tomado las lecturas de la velocidad cada dos segundos o cada segundo.

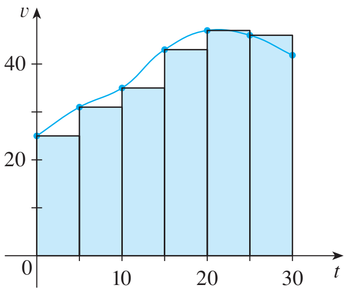


FIGURA 17

Tal vez los cálculos del ejemplo 4 le recuerden las sumas usadas al principio para estimar las áreas. La semejanza se explica cuando dibujamos la gráfica de la función velocidad del automóvil de la figura 17 y dibujamos rectángulos cuyas alturas son las velocidades iniciales en cada intervalo. El área del primer rectángulo es $25 \times 5 = 125$, lo que también es su estimación de la distancia recorrida en los primeros cinco segundos. De hecho, el área de cada rectángulo puede interpretarse como una distancia porque la altura representa la velocidad, y el ancho, al tiempo. La suma de las áreas de los rectángulos de la figura 17 es $L_6 = 1135$, lo cual es nuestra estimación inicial de la distancia total recorrida.

En general, supongamos que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$, donde $a \leqslant t \leqslant b$ y $f(t) \geqslant 0$ (de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva). Tomemos las lecturas de la velocidad en los instantes t_0 $(= a)$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(= b)$ de modo que la velocidad sea aproximadamente constante sobre cada subintervalo. Si estos instantes están igualmente espaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = (b - a)/n$. Durante el primer intervalo de tiempo, la velocidad es aproximadamente $f(t_0)$ y, por consiguiente, la distancia recorrida es aproximadamente $f(t_0)\,\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo de tiempo es alrededor de $f(t_1)\,\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Si usamos la velocidad en los puntos extremos de la derecha, en lugar de los puntos extremos de la izquierda, nuestra estimación para la distancia total resulta

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Cuanto mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas son las estimaciones, así que parece plausible que la distancia *exacta* d recorrida sea el *límite* de esas expresiones:

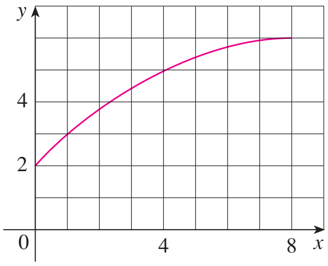
5 $$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

En la sección 5.4 veremos que, en efecto, esto es verdadero.

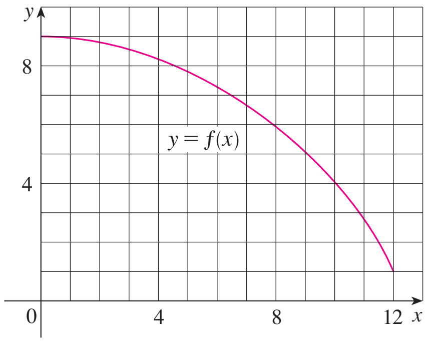
Puesto que la ecuación 5 tiene la misma forma que las expresiones para el área, dadas en las ecuaciones 2 y 3, se concluye que la distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad. En el capítulo 6 veremos que otras cantidades de interés en las ciencias naturales y sociales, como el trabajo realizado por una fuerza variable o el gasto cardiaco, también pueden interpretarse como el área bajo una curva. De modo que cuando calcule áreas en este capítulo, tenga presente que pueden interpretarse de diversas maneras prácticas.

5.1 Ejercicios

1. a) A partir de la lectura de los valores de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una superior para el área bajo esa gráfica dada de f, desde $x = 0$ hasta $x = 8$. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.
b) Encuentre nuevas estimaciones usando ocho rectángulos en cada caso.



2. a) Use seis rectángulos para encontrar estimaciones de cada tipo para el área bajo la gráfica de f desde $x = 0$ hasta $x = 12$.
i) L_6 (los puntos muestra son los puntos extremos de la izquierda)
ii) R_6 (los puntos muestra son los puntos extremos de la derecha)
iii) M_6 (los puntos muestra son los puntos medios)
b) ¿L_6 sobrestima o subestima el área verdadera?
c) ¿R_6 sobrestima o subestima el área verdadera?
d) ¿Cuál de los números L_6, R_6 o M_6 da la mejor estimación? Explique.



3. a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$, usando cuatro rectángulos de aproximación y los puntos extremos de la derecha. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación. ¿Su estimación es una subestimación o una sobrestimación?
b) Repita el inciso a), con los puntos extremos de la izquierda.

4. a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una sobrestimación o una subestimación?
b) Repita el inciso a, con los puntos extremos de la izquierda.

5. a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ hasta $x = 2$ con tres rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Después mejore su estimación usando seis rectángulos. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación.
b) Repita el inciso a) usando los puntos extremos de la izquierda.
c) Repita el inciso a) usando los puntos medios.
d) Con base en sus dibujos de los incisos a) a c), ¿cuál parece ser la mejor estimación?

6. a) Trace la gráfica de la función

$$f(x) = x - 2\ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$$

b) Estime el área bajo la gráfica de f con cuatro rectángulos de aproximación y considerando que los puntos muestra son i) los puntos extremos de la derecha y ii) los puntos medios. En cada caso, trace la curva y los rectángulos.
c) Mejore sus estimaciones del inciso b) utilizando ocho rectángulos.

7. Evalúe las sumas superior e inferior para $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, con $n = 2$, 4 y 8. Ilustre con diagramas como los de la figura 14.

8. Evalúe las sumas superior e inferior para $f(x) = 1 + x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, con $n = 3$ y 4. Ilustre con diagramas como los de la figura 14.

9-10 Con una calculadora programable (o una computadora) es posible evaluar las expresiones para las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, incluso para grandes valores de n, con el uso de iteraciones. (En una calculadora TI, use el comando (Is>) o una iteración For-EndFor; en una Casio, use Isz y en una HP o en BASIC, use una iteración FOR-NEXT.) Calcule la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación; use subintervalos iguales y los puntos extremos de la derecha, para $n = 10, 30, 50$ y 100. Luego, infiera el valor del área exacta.

9. La región bajo $y = x^4$ desde 0 hasta 1.

10. La región bajo $y = \cos x$ desde 0 hasta $\pi/2$.

SAC **11.** Algunos sistemas algebraicos computarizados tienen comandos que dibujan los rectángulos de aproximación y evalúan las sumas de sus áreas, por lo menos si x_i^* es un punto extremo de la izquierda o de la derecha. (Por ejemplo, en Maple, use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum`, y `rightsum`.)

a) Si $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, encuentre las sumas izquierda y derecha para $n = 10$, 30 y 50.
b) Ilustre mediante el dibujo de las gráficas de los rectángulos del inciso a).
c) Demuestre que el área exacta bajo f se encuentra entre 0.780 y 0.791

SAC **12.** a) Si $f(x) = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, use los comandos que se analizaron en el ejercicio 11 a fin de hallar las sumas izquierda y derecha, para $n = 10$, 30 y 50.
b) Ilustre dibujando las gráficas de los rectángulos del inciso a).
c) Demuestre que el área exacta bajo f se encuentra entre 2.50 y 2.59.

13. La rapidez de una competidora aumentó de manera constante durante los tres primeros segundos de una carrera. En la tabla se da su rapidez a intervalos de medio segundo. Encuentre las estimaciones inferior y superior para la distancia que recorrió durante estos tres segundos.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (pies/s)	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

14. En la tabla se proporcionan las lecturas del velocímetro de una motocicleta a intervalos de 12 segundos.

a) Estime la distancia recorrida por la motocicleta durante este periodo usando las velocidades al principio de los intervalos.
b) Dé otra estimación usando las velocidades al final de los periodos de tiempo.
c) ¿Sus estimaciones de los incisos a) y b) son estimaciones superiores e inferiores? Explique su respuesta.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (pies/s)	30	28	25	22	24	27

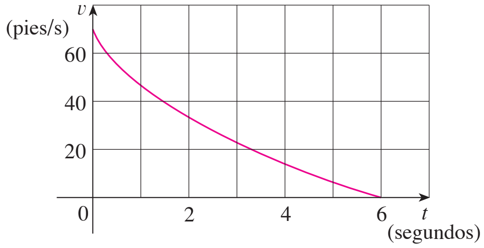
15. Se fugó aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ litros por hora. La rapidez disminuyó conforme transcurrió el tiempo y los valores de esta rapidez se muestran en la tabla en intervalos de dos horas. Halle estimaciones inferiores y superiores para la cantidad total de aceite que se fugó.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

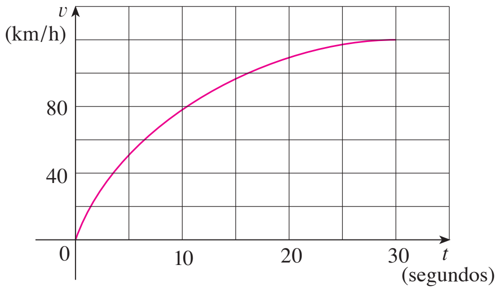
16. Cuando estimamos distancias a partir de datos de la velocidad, a veces es necesario usar instantes $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$, que no están igualmente espaciados. Aun así, podemos estimar las distancias usando los periodos de tiempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por ejemplo, el 7 de mayo de 1992 el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad era instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla, proporcionada por la NASA, se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido. Utilice estos datos para estimar la altura por arriba de la superficie de la Tierra a la que se encontró el *Endeavour*, 62 segundos después del lanzamiento.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Válvula de estrangulación a 89%	20	447
Válvula de estrangulación a 67%	32	742
Válvula de estrangulación a 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4151

17. Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil al frenar. Úsela para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.



18. Se muestra la grafica de aceleración de un automóvil que parte del estado de reposo hasta una velocidad de 120 km/h durante un periodo de 30 segundos. Estime la distancia recorrida durante este periodo.



19-21 Utilice la definición 2 para hallar una expresión para el área bajo la grafica de f como un límite. No evalúe el límite.

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

20. $f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 7$

21. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

22-23 Determine una región cuya área sea igual al límite dado. No evalúe el límite.

22. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$

23. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n}$

24. a) Utilice la definición 2 para encontrar una expresión para el área bajo la curva $y = x^3$ desde 0 hasta 1 como un límite.
b) La fórmula siguiente para la suma de los cubos de los primeros n enteros se demuestra en el apéndice E. Úsela para evaluar el límite del inciso a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

25. Sea A el área bajo la gráfica de una función f creciente continua desde a hasta b, y sea L_n y R_n las aproximaciones a A con n subintervalos utilizando los extremos izquierdo y derecho, respectivamente.
a) ¿Cómo se relacionan A, L_n y R_n?
b) Demuestre que

$$R_n - L_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

A continuación, dibuje un diagrama para ilustrar esta ecuación, mostrando que los n rectángulos que representan $R_n - L_n$ puede ensamblarse para formar un único rectángulo cuya área es la parte derecha de la ecuación.
c) Deduzca que

$$R_n - A < \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

26. Si A es el área bajo la curva $y = e^x$ de 1 a 3, utilice el ejercicio 25 para encontrar un valor de n tal que $R_n - A < 0.0001$.

SAC **27.** a) Exprese el área bajo la curva $y = x^5$ desde 0 hasta 2 como un límite.
b) Utilice un sistema algebraico computarizado a fin de encontrar la suma de su expresión del inciso a).
c) Evalúe el límite del inciso a).

SAC **28.** Halle el área exacta de la región bajo la gráfica de $y = e^{-x}$ desde 0 hasta 2 utilizando un sistema algebraico computarizado, con objeto de evaluar la suma y después el límite del ejemplo 3a). Compare su respuesta con la estimación obtenida en el ejemplo 3b).

SAC **29.** Encuentre el área exacta bajo la curva $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = b$, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use un sistema algebraico computarizado para evaluar la suma y calcular el límite.) En particular, ¿cuál es el área si $b = \pi/2$?

30. a) Sea A_n el área de un polígono con n lados iguales, inscrito en un círculo con radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $2\pi/n$, demuestre que

$$A_n = \tfrac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugerencia:* use la ecuación 3.3.2 de la página 192.]

5.2 La integral definida

En la sección 5.1 vimos que, cuando se calcula un área, surge un límite de la forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

También vimos que aparece cuando intentamos hallar la distancia recorrida por un objeto. Resulta que este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. En los capítulos 6 y 8 veremos que también surgen límites de la forma [1] al calcular longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y el trabajo, así como otras cantidades. Por esta razón, a este límite le damos un nombre y una notación especiales.

2 Definición de la integral definida Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b**, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todos las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, decimos que f es **integrable** sobre $[a, b]$.

El significado preciso del límite que define a la integral es como sigue:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier elección de x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

NOTA 1 Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ se llama **integrando**, y a y b se conocen como **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. Por ahora, el símbolo dx no tiene significado por sí mismo; la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, vista como un todo, es un símbolo único. La dx indica simplemente que la variable independiente es x. El procedimiento para calcular una integral se llama **integración**.

NOTA 2 La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número que no depende de x. De hecho, podría utilizarse cualquier letra en lugar de x sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

NOTA 3 La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que aparece en la definición 2 se llama **suma de Riemann**, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). De tal manera que la definición 2 indica que la integral definida de una función integrable puede aproximarse dentro de cualquier grado de exactitud mediante la suma de Riemann.

Sabemos que si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación (véase la figura 1). Al comparar la definición 2 con la definición de área de la sección 5.1, vemos que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como el área bajo la curva $y = f(x)$, desde a hasta b (véase la figura 2).

RIEMANN

Bernhard Riemann recibió su doctorado en filosofía bajo la dirección del legendario Gauss, en la Universidad de Göttingen, y permaneció allí para enseñar. Gauss, que no tenía el hábito de elogiar a otros matemáticos, habló de "la mente creativa, activa, en verdad matemática y la gloriosamente fértil originalidad" de Riemann. La definición 2 de integral que utilizamos se debe a Riemann. También hizo colaboraciones importantes a la teoría de funciones de una variable compleja, a la fisicomatemática, a la teoría de números y a los fundamentos de la geometría. El profundo concepto de Riemann del espacio y de la geometría resultó ser, 50 años más tarde, el apoyo idóneo para la teoría general de la relatividad de Einstein. La salud de Riemann fue mala durante toda su vida, y murió de tuberculosis a los 39 años.

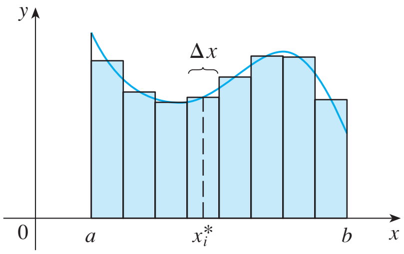


FIGURA 1
Si $f(x) \geq 0$, la suma de Riemann $\Sigma f(x_i^*) \Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos.

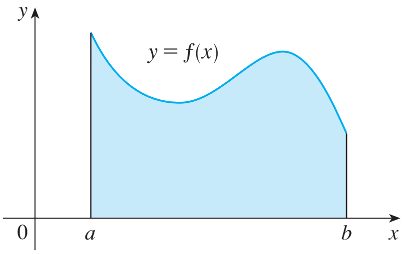


FIGURA 2
Si $f(x) \geq 0$, la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b.

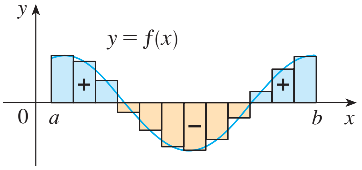


FIGURA 3
$\Sigma f(x_i^*) \Delta x$ es una aproximación al área neta.

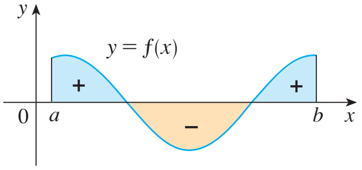


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\, dx$ es el área neta.

Si f toma valores tanto positivos como negativos, como en la figura 3, entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y los *negativos* de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x (las áreas de los rectángulos en azul *menos* las áreas de los rectángulos en oro). Cuando tomamos el límite de esas sumas de Riemann, obtenemos la situación que se ilustra en la figura 4. Una integral definida puede interpretarse como un **área neta**; es decir, una diferencia de áreas:

$$\int_a^b f(x)\, dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f, y A_2 corresponde al área de la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

NOTA 4 Aunque hemos definido $\int_a^b f(x)\, dx$ dividiendo $[a, b]$ en subintervalos del mismo ancho, hay situaciones en las que resulta ventajoso trabajar con intervalos de diferente ancho. Por ejemplo, en el ejercicio 16 de la sección 5.1, la NASA proporcionó datos de velocidad en tiempos que no estaban igualmente espaciados, pero aun así fuimos capaces de estimar la distancia recorrida. Existen métodos para la integración numérica que aprovechan los subintervalos desiguales.

Si los anchos de los intervalos son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, debemos asegurarnos de que todos estos anchos tiendan a 0 en el proceso de determinación de límites. Esto sucede si el ancho más grande, máx Δx_i, tiende a 0. De manera que en este caso la definición de la integral definida se convierte en

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x_i$$

NOTA 5 Hemos definido la integral definida para una función integrable, pero no todas las funciones son integrables (véanse los ejercicios 69-70). El teorema siguiente muestra que la mayor parte de las funciones que usualmente se presentan en realidad son integrables. Esto se demuestra en cursos más avanzados.

3 Teorema Si f es continua sobre $[a, b]$, o si f tiene sólo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ existe.

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces el límite en la definición 2 existe y proporciona el mismo valor, sin importar cómo seleccione los puntos muestra x_i^*. Para simplificar los cálculos de la integral, con frecuencia tomamos los puntos muestra en los extremos de la derecha. Por tanto, $x_i^* = x_i$ y la definición de la integral se simplifica como sigue.

4 Teorema Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde $$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_i = a + i\,\Delta x$$

EJEMPLO 1 Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como una integral sobre el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN Al comparar el límite dado con el límite en el teorema 4, vemos que es idéntico si elegimos $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. Puesto que $a = 0$ y $b = \pi$, tenemos, por el teorema 4,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$

Más adelante, cuando apliquemos la integral definida a situaciones físicas, será importante reconocer los límites de sumas como integrales, como en el ejemplo 1. Cuando Leibniz eligió la notación para la integral, escogió los ingredientes para recordar el proceso de tomar el límite. En general, cuando escribimos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

reemplazamos $\lim \Sigma$ por $\int$, x_i^* por x, y Δx por dx.

Evaluación de integrales

Cuando utilizamos la definición para evaluar una integral definida, necesitamos saber cómo trabajar con sumas. Las tres ecuaciones siguientes dan fórmulas para las sumas de potencias de enteros positivos. Es posible que conozca la ecuación 5 a partir un curso de álgebra. Las ecuaciones 6 y 7 se analizaron en la sección 5.1 y se demuestran en el apéndice E.

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Las fórmulas restantes son simples reglas para trabajar con la notación sigma:

Las fórmulas 8 a 11 se demuestran escribiendo cada uno de los miembros en forma desarrollada. El lado izquierdo de la ecuación 9 es

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

El lado derecho es

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por la propiedad distributiva, éstas son iguales. Las otras fórmulas se analizan en el apéndice E.

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

11 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

EJEMPLO 2

a) Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestra de los puntos extremos de la derecha y $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$.

b) Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN

a) Con $n = 6$ el ancho del intervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

y los puntos extremos de la derecha son $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$ y $x_6 = 3.0$. De modo que la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x + f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$

Note que f no es una función positiva, por lo que la suma de Riemann no representa una suma de áreas de rectángulos. Pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos azules (que están arriba del eje x) menos la suma de las áreas de los rectángulos de color oro (que están abajo del eje x) de la figura 5.

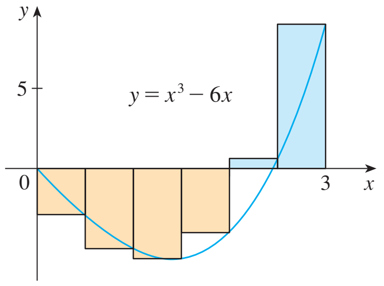


FIGURA 5

b) Con n subintervalos, tenemos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Así, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ y, en general, $x_i = 3i/n$. Dado que estamos utilizando los puntos extremos derechos, podemos utilizar el teorema 4:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

En la suma, n es una constante (diferente de i), por eso podemos mover $3/n$ hacia afuera del signo Σ.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(ecuación 9 con } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(ecuaciones 11 y 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right\} \qquad \text{(ecuaciones 7 y 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$

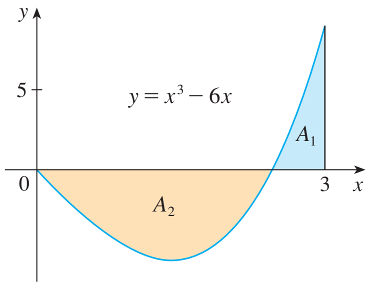


FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Esta integral no puede interpretarse como un área porque f toma tanto valores positivos como negativos; pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.

En la figura 7 se ilustran los cálculos al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha, para $n = 40$. Los valores que aparecen en la tabla hacen ver que las sumas de Riemann tienden al valor exacto de la integral, -6.75, cuando $n \to \infty$.

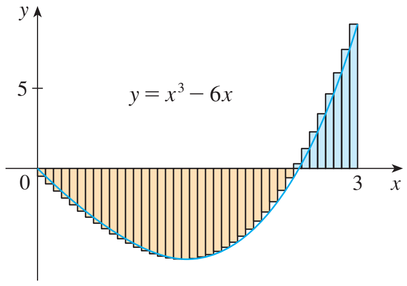


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	-6.3998
100	-6.6130
500	-6.7229
1000	-6.7365
5000	-6.7473

En la sección 5.4 veremos un método mucho más sencillo para evaluar la integral del ejemplo 2.

Puesto que $f(x) = e^x$ es positiva, la integral del ejemplo 3 representa el área que se muestra en la figura 8.

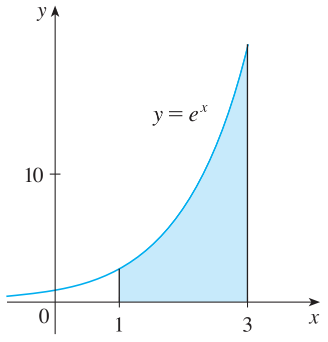


FIGURA 8

EJEMPLO 3

a) Plantee una expresión para $\int_1^3 e^x\,dx$ como un límite de sumas.
b) Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar la expresión.

SOLUCIÓN

a) Aquí tenemos $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$ y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

De modo que $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$ y

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

A partir del teorema 4, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}\end{aligned}$$

b) Si le pedimos a un sistema algebraico computarizado que evalúe la suma y simplifique, obtenemos

Un sistema algebraico computarizado es capaz de hallar una expresión explícita para esta suma porque es una serie geométrica. El límite podría encontrarse usando la regla de l'Hospital.

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Ahora le pedimos al sistema algebraico computarizado que evalúe el límite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

En la siguiente sección aprenderemos un método más sencillo para la evaluación de integrales.

V EJEMPLO 4 Evalúe las siguientes integrales interpretando cada una en términos de áreas:

a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ b) $\int_0^3 (x - 1)\,dx$

SOLUCIÓN

a) Dado que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, podemos interpretar esta integral como el área bajo la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ desde 0 hasta 1. Pero, ya que $y^2 = 1 - x^2$, obtenemos $x^2 + y^2 = 1$, lo cual muestra que la gráfica de f es el cuarto de circunferencia con radio 1, que aparece en la figura 9. Por tanto,

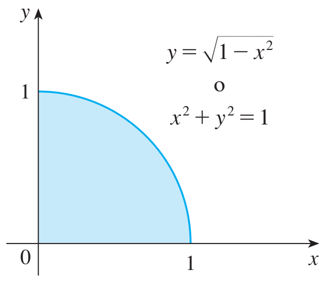


FIGURA 9

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(En la sección 7.3 usted será capaz de *demostrar* que el área de un círculo con radio r es πr^2.)

b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se muestra en la figura 10. Calcularemos la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x - 1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1.5$$

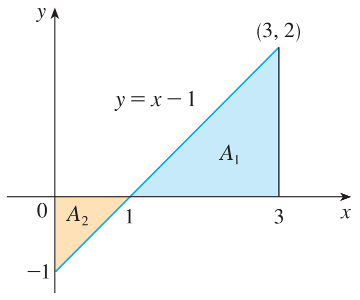


FIGURA 10

La regla del punto medio

A menudo se elige el punto muestra x_i^* como el extremo de la derecha del i-ésimo intervalo porque resulta conveniente para calcular el límite. Pero si la finalidad es hallar una *aproximación* para una integral, es mejor elegir x_i^* como el punto medio del intervalo, el cual se denota con $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usamos los puntos medios, obtenemos la siguiente aproximación:

TEC En Module 5.2/7.7 se muestra cómo la regla del punto medio mejora cuando n se incrementa.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

y $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$$

V EJEMPLO 5 Use la regla del punto medio con $n = 5$ para hallar una aproximación de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Los puntos extremos de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0, de modo que los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. El ancho de los subintervalos es $\Delta x = (2 - 1)/5 = \frac{1}{5}$, de modo que la regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

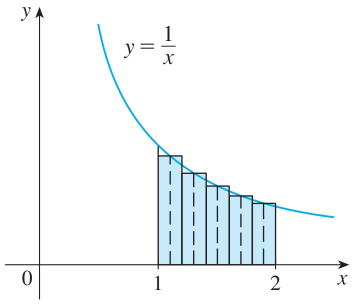


FIGURA 11

Puesto que $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, la integral representa un área y la aproximación dada por la regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura 11.

Hasta el momento no sabemos qué tan exacta es la aproximación del ejemplo 5; pero en la sección 7.7 aprenderemos un método para estimar el error involucrado, con el uso de la regla del punto medio. En ese momento se exponen otros métodos para hallar aproximaciones de integrales definidas.

Si aplicamos la regla del punto medio a la integral del ejemplo 2, obtenemos el dibujo que aparece en la figura 12. La aproximación $M_{40} \approx -6.7563$ está mucho más cerca del valor verdadero de -6.75 que la aproximación con el punto extremo de la derecha, $R_{40} \approx -6.3998$, que se muestra en la figura 7.

TEC En Visual 5.2 podemos comparar las aproximaciones izquierda, derecha y del punto medio para la integral del ejemplo 2 para diferentes valores de n.

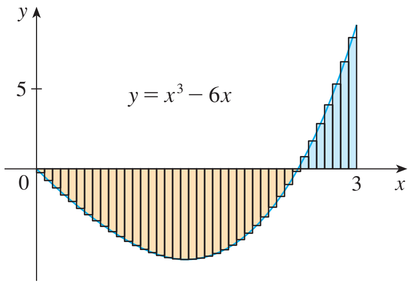


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6.7563$

Propiedades de la integral definida

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita se supuso que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Note que si invertimos a y b, entonces Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. En consecuencia,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Si $a = b$, entonces $\Delta x = 0$ de manera que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ahora aparecen algunas propiedades básicas de las integrales que lo ayudarán a la evaluación de éstas con mayor facilidad. Suponga que f y g son funciones continuas.

Propiedades de la integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, donde c es cualquier constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

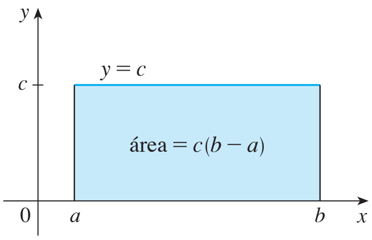


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$

En la propiedad 1 se expresa que la integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, esto es de esperarse porque $c(b - a)$ es el área del rectángulo de la figura 13.

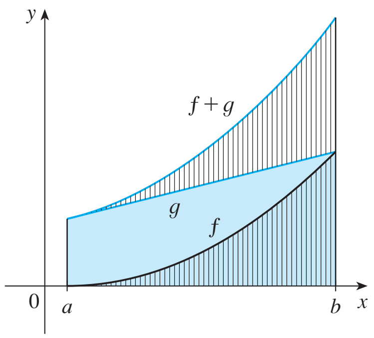


FIGURA 14

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

En la propiedad 2 se afirma que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para funciones positivas, esto quiere decir que el área bajo $f + g$ es el área bajo f más el área bajo g. La figura 14 ayuda a comprender por qué esto es cierto: en vista de la manera en que funciona la adición de gráficas, los segmentos de recta verticales correspondientes tienen alturas iguales.

En general, la propiedad 2 se deduce del teorema 4 y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

La propiedad 3 parece intuitivamente razonable porque si se multiplica una función por un número positivo c, su gráfica se alarga o contrae en el sentido vertical un factor de c. De modo que alarga o contrae cada rectángulo de aproximación un factor de c y, por consecuencia, tiene el efecto de multiplicar el área por c.

La propiedad 3 puede demostrarse de manera semejante y en ella se expresa que la integral de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero *sólo* una constante) puede llevarse hacia afuera de un signo de integral. La propiedad 4 se demuestra escribiendo $f - g = f + (-g)$ y aplicando las propiedades 2 y 3 con $c = -1$.

EJEMPLO 6 Utilice las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx$.

SOLUCIÓN Utilizando las propiedades 2 y 3 de las integrales, se tiene

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

Por la propiedad 1, sabemos que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

y, en el ejemplo 2 de la sección 5.1, encontramos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. De manera que,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx &= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx \\ &= 4 + 3\cdot\tfrac{1}{3} = 5\end{aligned}$$

En la siguiente propiedad indica cómo combinar las integrales de la misma función sobre intervalos adyacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

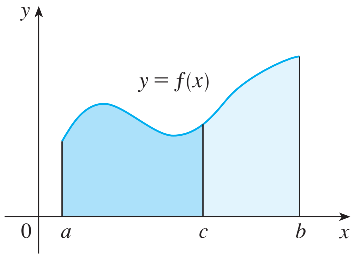


FIGURA 15

Esto no es fácil de demostrar en general; pero, para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $a < c < b$, puede verse la propiedad 5 a partir de la interpretación geométrica de la figura 15: el área bajo $y = f(x)$, desde a hasta c, más el área desde c hasta b es igual al área total desde a hasta b.

V EJEMPLO 7 Si se sabe que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ y $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)\,dx$.

SOLUCIÓN Por la propiedad 5, tenemos

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

de modo que $$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

Las propiedades 1 a 5 son verdaderas ya sea que $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Las propiedades que se enuncian a continuación, en las que se comparan tamaños de funciones y tamaños de integrales, son verdaderas sólo si $a \leqslant b$.

Propiedades de comparación de la integral

6. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

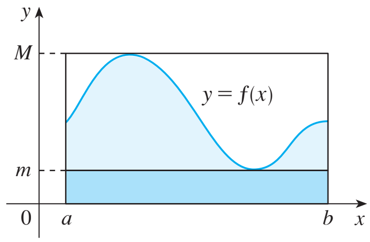


FIGURA 16

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la gráfica de f, de manera que la interpretación geométrica de la propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas (esto también se sigue directamente de la definición porque todas las cantidades involucradas son positivas). La propiedad 7 expresa que una función más grande tiene una integral más grande, lo cual se infiere de las propiedades 6 y 4 porque $f - g \geqslant 0$.

La propiedad 8 se ilustra mediante la figura 16 para el caso en que $f(x) \geqslant 0$. Si f es continua podríamos tomar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$. En este caso, la propiedad 8 expresa que el área bajo la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 8 Puesto que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, la propiedad 7 plantea que

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Si aplicamos la propiedad 1 para evaluar las integrales en el primero y el segundo miembros, obtenemos

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

La propiedad 8 es útil si lo que quiere se reduce es una estimación general del tamaño de una integral sin las dificultades que representa el uso de la regla del punto medio.

EJEMPLO 8 Use la propiedad 8 para estimar $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Debido a que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente sobre $[0, 1]$, su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$. De

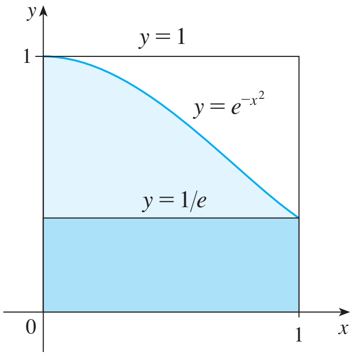


FIGURA 17

esta manera, por la propiedad 8,

$$e^{-1}(1 - 0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1 - 0)$$

o bien

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Dado que $e^{-1} \approx 0.3679$, podemos escribir

$$0.367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

El resultado del ejemplo 8 se ilustra en la figura 17. La integral es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del cuadrado.

5.2 Ejercicios

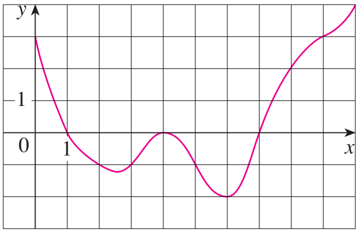
1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \leqslant x \leqslant 14$, con seis subintervalos, tomando los puntos extremos de la izquierda como los puntos muestra. Con ayuda de un diagrama, explique qué representa la suma de Riemann.

2. Si $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, evalúe la suma de Riemann con $n = 6$ tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

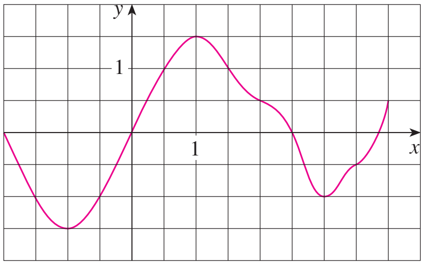
3. Si $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, encuentre la suma de Riemann con $n = 4$ correcta hasta seis cifras decimales, tomando los puntos medios como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

4. a) Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, con seis términos, tomando los puntos muestra como los puntos extremos de la derecha (Dé su respuesta a una aproximación de seis cifras decimales.) Explique, con ayuda de un diagrama, qué representa la suma de Riemann.
b) Repita el inciso a) con los puntos medios como los puntos muestra.

5. Se da la gráfica de una función. Estime $\int_0^{10} f(x)\,dx$ usando cinco subintervalos con a) los puntos extremos de la derecha, b) los puntos extremos de la izquierda y c) los puntos medios.



6. Se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando a) los puntos extremos de la derecha, b) los puntos extremos de la izquierda y c) los puntos medios.



7. Se muestra una tabla de valores de una función creciente f. Utilícela para hacer estimaciones inferiores y superiores para $\int_{10}^{30} f(x)\,dx$.

x	10	14	18	22	26	30
$f(x)$	−12	−6	−2	1	3	8

8. En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_3^9 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con a) los puntos extremos de la derecha, b) los puntos extremos de la izquierda y c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−3.4	−2.1	−0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

9-12 Use la regla del punto medio, con el valor dado de n, para hallar una aproximación de cada una de las siguientes integrales. Redondee cada respuesta hasta cuatro cifras decimales.

9. $\int_0^8 \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx, \quad n = 4$

11. $\int_0^2 \dfrac{x}{x+1}\, dx, \quad n = 5$

12. $\int_1^5 x^2 e^{-x}\, dx, \quad n = 4$

SAC **13.** Si tiene un SAC que evalúe las aproximaciones con los puntos medios y trace los rectángulos correspondientes (en Maple, use los comandos de `RiemannSum` o `middlebox` y `middlebox`), compruebe la respuesta del ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. Después, repita con $n = 10$ y $n = 20$.

14. Con una calculadora programable o una computadora (vea las instrucciones para el ejercicio 9 de la sección 5.1), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x) = x/(x+1)$ sobre el intervalo $[0, 2]$, con $n = 100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$0.8946 < \int_0^2 \frac{x}{x+1}\, dx < 0.9081$$

15. Use una calculadora o una computadora para hacer una tabla de valores de sumas de la derecha de Riemann R_n para la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿A qué valor parecen aproximarse estos números?

16. Use calculadora o computadora para hacer una tabla de valores de las sumas de la izquierda y de la derecha de Riemann L_n y R_n para la integral $\int_0^2 e^{-x^2}\, dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿Entre que números tiene que encontrarse el valor de la integral? ¿Puede formular un enunciado similar para la integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\, dx$? Explique su respuesta.

17-20 Exprese cada uno de los siguientes límites como una integral definida sobre el intervalo dado.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\, \Delta x, \quad [2, 6]$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\cos x_i}{x_i}\, \Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} [5(x_i^*)^3 - 4x_i^*]\, \Delta x, \quad [2, 7]$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^*}{(x_i^*)^2 + 4}\, \Delta x, \quad [1, 3]$

21-25 Use la forma de la definición de integral que se dio en el teorema 4 para evaluar la integral.

21. $\int_2^5 (4 - 2x)\, dx$

22. $\int_1^4 (x^2 - 4x + 2)\, dx$

23. $\int_{-2}^0 (x^2 + x)\, dx$

24. $\int_0^2 (2x - x^3)\, dx$

25. $\int_0^1 (x^3 - 3x^2)\, dx$

26. a) Halle una aproximación a la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$ usando una suma de Riemann con puntos extremos de la derecha y $n = 8$.

b) Dibuje un diagrama como el de la figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso a).

c) Aplique el teorema 4 para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.

d) Interprete la integral del inciso c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la figura 4.

27. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

29-30 Exprese la integral como un límite de sumas de Riemann. No evalúe el límite.

29. $\int_2^6 \dfrac{x}{1 + x^5}\, dx$

30. $\int_1^{10} (x - 4 \ln x)\, dx$

SAC **31-32** Exprese cada una de las siguientes integrales como un límite de sumas. Después, evalúe utilizando un sistema algebraico computarizado para encontrar tanto la suma como el límite.

31. $\int_0^\pi \operatorname{sen} 5x\, dx$

32. $\int_2^{10} x^6\, dx$

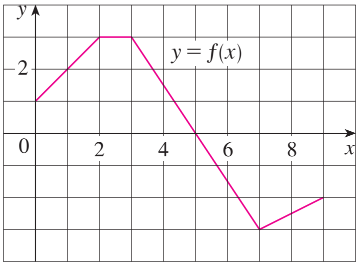
33. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada una de las siguientes integrales interpretándola en términos de áreas.

a) $\int_0^2 f(x)\, dx$

b) $\int_0^5 f(x)\, dx$

c) $\int_5^7 f(x)\, dx$

d) $\int_0^9 f(x)\, dx$

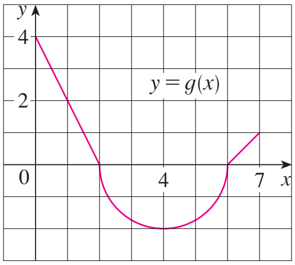


34. La gráfica g consiste en dos rectas y una semicircunferencia. Úsela para evaluar cada una de las siguientes integrales.

a) $\int_0^2 g(x)\, dx$

b) $\int_2^6 g(x)\, dx$

c) $\int_0^7 g(x)\, dx$



35-40 Evalúe cada una de las siguientes integrales interpretándola en términos de áreas.

35. $\int_{-1}^{2} (1 - x)\, dx$

36. $\int_{0}^{9} \left(\frac{1}{3}x - 2\right) dx$

37. $\int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

38. $\int_{-5}^{5} \left(x - \sqrt{25 - x^2}\right) dx$

39. $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

40. $\int_{0}^{10} |x - 5|\, dx$

41. Evalúe $\int_{\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

42. Dado que $\int_{0}^{1} 3x\sqrt{x^2 + 4}\, dx = 5\sqrt{5} - 8$, ¿a qué es igual $\int_{1}^{0} 3u\sqrt{u^2 + 4}\, du$?

43. En el ejemplo 2 de la sección 5.1, demostramos que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. Utilice este hecho y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (5 - 6x^2)\, dx$.

44. Utilice las propiedades de las integrales y el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 (2e^x - 1)\, dx$.

45. Utilice el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 e^{x+2}\, dx$.

46. A partir de los resultados del ejercicio 27 y del hecho de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1$ (según el ejercicio 25 de la sección 5.1), junto con las propiedades de las integrales, evalúe $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\, dx$.

47. Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\, dx$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx + \int_{2}^{5} f(x)\, dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$$

48. Si $\int_1^5 f(x)\, dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)\, dx = 3.6$, encuentre $\int_1^4 f(x)\, dx$

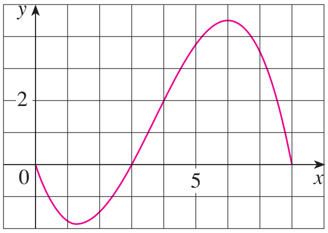
49. Si $\int_0^9 f(x)\, dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\, dx = 16$, encuentre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\, dx$.

50. Encuentre $\int_0^5 f(x)\, dx$ para

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

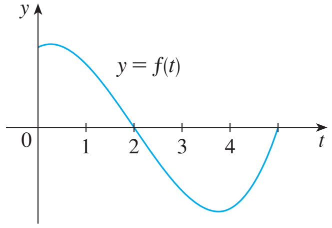
51. Para la función f cuya gráfica se muestra, enliste las siguientes cantidades en orden creciente, de menor a mayor, y explique su razonamiento.

a) $\int_0^8 f(x)\, dx$ b) $\int_0^3 f(x)\, dx$
c) $\int_3^8 f(x)\, dx$ d) $\int_4^8 f(x)\, dx$
e) $f'(1)$



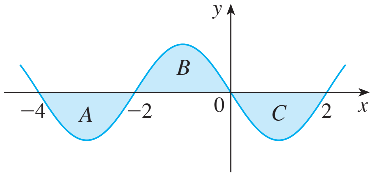
52. Si $F(x) = \int_2^x f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica está dada, ¿cuál de los siguientes valores es el más grande?

a) $F(0)$ d) $F(3)$
b) $F(1)$ e) $F(4)$
c) $F(2)$



53. Cada una de las regiones A, B, y C, limitadas por la gráfica de f y el eje x, tiene área 3. Encuentre el valor de

$$\int_{-4}^{2} [f(x) + 2x + 5]\, dx$$



54. Suponga que f tiene el valor mínimo absoluto m y el valor máximo absoluto M. ¿Entre qué valores se encuentra $\int_0^2 f(x)\, dx$? ¿Qué propiedad de las integrales le permite sostener su conclusión?

55-58 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

55. $\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \geq 0$

56. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$

57. $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$

58. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leq \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$

59-64 Utilice la propiedad 8 para estimar el valor de cada una de las siguientes integrales.

59. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

60. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx$

61. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\, dx$

62. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\, dx$

63. $\int_0^2 xe^{-x}\, dx$

64. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\, dx$

65-66 Mediante las propiedades de las integrales, junto con los ejercicios 27 y 28, demuestre cada una de las siguientes desigualdades.

65. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \geqslant \frac{26}{3}$

66. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leqslant \frac{\pi^2}{8}$

---

67. Demuestre la propiedad 3 de las integrales.

68. a) Si f es continua sobre $[a, b]$, demuestre que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

[*Sugerencia:* $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.]

b) Utilice el resultado del inciso a) para demostrar que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\, dx \right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

69. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable sobre $[0, 1]$.

70. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1/x$ si $0 < x \leqslant 1$. Demuestre que f no es integrable sobre $[0, 1]$. [*Sugerencia:* demuestre que el primer término en la suma de Riemann, $f(x_i^*)\,\Delta x$, puede hacerse de manera arbitraria muy grande].

71-72 Exprese cada uno de los siguientes límites como una integral definida.

71. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia:* considere $f(x) = x^4$.]

72. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^2}$

---

73. Determine $\int_1^2 x^{-2}\, dx$. *Sugerencia*: elija x_i^* como la media geométrica x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

FUNCIONES ÁREA

1. a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y utilice la geometría para hallar el área bajo esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.

b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra bajo la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría a fin de hallar una expresión para $A(x)$.

c) Derive la función área $A(x)$. ¿Qué observa?

2. a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Grafique la región.

b) A partir de los resultados del ejercicio 28 de la sección 5.2 encuentre una expresión para $A(x)$.

c) Determine $A'(x)$. ¿Qué observa?

d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño, entonces $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y grafique la región.

e) Dibuje un rectángulo que aproxime la región del inciso d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones demuestre que

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

f) Mediante el inciso e) proporcione una explicación intuitiva del resultado del inciso c).

3. a) Grafique la función $f(x) = \cos(x^2)$ en el rectángulo de vista $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.

b) Si definimos una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

entonces $g(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 a x [hasta que $f(x)$ sea negativa, en cuyo punto $g(x)$ es una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso a) para determinar el

Se requiere calculadora graficadora o computadora

valor de x en el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]

c) Utilice el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6), \ldots, g(1.8)$, $g(2)$. Después, con estos valores dibuje una gráfica de g.

d) Use su gráfica de g del inciso c) para dibujar la gráfica de g' utilizando la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?

4. Supongamos que f es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y definimos una nueva función g por la ecuación

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Tomando como base sus resultados en los problemas 1 a 3, deduzca una expresión para $g'(x)$.

5.3 Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del Cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El Cálculo diferencial surgió del problema de la recta tangente, mientras que el Cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que en realidad estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta de que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo precisa la relación inversa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo como un método matemático sistemático. En particular, observaron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas como en las secciones 5.1 y 5.2.

La primera parte del teorema fundamental trata con funciones definidas por una ecuación en la forma

1 $$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

donde f es una función continua sobre $[a, b]$ y x varía entre a y b. Observe que g depende sólo de x, que aparece como el límite variable superior en la integral. Si x es un número fijo, entonces la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ es un número definido. Si después hacemos variar x, el número $\int_a^x f(t)\,dt$ también varía y define una función de x que se denota mediante $g(x)$.

Si f es una función positiva, entonces $g(x)$ puede interpretarse como el área bajo la gráfica de f de a a x, donde x puede variar de a a b. (Piense en g como la función "el área hasta"; véase la figura 1.)

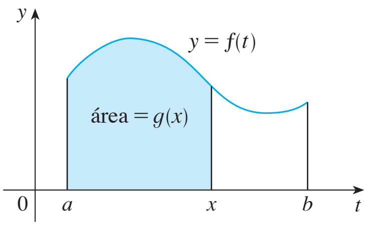


FIGURA 1

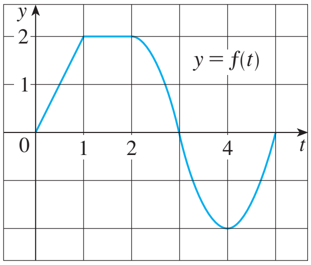


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

SOLUCIÓN En primer lugar, observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir de la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ le agregamos a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estimamos que el área bajo f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$

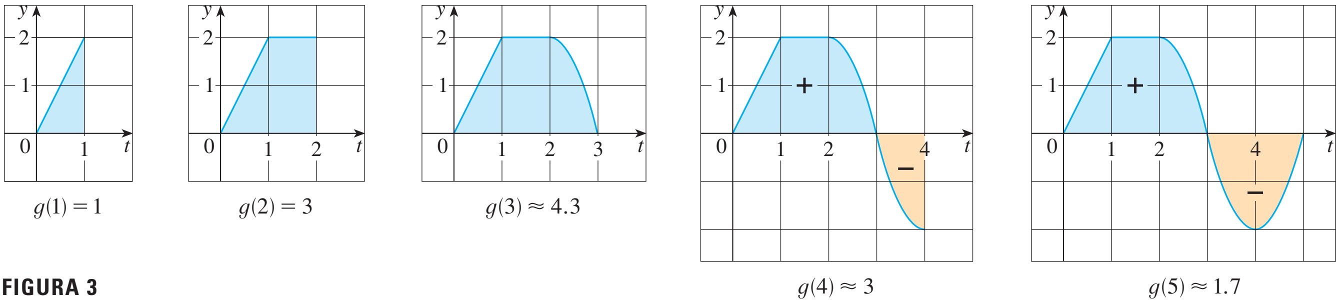


FIGURA 3

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y, por tanto, empezamos a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

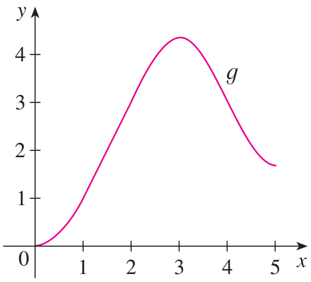


FIGURA 4

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Usamos estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Observe que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y, por tanto, g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa.

Si tomamos $f(t) = t$ y $a = 0$, entonces, aprovechando el ejercicio 27 de la sección 5.2, tenemos

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$; es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, entonces g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si trazamos la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las rectas tangentes, obtenemos una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, sospechamos que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

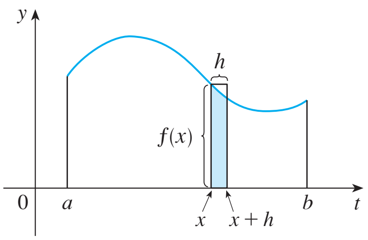


FIGURA 5

Con objeto de ver por qué en general esto puede ser verdadero, considere cualquier función continua f con $f(x) \geqslant 0$. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puede interpretarse como el área bajo la gráfica de f de a a x, como en la figura 1.

A fin de calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, en primer lugar observe que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene restando áreas; por tanto, es el área bajo la gráfica de f de x a $x + h$ (el área azul de la figura 5). Para h pequeñas, a partir de la figura puede ver que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

por eso

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

En consecuencia, por intuición, esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto sea verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

El nombre de este teorema se abrevia como TFC1: expresa que la derivada de una integral definida respecto a su límite superior es el integrando evaluado tal límite.

Teorema fundamental del cálculo, parte 1 Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$\begin{aligned} g(x + h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right) - \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{(por la propiedad 5)} \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Por ahora supongamos que $h > 0$. Puesto que f es continua sobre $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre $[x, x + h]$ (Véase la figura 6.)

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tenemos

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

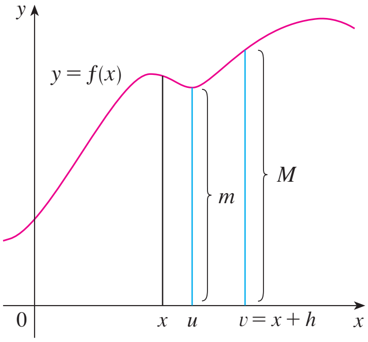


FIGURA 6

es decir,
$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Dado que $h > 0$, podemos dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Ahora, utilizamos la ecuación 2 para remplazar la parte de en medio de esta desigualdad:

3 $$f(u) \leqslant \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

TEC En Module 5.3 se proporciona evidencia visual para el TFC1.

La desigualdad 3 puede demostrarse de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. (Véase el ejercicio 71.)

Ahora sea $h \to 0$. Entonces $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por tanto,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con 3 y el teorema de la compresión concluimos que

4 $$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, entonces la ecuación 4 puede interpretarse como un límite unilateral. Entonces el teorema 2.8.4 (modificado para límites unilaterales) demuestra que g es continua sobre $[a, b]$.

De acuerdo con la notación de Leibniz para derivadas, podemos expresar al TFC1 como

5 $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

cuando f es continua. En términos generales, la ecuación 5 establece que si primero integramos f y luego derivamos el resultado, regresamos a la función original f.

V EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

EJEMPLO 3 Si bien una fórmula en la forma $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puede parecer una forma extraña de definir una función, los libros de física, química y estadística están llenos de funciones semejantes. Por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$$

recibe ese nombre en honor del físico francés Augustin Fresnel (1788-1827), que es famoso por sus trabajos en óptica. Esta función apareció por primera vez en la teoría de Fresnel de la difracción de la luz, pero a últimas fechas se ha aplicado al diseño de autopistas.

La parte 1 del teorema fundamental indica cómo derivar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \text{sen}\,(\pi x^2/2)$$

Esto significa que podemos aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (véase el ejercicio 65).

En la figura 7 se muestran las gráficas de $f(x) = \text{sen}\ (\pi x^2/2)$ y de la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Puede utilizarse una computadora para graficar S calculando el valor de esta integral para muchos valores de x. Evidentemente, parece que $S(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 hasta x [hasta que $x \approx 1.4$ cuando $S(x)$ sea una diferencia de áreas]. La figura 8 muestra una gran parte de la gráfica de S.

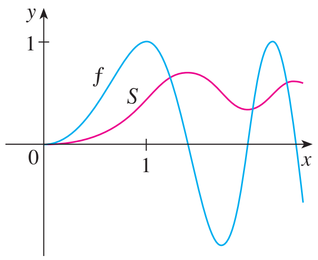


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen}\ (\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \text{sen}\ (\pi t^2/2)\,dt$

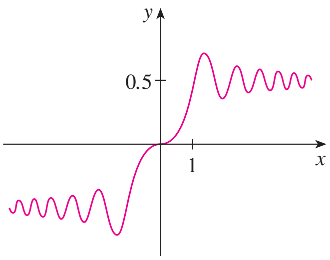


FIGURA 8
Función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \text{sen}\ (\pi t^2/2)\,dt$

Si empezamos ahora por la gráfica de S de la figura 7 y pensamos qué aspecto debe tener su derivada, parece razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$]. De modo que esto da una confirmación visual de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo.

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\,dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con el TFC1. Sea $u = x^4$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt$$

$$= \frac{d}{du}\left[\int_1^u \sec t\,dt\right]\frac{du}{dx} \qquad \text{(Por la regla de la cadena)}$$

$$= \sec u\,\frac{du}{dx} \qquad \text{(por TFC1)}$$

$$= \sec(x^4) \cdot 4x^3$$

En la sección 5.2 calculamos integrales a partir de la definición como un límite de las sumas de Riemann, y vimos que ese procedimiento es a veces largo y difícil. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, que se infiere con facilidad de la primera parte, representa un método mucho más simple para evaluar integrales.

Este teorema se abrevia mediante las siglas TFC2.

Teorema fundamental del cálculo, parte 2 Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F *es* una antiderivada de f; es decir, una función tal que $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. De acuerdo con la parte 1, sabemos que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$F(x) = g(x) + C \tag{6}$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas sobre $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, (cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$), vemos que también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hacemos $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtenemos

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, tenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

La parte 2 del teorema fundamental establece que si conocemos una antiderivada F de f, entonces podemos evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)\,dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, pueda determinarse conociendo los valores de $F(x)$ en sólo dos puntos, a y b.

Aunque el teorema sorprende a primera vista, esto es posible cuando se le interpreta en términos físicos. Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto y $s(t)$ es su posición en el tiempo t, entonces $v(t) = s'(t)$, así que s es una antiderivada de v. En la sección 5.1 se estudia un objeto que siempre se mueve en la dirección positiva y plantea una conjetura de que el área bajo la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida. Si lo expresamos mediante símbolos:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Eso es exactamente lo que el TFC2 establece en este contexto.

V EJEMPLO 5 Evalúe la integral $\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = e^x$ es continua en todo su dominio, y sabemos que una antiderivada es $F(x) = e^x$, de modo que la parte 2 del teorema fundamental da

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Compare el cálculo en el ejemplo 5 con el mucho más difícil del ejemplo 3 de la sección 5.2

Observe que el TFC2 establece que podemos utilizar *cualquier* antiderivada F de f. De este modo podríamos usar la más sencilla, a saber $F(x) = e^x$, en lugar de $e^x + 7$ o de $e^x + C$.

A menudo se recurre a la notación

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Así que la ecuación del TFC2 puede expresarse como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{donde} \qquad F' = f$$

Otras notaciones comunes son $F(x)\big|_a^b$ y $[F(x)]_a^b$.

EJEMPLO 6 Determine el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1.

SOLUCIÓN Una antiderivada de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. El área requerida A se calcula aplicando la parte 2 del teorema fundamental:

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Al aplicar el teorema fundamental se usa una antiderivada particular F de f. No es necesario usar la antiderivada más general.

Si comparamos el cálculo del ejemplo 6 con el del ejemplo 2 de la sección 5.1, veremos que el teorema fundamental proporciona un método *mucho* más corto.

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUCIÓN La integral dada es una forma abreviada de

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln|x|$ y, dado que $3 \leqslant x \leqslant 6$, podemos escribir $F(x) = \ln x$. De tal manera que

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno desde 0 hasta b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$, tenemos

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

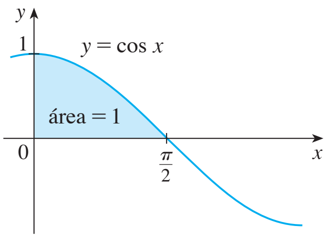


FIGURA 9

En particular, al hacer $b = \pi/2$, hemos comprobado que el área bajo la curva coseno desde 0 hasta $\pi/2$ es sen $(\pi/2) = 1$. (Véase la figura 9.)

Cuando el matemático francés Gilles de Roberval calculó por vez primera el área bajo las curvas seno y coseno en 1635, era una empresa que requería aplicar todo el ingenio del que fuera uno capaz. Si no tuviera la ventaja del teorema fundamental tendría que calcular un difícil límite de sumas mediante oscuras identidades trigonométricas (o bien, un sistema algebraico computarizado como el de ejercicio 29 de la sección 5.1). Fue mucho más difícil para Roberval puesto que el artificio de los límites no se había inventado aún en 1635. Pero ya después de los años de 1660-1670, cuando Barrow descubrió el teorema fundamental, y Newton y Leibniz lo explotaron, este problema se volvió muy fácil como puede verse en el ejemplo 8.

EJEMPLO 9 ¿Cuál es el error en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, ya que $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ y la propiedad 6 de las integrales establece que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica a funciones continuas. En este caso no puede aplicarse porque $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. De hecho, f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, de modo que

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{no existe}$$

La derivación y la integración como procesos inversos

Esta sección finaliza conjuntando las dos partes del teorema fundamental.

Teorema fundamental del cálculo Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f; es decir, $F' = f$.

La parte 1 puede reescribirse como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

en la cual se afirma que si integra f y, a continuación deriva el resultado, regresa a la función original f. Puesto que $F'(x) = f(x)$, la parte 2 puede rescribirse así

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En esta versión se afirma que si toma una función F, la derivamos y luego integramos el resultado, regresamos a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana.

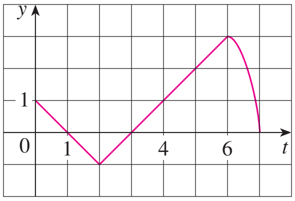
Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en los próximos capítulos veremos que estos retadores problemas son accesibles para todos.

5.3 Ejercicios

1. Explique con exactitud qué se quiere decir con la proposición de que "la derivación y la integración son procesos inversos".

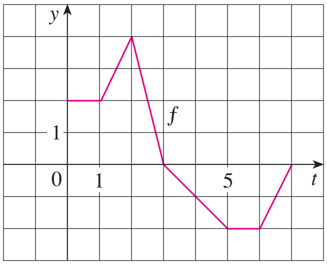
2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
b) Estime $g(7)$.
c) ¿Dónde g tiene un valor máximo? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
d) Trace una gráfica aproximada de g.



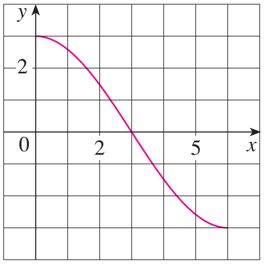
3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

a) Evalúe $g(0)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
b) ¿Sobre qué intervalo es creciente g?
c) ¿Dónde g tiene un valor máximo?
d) Trace una gráfica aproximada de g.



4. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

a) Evalúe $g(0)$ y $g(6)$.
b) Estime $g(x)$, para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5.
c) ¿Sobre qué intervalo es creciente g?
d) ¿Dónde g tiene un valor máximo?
e) Trace una gráfica aproximada de g.
f) Utilice la gráfica del inciso e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.



5-6 Trace el área representada por $g(x)$. A continuación halle $g'(x)$ de dos maneras: a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y b) evaluando la integral utilizando la parte 2 y después derivando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (2 + \operatorname{sen} t)\,dt$

7-18 Use la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

7. $g(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t^3 + 1}\,dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\,dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\,dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\,dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$\left[\textit{Sugerencia:} \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt$

14. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \dfrac{z^2}{z^4 + 1}\,dz$

15. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

16. $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\,d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^1 \dfrac{u^3}{1 + u^2}\,du$

18. $y = \int_{\operatorname{sen} x}^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt$

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

19-44 Evalúe cada una de las siguientes integrales.

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

20. $\int_{-1}^{1} x^{100}\, dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\, dt$

22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx$

24. $\int_{1}^{8} x^{-2/3}\, dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \operatorname{sen} \theta\, d\theta$

26. $\int_{-5}^{5} e\, dx$

27. $\int_{0}^{1} (u + 2)(u - 3)\, du$

28. $\int_{0}^{4} (4 - t)\sqrt{t}\, dt$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\, dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec \theta \tan \theta\, d\theta$

33. $\int_{1}^{2} (1 + 2y)^2\, dy$

34. $\int_{0}^{3} (2 \operatorname{sen} x - e^x)\, dx$

35. $\int_{1}^{2} \frac{v^3 + 3v^6}{v^4}\, dv$

36. $\int_{1}^{18} \sqrt{\frac{3}{z}}\, dz$

37. $\int_{0}^{1} (x^e + e^x)\, dx$

38. $\int_{0}^{1} \cosh t\, dt$

39. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{8}{1 + x^2}\, dx$

40. $\int_{1}^{2} \frac{4 + u^2}{u^3}\, du$

41. $\int_{-1}^{1} e^{u+1}\, du$

42. $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

43. $\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx \quad$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

44. $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx \quad$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

45-48 ¿Qué es lo incorrecto en cada una de las siguientes ecuaciones?

45. $\int_{-2}^{1} x^{-4}\, dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

46. $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}\, dx = \left.-\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

47. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec \theta \tan \theta\, d\theta = \sec \theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

48. $\int_{0}^{\pi} \sec^2 x\, dx = \tan x\Big]_{0}^{\pi} = 0$

49-52 Utilice una gráfica para dar una burda estimación del área de la región que está bajo la curva dada. Después, encuentre el área exacta.

49. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

50. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

51. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

52. $y = \sec^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

53-54 Evalúe la integral e interprétela como una diferencia de áreas. Ilustre mediante un dibujo.

53. $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$

54. $\int_{\pi/6}^{2\pi} \cos x\, dx$

55-59 Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones:

55. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\, du$

$$\left[\textit{Sugerencia}: \int_{2x}^{3x} f(u)\, du = \int_{2x}^{0} f(u)\, du + \int_{0}^{3x} f(u)\, du\right]$$

56. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \operatorname{sen} t\, dt$

57. $F(x) = \int_{x}^{x^2} e^{t^2}\, dt$

58. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\, dt$

59. $y = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \ln (1 + 2v)\, dv$

60. Si $f(x) = \int_0^x (1 - t^2)e^{t^2}\, dt$, ¿sobre qué intervalos es creciente f?

61. ¿Sobre qué intervalo la curva

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2}\, dt$$

es cóncava hacia abajo?

62. Si $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\, dt$ y $g(y) = \int_3^y f(x)\, dx$, encuentre $g''(\pi/6)$.

63. Si $f(1) = 12$, f' es continua y $\int_1^4 f'(x)\, dx = 17$, ¿cual es el valor de $f(4)$?

64. La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.

a) Demuestre que $\int_a^b e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

65. La función S de Fresnel se definió en el ejemplo 3, y en las figuras 7 y 8 se trazaron sus gráficas.

a) ¿Sobre qué valores de x tiene valores máximos locales esta función?

b) ¿Sobre qué intervalos esta función es cóncava hacia arriba?

SAC c) Utilice una gráfica para resolver la siguiente ecuación correcta hasta dos cifras decimales.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt = 0.2$$

SAC **66.** La **función integral sinusoidal**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

es importante en la ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero sabemos que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que definimos $f(0) = 1$, y esto convierte a f en una función continua en todo su dominio].

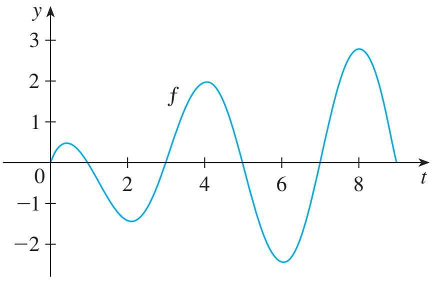
a) Dibuje la gráfica de Si.
b) ¿Sobre qué valores de x tiene esta función valores máximos locales?
c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.
d) ¿Tiene asíntotas horizontales esta función?
e) Resuelva la siguiente ecuación correcta hasta una cifra decimal.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

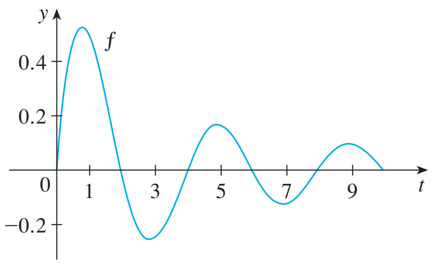
67-68 Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

a) ¿Sobre qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?
b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?
c) ¿Sobre qué intervalos es cóncava hacia abajo g?
d) Trace la gráfica de g.

67.



68.



69-70 Evalúe el límite reconociéndolo primero como una suma de Riemann para una función definida sobre [0, 1].

69. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

70. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

71. Justifique [3] para el caso $h < 0$.

72. Si f es continua y g y h son funciones derivables, determine una fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$$

73. a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx \leqslant 1.25$.

74. a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

b) Deduzca que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\, dx \geqslant \frac{1}{2}$.

75. Demuestre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\, dx \leqslant 0.1$$

comparando el integrando con una función más simple.

76. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

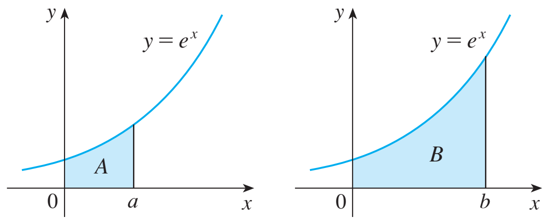
y $$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la correspondiente a $f(x)$.
b) Trace las gráficas de f y g.
c) ¿Dónde es f derivable? ¿Dónde es g derivable?

77. Halle una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para toda } x > 0$$

78. El área B es tres veces el área A. Exprese b en términos de a.



79. Una compañía manufacturera tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a una tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Ya que cada vez que la máquina se somete a una reparación se incurre en un costo fijo, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones.

a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\,ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación.

b) Sea $C = C(t)$ dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

¿Qué representa C y por que desearía la compañía minimizar C?

c) Demuestre que C tiene un valor mínimo en los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

80. Una compañía de alta tecnología compra un nuevo sistema de cómputo cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará a una tasa $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento a razón de $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.

a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.

b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y $$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0$$

Determine la duración del tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ equivalga al valor inicial V.

c) Determine el valor mínimo absoluto de C sobre $[0, T]$.

d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado del inciso a) en este caso.

5.4 Integrales indefinidas y el teorema del cambio neto

Ya vimos en la sección 5.3 que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si suponemos que puede encontrarse una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, replanteamos el TFC2, de una manera que facilita más la aplicación a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

Integrales indefinidas

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que si f es continua, entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ puede determinarse evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Necesitamos una conveniente notación para las antiderivadas que nos facilite el trabajo con ellas. Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas y las integrales, por tradición se usa la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada de f y se llama **integral indefinida**. Así,

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{significa que} \quad F'(x) = f(x)$$

Por ejemplo, podemos escribir

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De este modo, consideramos la integral indefinida como la representante de toda una *familia* de funciones (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Distinga con cuidado entre las integrales definidas y las indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, mientras que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o una familia de funciones). La relación entre ellas la proporciona la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con una lista de antiderivadas de funciones. Por tanto, se presenta de nuevo la tabla de fórmulas de antiderivación de la sección 4.9, más otras cuantas, en la notación de las integrales indefinidas. Cualquiera de las fórmulas puede comprobarse al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

1 Tabla de integrales indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

De acuerdo con el teorema 4.9.1, la antiderivada más general *sobre un intervalo dado* se obtiene por la adición de una constante a una antiderivada particular. **Adoptamos la convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general, es válida sólo sobre un intervalo**. Así, escribimos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

con el entendido de que es válida sobre el intervalo $(0, \infty)$ o sobre el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se cumple a pesar del hecho de que la antiderivada general de la función $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, es

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1 Encuentre la integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

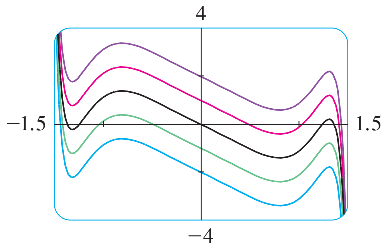


FIGURA 1

En la figura 1 se tiene la gráfica de la integral indefinida del ejemplo 1 para varios valores de C. Aquí, el valor de C es la intersección con el eje y.

SOLUCIÓN Si usamos nuestra convención y la tabla 1, tenemos

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$$

$$= 10\,\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C$$

$$= 2x^5 - 2\tan x + C$$

Le conviene comprobar esta respuesta derivándola.

V EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUCIÓN Esta integral indefinida no es inmediata utilizando la tabla 1, por lo que debemos aplicar las identidades trigonométricas para rescribir la función antes de integrar:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$

$$= \int \csc\theta\cot\theta\,d\theta = -\csc\theta + C$$

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Al aplicar el TFC2 y la tabla 1, tenemos

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\Bigg]_0^3$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$

$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75$$

Compare este cálculo con el del ejemplo 2b) de la sección 5.2.

V EJEMPLO 4 Determine $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$ e interprete el resultado en términos de áreas.

La figura 2 es la gráfica del integrando del ejemplo 4. Sabemos por la sección 5.2 que el valor de la integral se puede interpretar como un área neta: la suma de las áreas marcadas con un signo de más menos el área marcada con un signo menos.

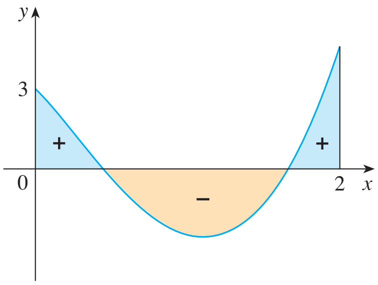


FIGURA 2

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x \Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0$$

$$= -4 + 3\tan^{-1}2$$

Éste es el valor exacto de la integral. Si desea una aproximación decimal, utilice una calculadora para obtener un valor aproximado de $\tan^{-1} 2$. Al hacerlo obtenemos

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx \approx -0.67855$$

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN En primer lugar, necesitamos escribir el integrando en una forma más sencilla, llevando a cabo la división:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\, dt$$

$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9$$

$$= \left(2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3} \cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$

$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

Aplicaciones

La parte 2 del teorema fundamental establece que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F' = f$, de forma que puede volver a escribirse la ecuación como

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa la razón de cambio de $y = F(x)$ respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio en y cuando x cambia de a hacia b. [Observe que y podría, por ejemplo, incrementarse y luego decrecer para volver a incrementarse. Si bien y podría cambiar en ambas direcciones, $F(b) - F(a)$ representa el cambio *neto* en y]. De manera que podemos reformular verbalmente el TFC2 en los términos siguientes:

Teorema del cambio neto La integral de una razón de cambio es el cambio neto:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este principio puede aplicarse a todas las razones de cambio en las ciencias naturales y sociales que se discutieron en la sección 3.7. Enseguida se dan unos cuantos ejemplos de esta idea:

- Si $V(t)$ es el volumen de agua en un depósito, en el instante t, entonces su derivada $V'(t)$ es la razón a la cual fluye el agua hacia el depósito, en el instante t. Por eso,

  $$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

  es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.
- Si $[C](t)$ es la concentración del producto de una reacción química en el instante t, entonces la rapidez de reacción es la derivada $d[C]/dt$. De tal manera,

  $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

  es el cambio en la concentración de C, desde el instante t_1 al instante t_2.
- Si la masa de una varilla, medida desde el extremo izquierdo hasta un punto x, es $m(x)$, entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Por consiguiente,

  $$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

  es la masa del segmento de la varilla entre $x = a$ y $x = b$.
- Si la rapidez de crecimiento de una población es dn/dt, entonces

  $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

  es el cambio neto en la población durante el periodo de tiempo desde t_1 hasta t_2. (La población aumenta cuando ocurren nacimientos y disminuye cuando tienen lugar algunas muertes. El cambio neto toma en cuenta tanto nacimientos como decesos.)
- Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada $C'(x)$. De esa manera

  $$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

  es el incremento en el costo cuando la producción aumenta de x_1 unidades hasta x_2 unidades.
- Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con función posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$, de modo que

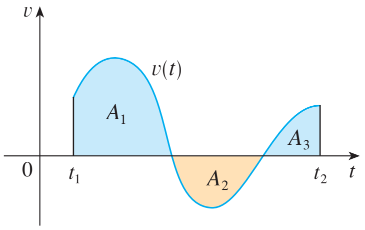
  2 $$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

  es el cambio neto de la posición, o *desplazamiento*, de la partícula durante el periodo de tiempo desde t_1 hasta t_2. En la sección 5.1 se infirió que esto era verdadero para el caso en que el objeto se mueve en la dirección positiva, pero ahora hemos demostrado que siempre es verdadero.

- Si queremos calcular la distancia recorrida durante el intervalo, tenemos que considerar los intervalos cuando $v(t) \geqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la derecha) y también los intervalos cuando $v(t) \leqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la izquierda). En ambos casos la distancia se calcula al integrar $|v(t)|$, la rapidez. Por consiguiente,

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \text{distancia total recorrida}$$

En la figura 3 se muestra cómo interpretar el desplazamiento y la distancia recorrida en términos de las áreas bajo una curva de velocidad.



$$\text{desplazamiento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{distancia} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = A_1 + A_2 + A_3$$

FIGURA 3

- La aceleración del objeto es $a(t) = v'(t)$, así que

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt = v(t_2) - v(t_1)$$

es el cambio en la velocidad, desde el instante t_1 hasta el instante t_2.

V EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).
a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el periodo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
b) Halle la distancia recorrida durante este periodo de tiempo.

SOLUCIÓN
a) Por la ecuación 2, el desplazamiento es

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\, dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Esto significa que la partícula se desplaza 4.5 m hacia la izquierda.

b) Observe que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t + 3)(t - 2)$ y, por eso, $v(t) \leqslant 0$ sobre el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ sobre $[3, 4]$. Así que, a partir de la ecuación 3, la distancia recorrida es

Para integrar el valor absoluto de $v(t)$, use la propiedad 5 de las integrales de la sección 5.2 para dividir la integral en dos partes, una donde $v(t) \leqslant 0$ y otra donde $v(t) \geqslant 0$.

$$\int_1^4 |v(t)|\, dt = \int_1^3 [-v(t)]\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\, dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\, dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10.17\,\text{m}$$

EJEMPLO 7 En la figura 4 se muestra el consumo de energía eléctrica (potencia) en la ciudad de San Francisco un día del mes de septiembre (P se mide en megavatios y t en horas, a partir de la medianoche). Estime la energía que se utilizó ese día.

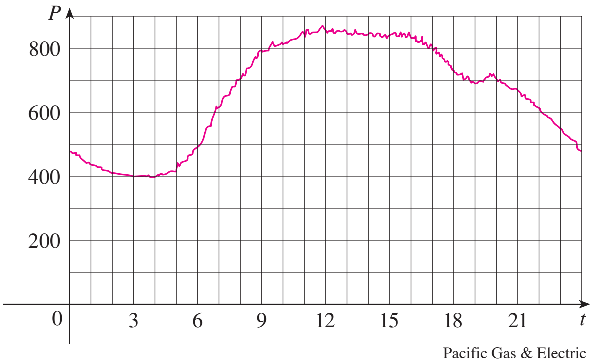


FIGURA 4

SOLUCIÓN La potencia es la razón de cambio de la energía: $P(t) = E'(t)$. De modo que, por el teorema del cambio neto,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía que se usó ese día. Haga una aproximación de la integral con la regla del punto medio con 12 subintervalos y $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t\\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850\\ &\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)\\ &= 15\,840\end{aligned}$$

La energía usada fue de unos 15 840 megavatio-horas.

Una nota acerca de unidades

¿Cómo sabe qué unidades usar para la energía en el ejemplo 7? La integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ se define como el límite de las sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Ahora bien, $P(t_i^*)$ se mide en megavatios y Δt en horas, de modo que su producto se mide en megavatios-horas. Lo mismo es verdadero para el límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.4 Ejercicios

1-4 Verifique mediante derivación que cada una de las siguientes fórmulas es correcta.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a+bx} + C$

5-18 Obtenga las siguientes integrales indefinidas generales.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})\,dx$

6. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right)dx$

7. $\int \left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x - 2\right) dx$

8. $\int (y^3 + 1.8y^2 - 2.4y)\, dy$

9. $\int (u + 4)(2u + 1)\, du$

10. $\int v(v^2 + 2)^2\, dv$

11. $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\, dx$

12. $\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$

13. $\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x)\, dx$

14. $\int (\csc^2 t - 2e^t)\, dt$

15. $\int (\theta - \csc\theta \cot\theta)\, d\theta$

16. $\int \sec t\,(\sec t + \tan t)\, dt$

17. $\int (1 + \tan^2 \alpha)\, d\alpha$

18. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

19-20 Determine la integral indefinida general. Ilustre mediante una gráfica varios miembros de la familia en la misma pantalla.

19. $\int \left(\cos x + \frac{1}{2}x\right) dx$

20. $\int (e^x - 2x^2)\, dx$

21-46 Evalúe cada una de las siguientes integrales.

21. $\int_{-2}^{3} (x^2 - 3)\, dx$

22. $\int_{1}^{2} (4x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$

23. $\int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}t^3 - t\right) dt$

24. $\int_{0}^{3} (1 + 6w^2 - 10w^4)\, dw$

25. $\int_{0}^{2} (2x - 3)(4x^2 + 1)\, dx$

26. $\int_{-1}^{1} t(1 - t)^2\, dt$

27. $\int_{0}^{\pi} (5e^x + 3 \operatorname{sen} x)\, dx$

28. $\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$

29. $\int_{1}^{4} \left(\frac{4 + 6u}{\sqrt{u}}\right) du$

30. $\int_{0}^{4} (3\sqrt{t} - 2e^t)\, dt$

31. $\int_{0}^{1} x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$

32. $\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{y} - y}{y^2}\, dy$

33. $\int_{1}^{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx$

34. $\int_{0}^{1} (5x - 5^x)\, dx$

35. $\int_{0}^{1} (x^{10} + 10^x)\, dx$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \csc^2\theta\, d\theta$

37. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

38. $\int_{0}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \tan^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

39. $\int_{1}^{64} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

40. $\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\operatorname{senh} x + \cosh x}\, dx$

41. $\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}$

42. $\int_{1}^{2} \frac{(x - 1)^3}{x^2}\, dx$

43. $\int_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\, dt$

44. $\int_{0}^{2} |2x - 1|\, dx$

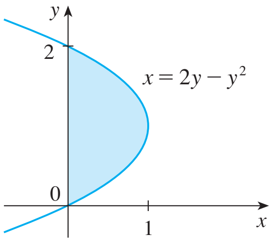
45. $\int_{-1}^{2} (x - 2|x|)\, dx$

46. $\int_{0}^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx$

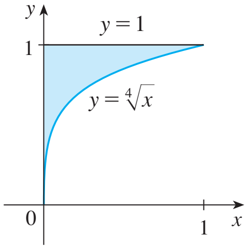
47. Use una gráfica para estimar las intersecciones con el eje x de la curva $y = 1 - 2x - 5x^4$. Luego utilice esta información para estimar el área de la región que se encuentra bajo la curva y arriba del eje x.

48. Repita el ejercicio 47 para la curva $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$.

49. El área de la región que se encuentra a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (el área sombreada de la figura) se expresa con la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$. (Gire su cabeza en sentido de las manecillas del reloj y considere a la región que se encuentra bajo la curva $x = 2y - y^2$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$.) Encuentre el área de la región.



50. Las fronteras de la región sombreada son el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encuentre el área de esta región escribiendo x como función de y e integrando respecto a esta última (como en el ejercicio 49).



51. Si $w'(t)$ es la rapidez de crecimiento de un niño en libras por año, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t)\, dt$?

52. La corriente en un alambre se define como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Véase el ejemplo 3 de la sección 3.7.) ¿Qué representa $\int_a^b I(t)\, dt$?

53. Si se fuga aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ galones por minuto en el instante t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\, dt$?

54. Una población de abejas se inicia con 100 ejemplares y se incrementa a razón de $n'(t)$ abejas por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt$?

55. En la sección 4.7 se definió la función ingreso marginal $R'(x)$ como la derivada de la función ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Qué representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Si $f(x)$ es la pendiente de un sendero a una distancia de x millas del principio del mismo, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\,dx$?

57. ¿Si x se mide en metros y $f(x)$ en newtons, ¿cuáles son las unidades para $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Si las unidades para x son pies y las unidades para $a(x)$ son libras por pie, ¿cuáles son las unidades para da/dx? ¿Qué unidades tiene $\int_2^8 a(x)\,dx$?

59-60 Se da la función velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre a) el desplazamiento, y b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado.

59. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

60. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

61-62 Se da la función aceleración (en m/s^2) y la velocidad inicial para una partícula que se desplaza a lo largo de una recta. Encuentre a) la velocidad en el instante t y b) la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

---

63. Se da la densidad lineal de una varilla de longitud 4 m mediante $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa total de esta última.

64. Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua con una rapidez de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.

65. La velocidad de un automóvil se leyó en su velocímetro a intervalos de 10 segundos y se registró en una tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia recorrida por el vehículo.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

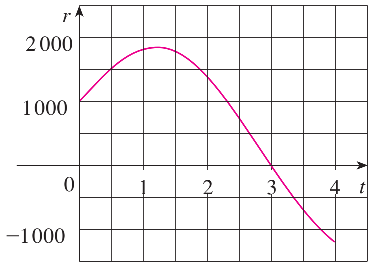
66. Suponga que un volcán hace erupción y en la tabla se proporcionan las lecturas de la cantidad a la que se expelen materiales sólidos hacia la atmósfera. El tiempo t se mide en segundos y las unidades para $r(t)$ son toneladas métricas por segundo.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

a) Dé estimaciones superiores e inferiores para la cantidad $Q(6)$ de materiales expelidos una vez que transcurren seis segundos.
b) Use la regla del punto medio para estimar $Q(6)$.

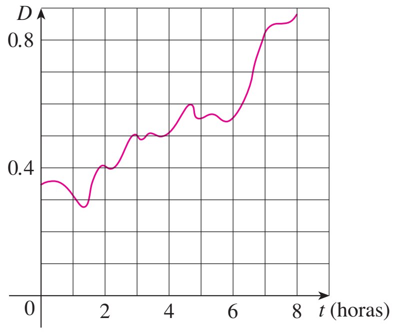
67. El costo marginal de fabricar x yardas de cierta tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (en dólares por yarda). Encuentre el incremento en el costo si el nivel de producción aumenta de 2 000 a 4 000 yardas.

68. Fluye agua hacia adentro y afuera de un tanque de almacenamiento. Se muestra una gráfica de la razón de cambio $r(t)$ del volumen de agua que hay en el tanque, en litros por día. Si la cantidad de agua que contiene el tanque en el instante $t = 0$ es 25 000 L, use la regla del punto medio para estimar la cantidad de agua cuatro días después.

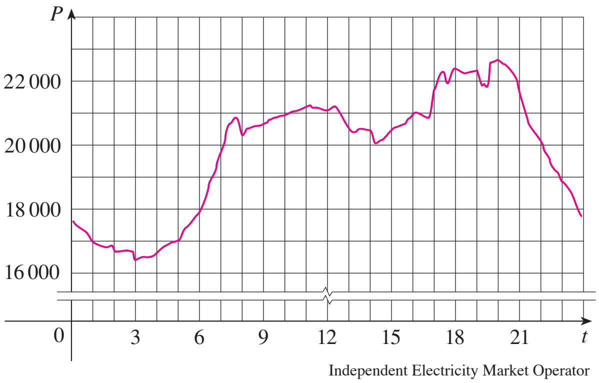


69. Una población de bacterias es de 4 000 en el tiempo $t = 0$ y su rapidez de crecimiento es $1000 \cdot 2^t$ bacterias por hora después de t horas ¿Cuál es la población después de una hora?

70. La siguiente figura muestra la gráfica del tráfico sobre un proveedor de servicios internet en línea de datos T1 desde la medianoche hasta las 8:00. D corresponde a los datos transmitidos, medidos en megabits por segundo. Utilice la regla del punto medio para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese periodo de tiempo.



71. En la gráfica se muestra el consumo de energía en la provincia de Ontario, Canadá, para el 9 de diciembre de 2004 (P se mide en megavatios; t se mide en horas, comenzando a medianoche). Usando el hecho de que la potencia es la rapidez de cambio de la energía, estime la energía utilizada en ese día.



Independent Electricity Market Operator

72. El 7 de mayo de 1992 el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de tercer grado.

b) Use el modelo del inciso a) para estimar la altura alcanzada por el *Endeavour*, 125 segundos después del despegue.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Válvula de estrangulación a 89%	20	447
Válvula de estrangulación a 67%	32	742
Válvula de estrangulación a 104%	59	1 325
Presión dinámica máxima	62	1 445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4 151

REDACCIÓN DE PROYECTO — NEWTON, LEIBNIZ Y LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO

Los inventores del Cálculo fueron *sir* Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero las ideas básicas detrás de la integración fueron investigadas hace 2 500 años por los antiguos griegos, como Eudoxo y Arquímedes, y Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow, (1630-1677) y otros fueron los pioneros en hallar rectas tangentes. Barrow, el profesor de Newton en Cambridge, fue el primero en comprender la relación inversa entre la derivación y la integración. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación, en la forma del teorema fundamental del cálculo, para convertir este último en una sistemática disciplina matemática. En este sentido es que se da a Newton y Leibniz el crédito por la invención del Cálculo.

Lea acerca de las colaboraciones de estos hombres en una o más de las referencias que se proporcionan en la bibliografía y escriba un informe sobre uno de los tres temas siguientes. Puede incluir detalles biográficos, pero el reporte debe concentrarse en una descripción, en cierto detalle, de los métodos y notaciones. En particular, consulte uno de los libros fuente, en los cuales se dan extractos de las publicaciones originales de Newton y Leibniz, traducidas del latín al inglés.

- El papel de Newton en el desarrollo del Cálculo.
- El papel de Leibniz en el desarrollo del Cálculo.
- La controversia entre los seguidores de Newton y los de Leibniz sobre la prioridad en la invención del cálculo.

Bibliografía

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics*, Nueva York: John Wiley, 1987, capítulo 19.

2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nueva York: Dover, 1959, capítulo V.

3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, capítulos 8 y 9.

4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed., Nueva York: Saunders, 1990, capítulo 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York: Scribner′s, 1974. Véase el artículo sobre Leibniz escrito por Joseph Hofmann, en el volumen VIII, y el artículo sobre Newton escrito por I. B. Cohen, en el volumen X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: Harper-Coffins, 1993, capítulo 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 17.

Libros fuente

1. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987 capítulos 12 y 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, Londres, MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, *1200-1800*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969; capítulo V.

5.5 Regla de sustitución

Debido a la existencia del teorema fundamental, es importante disponer de técnicas para hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no indican cómo evaluar integrales como

1 $$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

RP Para hallar esta integral, usaremos la estrategia para la resolución de problemas de *introducir algo adicional*. En este caso, el "algo adicional" es una nueva variable; cambiemos de una variable x a una variable u. Supongamos que hace que u sea el radicando de la integral en **1**, $u = 1 + x^2$. Entonces la diferencial de u es $du = 2x\, dx$. Observe que si la dx en la notación para una integral se interpretara como una diferencial, entonces en **1** debe tenerse la diferencial $2x\, dx$ y, por consiguiente, desde un punto de vista formal y sin justificar este cálculo, podríamos escribir

En la sección 3.10 se definieron las diferenciales. Si $u = f(x)$, entonces

$$du = f'(x)\, dx$$

2 $$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, 2x\, dx = \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

Pero ahora podemos verificar que tenemos la respuesta correcta aplicando la regla de la cadena para derivar la función final de la ecuación 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

En general, este método funciona siempre que se tiene una integral que pueda escribirse en la forma $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$. Observe que si $F' = f$, entonces

3 $$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\,g'(x)$$

Si hacemos el "cambio de variable" o la "sustitución" $u = g(x)$, entonces, a partir de la ecuación 3, tenemos

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o bien, si se escribe $F' = f$ se obtiene

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Por tanto, hemos probado la siguiente regla:

4 Regla de sustitución Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Note que la regla de sustitución para la integración se probó aplicando la regla de la cadena para la derivación. Asimismo, observe que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de 4 como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución establece: **es permitido operar con dx y du después de los signos de integral como si fueran diferenciales**.

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ y la regla de sustitución, tenemos

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

Compruebe derivando la respuesta.

Note que en la etapa final tuvimos que regresar a la variable original x.

La idea detrás de la regla de sustitución es remplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que sea función de x. Así, en el ejemplo 1 reemplazamos la integral $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$ con la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

El reto principal en la aplicación de la regla de sustitución es pensar en una sustitución apropiada. Procure elegir u como alguna función en el integrando cuya diferencial también esté presente (excepto para un factor constante). Este fue el caso en el ejemplo 1. Si no es posible, escoja u como alguna parte complicada del integrando (tal vez la función interna de una función compuesta). Encontrar la sustitución correcta conlleva algo de arte. No es raro que la conjetura sea errónea si su primer supuesto no funciona, intente con otro.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \sqrt{2x+1}\, dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Entonces $du = 2\, dx$, de modo que $dx = \frac{1}{2}\, du$. De esta forma, la regla de sustitución da

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2} \int u^{1/2}\, du$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3} u^{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

SOLUCIÓN 2 Otra posible sustitución es $u = \sqrt{2x+1}$. Entonces

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{así que} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\, du = u\, du$$

(O bien, observe que $u^2 = 2x + 1$, de manera que $2u\, du = 2\, dx$. Por tanto,

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int u \cdot u\, du = \int u^2\, du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

V **EJEMPLO 3** Encuentre $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Entonces $du = -8x\, dx$, de manera que $x\, dx = -\frac{1}{8}\, du$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = -\tfrac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = -\tfrac{1}{8} \int u^{-1/2}\, du$$
$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

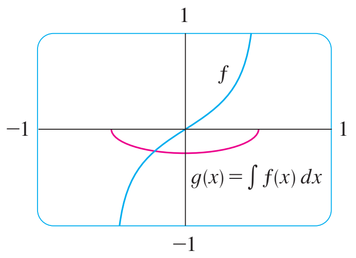


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\, dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

La respuesta para el ejemplo 3 puede comprobarse por derivación; pero, en lugar de ello, hágalo de manera visual con una gráfica. En la figura 1 se usó una computadora para trazar las gráficas del integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ y de su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (tomando el caso $C = 0$). Note que $g(x)$ decrece cuando $f(x)$ es negativa, crece cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De modo que parece razonable, a partir de la evidencia gráfica, que g sea una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\, dx$.

SOLUCIÓN Si hacemos $u = 5x$, entonces $du = 5\, dx$, de modo que $dx = \frac{1}{5}\, du$. Por tanto,

$$\int e^{5x}\, dx = \tfrac{1}{5} \int e^u\, du = \tfrac{1}{5} e^u + C = \tfrac{1}{5} e^{5x} + C$$

NOTA Con cierta experiencia, podríamos evaluar integrales como los ejemplos 1-4 sin pasar por la molestia de hacer una sustitución explícita. Reconociendo el patrón en la ecuación 3, donde el integrando en el lado izquierdo es el producto de la derivada de una función externa y la derivada de la función interna, podríamos trabajar

el ejemplo 1 como sigue:

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx = \int \cos(x^4 + 2) \cdot x^3\, dx = \tfrac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2) \cdot (4x^3)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^4 + 2)\, dx = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C$$

Del mismo modo, la solución para el ejemplo 4 podría expresarse como:

$$\int e^{5x}\, dx = \tfrac{1}{5}\int 5e^{5x}\, dx = \tfrac{1}{5}\int \frac{d}{dx}(e^{5x})\, dx = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

El siguiente ejemplo, sin embargo, es más complicado y es aconsejable una sustitución explícita.

EJEMPLO 5 Obtenga $\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx$.

SOLUCIÓN Una sustitución apropiada es más evidente si factorizamos x^5 como $x^4 \cdot x$. Sea $u = 1 + x^2$. Entonces $du = 2x\, dx$, de manera que $x\, dx = \tfrac{1}{2}\, du$. También $x^2 = u - 1$, así que $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, x^4 \cdot x\, dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u - 1)^2 \cdot \tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$$

V EJEMPLO 6 Obtenga $\int \tan x\, dx$.

SOLUCIÓN En primer lugar, escribimos la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Esto sugiere que debemos sustituir $u = \cos x$, ya que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y, como consecuencia, $\operatorname{sen} x\, dx = -du$:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Puesto que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, el resultado del ejemplo 6 también puede escribirse como

5 $$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$$

Integrales definidas

Cuando se evalúa una integral *definida* por sustitución, pueden aplicarse dos métodos. Uno consiste en evaluar primero la integral indefinida y, enseguida, aplicar el teorema fundamental. Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, se tiene

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4$$

$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2}$$

$$= \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

En esta regla se afirma que, cuando se usa una sustitución en una integral definida, debe poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx, sino también los límites de integración. Los nuevos límites de integración son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

6 Regla de sustitución para integrales definidas Si g' es continua sobre $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. Entonces, por 3, $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, de modo que, de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental, tenemos

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica el TFC2 una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando 6.

SOLUCIÓN Si usamos la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = \frac{1}{2}\,du$. Para encontrar los nuevos límites de integración, notamos que

cuando $x = 0$, $u = 2(0) + 1 = 1$ y cuando $x = 4$, $u = 2(4) + 1 = 9$

Por tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que al usar 6 *no* se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evaluamos la expresión en u en los valores apropiados de u.

La integral dada en el ejemplo 8 es una abreviación para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. Entonces $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -\frac{1}{5}\,du$. Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Así que

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\bigg]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

Puesto que la función $f(x) = (\ln x)/x$ en el ejemplo 9 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada en la figura 2.

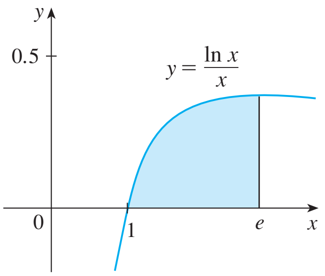


FIGURA 2

V EJEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \ln x$ porque su diferencial $du = dx/x$ se presenta en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. De modo que

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Simetría

En el teorema siguiente se usa la regla de sustitución para las integrales definidas, 6, a fin de simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

> **7 Integrales de funciones simétricas** Suponga que f es continua sobre $[-a, a]$
>
> a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
>
> b) Si f es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN Separemos la integral en dos:

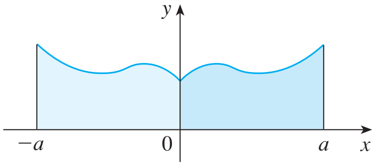
8 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha hacemos la sustitución $u = -x$. Entonces $du = -dx$, y cuando $x = -a$, $u = a$. Por consiguiente,

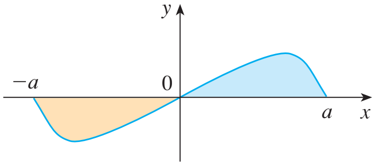
$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)\,(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

con lo que la ecuación 8 resulta

9 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$



a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 3

a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$, así que la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$, por lo que la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

La figura 3 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, en el inciso a) se hace ver que el área bajo $y = f(x)$ desde $x = -a$ hasta $x = a$ es el doble del área desde $x = 0$ hasta $x = a$, debido a la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ puede expresarse como el área arriba del eje x y bajo $y = f(x)$ menos el área bajo el eje x y arriba de la curva. Por esto, en el inciso b) se evidencia que el área es 0 porque las áreas se cancelan.

V EJEMPLO 10 Dado que $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y, por consiguiente,

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\Big[\tfrac{1}{7}x^7 + x\Big]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

EJEMPLO 11 Dado que $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y, entonces,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

5.5 Ejercicios

1-6 Evalúe cada una de las siguientes integrales efectuando la sustitución dada.

1. $\int e^{-x}\,dx,\quad u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx,\quad u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx,\quad u = x^3 + 1$

4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4},\quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta,\quad u = \cos\theta$

6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx,\quad u = 1/x$

7-48 Evalúe cada una de las siguientes integrales indefinidas

7. $\int x\,\operatorname{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

9. $\int (1 - 2x)^9\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int u\sqrt{1 - u^2}\,du$

15. $\int \operatorname{sen}\pi t\,dt$

16. $\int e^x\cos(e^x)\,dx$

17. $\int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2}\,du$

18. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

20. $\int \frac{z^2}{z^3 + 1}\,dz$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

22. $\int \cos^4\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

23. $\int \sec^2\theta\,\tan^3\theta\,d\theta$

24. $\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

25. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

26. $\int \dfrac{dx}{ax+b} \quad (a \neq 0)$

27. $\int (x^2+1)(x^3+3x)^4\,dx$

28. $\int e^{\cos t}\,\text{sen}\,t\,dt$

29. $\int 5^t\,\text{sen}\,(5^t)\,dt$

30. $\int \dfrac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

31. $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

32. $\int \dfrac{\text{sen}\,(\ln x)}{x}\,dx$

33. $\int \dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx$

34. $\int \dfrac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

36. $\int \dfrac{2^t}{2^t+3}\,dt$

37. $\int \text{senh}^2 x\cosh x\,dx$

38. $\int \dfrac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}}$

39. $\int \dfrac{\text{sen}\,2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

40. $\int \dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\,dx$

41. $\int \cot x\,dx$

42. $\int \text{sen}\,t\,\sec^2(\cos t)\,dt$

43. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\text{sen}^{-1}x}$

44. $\int \dfrac{x}{1+x^4}\,dx$

45. $\int \dfrac{1+x}{1+x^2}\,dx$

46. $\int x^2\sqrt{2+x}\,dx$

47. $\int x(2x+5)^8\,dx$

48. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

49-52 Evalúe cada una de las siguientes integrales indefinidas. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, dibujando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

49. $\int x(x^2-1)^3\,dx$

50. $\int \tan^2\theta\,\sec^2\theta\,d\theta$

51. $\int e^{\cos x}\,\text{sen}\,x\,dx$

52. $\int \text{sen}\,x\cos^4 x\,dx$

53-73 Evalúe cada una de las siguientes integrales definidas

53. $\int_0^1 \cos(\pi t/2)\,dt$

54. $\int_0^1 (3t-1)^{50}\,dt$

55. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\,dx$

56. $\int_0^3 \dfrac{dx}{5x+1}$

57. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

58. $\int_{1/6}^{1/2} \csc \pi t\,\cot \pi t\,dt$

59. $\int_1^2 \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3+x^4\tan x)\,dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\text{sen}\,(\text{sen}\,x)\,dx$

63. $\int_0^{13} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx \quad (a > 0)$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4\,\text{sen}\,x\,dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

68. $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

69. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^{1/2} \dfrac{\text{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

71. $\int_0^1 \dfrac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

72. $\int_0^{T/2} \text{sen}\,(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

73. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1+\sqrt{x})^4}$

74. Verifique que $f(x) = \text{sen}\,\sqrt[3]{x}$ es una función impar y utilice este hecho para demostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \text{sen}\,\sqrt[3]{x}\,dx \leqslant 1$$

75-76 Utilice una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra bajo la curva dada. Luego encuentre el área exacta

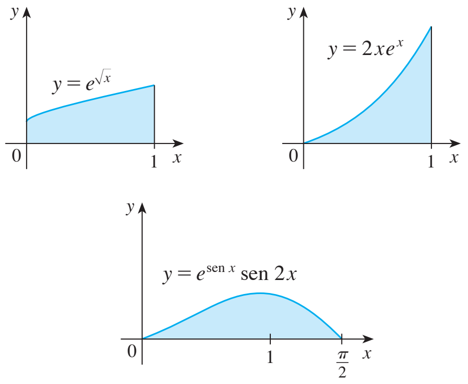
75. $y = \sqrt{2x+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

76. $y = 2\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

77. Evalúe $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ expresándola como una suma de dos integrales e interprete una de ellas en términos de un área.

78. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ haciendo una sustitución e interprete la integral resultante en términos de un área.

79. ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?



80. Un modelo de rapidez del metabolismo basal, en kcal/h de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas a partir de las 5:00. ¿Cuál es el metabolismo basal total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)\,dt$, en un periodo de 24 horas?

81. Un tanque de almacenamiento de petróleo se rompe en $t = 0$, y el petróleo se fuga del tanque con una rapidez de $r(t) = 100e^{-0.01t}$ litros por minuto. ¿Cuánto petróleo se escapa durante la primera hora?

82. Una población de bacterias se inicia con 400 y crece con una rapidez de $r(t) = (450.268)\, e^{1.12567t}$ bacterias por hora. ¿Cuántas habrá después de tres horas?

83. La respiración es cíclica y un ciclo respiratorio completo —desde el principio de la inhalación hasta el final de la exhalación— requiere alrededor de 5 s. El gasto máximo de aire que entra en los pulmones es de más o menos 0.5 L/s. Esto explica en parte por qué a menudo se ha usado la función $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi t/5)$ para modelar el gasto de aire hacia los pulmones. Úselo para hallar el volumen de aire inhalado en los pulmones en el tiempo t.

84. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. El índice de producción de estas calculadoras después de t semanas es

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Note que la producción se aproxima a 5 000 por semana a medida que avanza el tiempo, pero que la producción inicial es más baja debido a que los trabajadores no están familiarizados con las nuevas técnicas). Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

85. Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encuentre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

86. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

87. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $0 < a < b$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

88. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

89. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

90. Si f es continua sobre $[0, \pi]$, utilice la sustitución $u = \pi - x$ para demostrar que

$$\int_0^\pi xf(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

91. Mediante el ejercicio 90, calcule la integral

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

92. a) Si f es continua, demuestre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

b) Utilice el inciso a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

5 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que use.
b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.
c) Si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

2. a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua, desde $x = a$ hasta $x = b$.
b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x) \geqslant 0$?
c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos? Ilustre su respuesta con un diagrama.

3. Enuncie las dos partes del teorema fundamental del cálculo.

4. a) Enuncie el teorema del cambio neto.
b) Si $r(t)$ es la rapidez con la que el agua fluye hacia un depósito, ¿qué representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponga que una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una recta con una velocidad $v(t)$, medida en pies por segundo, y una aceleración $a(t)$.
a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique con exactitud qué significa la afirmación "la derivación y la integración son procesos inversos".

8. Enuncie la regla de sustitución. En la práctica, ¿cómo puede usarla?

Exámen rápido Verdadero-Falso

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$, entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Si f' es continua sobre $[1, 3]$, entonces $\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$.

7. Si f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

8. Si f y g son derivables y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^5 (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx$

11. Toda función continua es derivable.

12. Toda función continua tiene antiderivada.

13. $\displaystyle\int_0^3 e^{x^2}\,dx = \int_0^5 e^{x^2}\,dx + \int_5^3 e^{x^2}\,dx$

14. Si $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

15. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x)$$

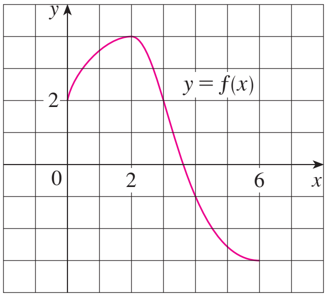
16. $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^3$ de $x = 0$ a $x = 2$.

17. $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

18. Si f tiene una discontinuidad en $x = 0$, entonces $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ no existe.

Ejercicios

1. Utilice la gráfica dada de f para hallar la suma de Riemann con seis subintervalos. Tome los puntos muestra como a) los puntos extremos de la izquierda y b) los puntos medios. En cada caso dibuje un diagrama y explique qué representa la suma de Riemann.



2. a) Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

con cuatro subintervalos; tomando los puntos extremos de la derecha como puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

b) Utilice la definición de integral definida (con los puntos extremos de la derecha) para calcular el valor de la integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx$$

c) Utilice el teorema fundamental para comprobar su respuesta al inciso b).

d) Dibuje un diagrama para explicar el significado geométrico de la integral del inciso b).

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado

3. Evalúe

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretándola en términos de áreas.

4. Exprese

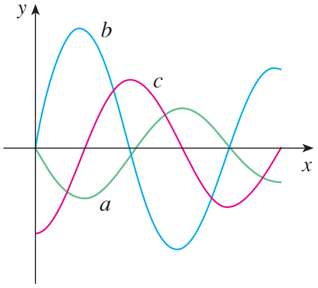
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \, \Delta x$$

como una integral definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ y evalúe la integral.

5. Si $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encuentre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

SAC **6.** a) Escriba $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como un límite de sumas de Riemann, tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Utilice un sistema algebraico computarizado para evaluar la suma y calcular el límite.
b) Use el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso a).

7. En la figura siguiente se muestran las gráficas de f, f' y $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfica y explique el porqué de su elección.



8. Evalúe cada una de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right) dx$ b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\,dx$

c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9-38 Evalúe cada una de las siguientes integrales.

9. $\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$ **10.** $\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

11. $\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$ **12.** $\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$ **14.** $\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$ **16.** $\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$ **18.** $\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\int_0^1 v^2 \cos(v^3)\,dv$ **20.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \tan t}{2 + \cos t}\,dt$ **22.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$ **24.** $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x}\,dx$

27. $\int \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\,dt$ **28.** $\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \tan x \ln(\cos x)\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$ **34.** $\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta \tan\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$ **36.** $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$ **38.** $\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39-40 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable trazando las gráficas de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$)

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra bajo la curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Luego, encuentre el área exacta.

42. Grafique la función $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen} x$ y use esa gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Después, evalúe la integral para confirmar su conjetura.

43-48 Encuentre la derivada de la función.

43. $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^3}\,dt$ **44.** $\displaystyle F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\,dt$

45. $\displaystyle g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\,dt$ **46.** $\displaystyle g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\,dt$

47. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$ **48.** $\displaystyle y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49-50 Mediante la propiedad 8 de las integrales, estime el valor de cada una de las siguientes de ellas.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51-54 Utilice las propiedades de las integrales para verificar cada una de las siguientes desigualdades.

51. $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \leqslant \frac{1}{3}$

52. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x \cos x\, dx \leqslant e - 1$

54. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx \leqslant \pi/4$

---

55. Use la regla del punto medio con $n = 6$ para obtener un valor aproximado de $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\, dx$.

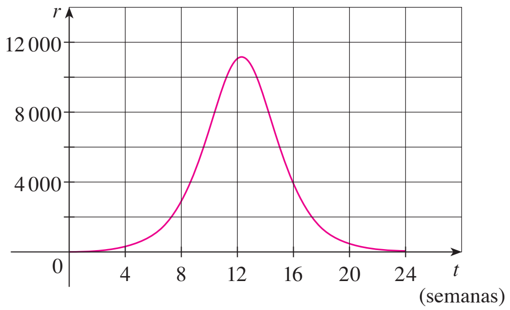
56. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con la función velocidad $v(t) = t^2 - t$, donde v se mide en metros por segundo. Encuentre a) el desplazamiento y b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

57. Sea $r(t)$ la rapidez a la cual se consume el petróleo del mundo, donde t se mide en años y empieza en $t = 0$ el 1 de enero de 2000, y $r(t)$ se mide en barriles por año. ¿Qué representa $\int_0^8 r(t)\, dt$?

58. Se utiliza una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor en los tiempos que se enlistan en la tabla siguiente. Utilice la regla del punto medio para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos cinco segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

59. Una población de abejas aumentó en una proporción de $r(t)$ abejas por semana, donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla del punto medio junto con seis subintervalos para estimar el aumento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



60. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Evalúe $\int_{-3}^1 f(x)\, dx$ mediante la interpretación de la integral como una diferencia de áreas.

61. Si f es continua y $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$, evalúe $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen}\theta) \cos\theta\, d\theta$.

62. En la sección 5.3 se introdujo la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$. En su teoría de la difracción de las ondas luminosas, Fresnel también usó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

a) ¿Sobre cuáles intervalos es creciente C?
b) ¿Sobre cuáles intervalos es cóncava hacia arriba C?
SAC c) Use una gráfica para resolver la siguiente ecuación, con una aproximación de dos cifras decimales:

$$\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt = 0.7$$

SAC d) Grafique C y S en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

63. Estime el valor del número c tal que el área bajo la curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es igual a 1.

64. Suponga que en un inicio la temperatura en una varilla larga y delgada que se encuentra a lo largo del eje x es $C/(2a)$ si $|x| \leqslant a$ y 0 si $|x| > a$. Puede demostrarse que si la difusión de calor de la varilla es k, entonces la temperatura de esa varilla en el punto x en el instante t, es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du$$

Para hallar la distribución de temperaturas que se produce a partir de un punto caliente inicial concentrado en el origen, necesitamos calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use la Regla de l'Hospital para hallar este límite.

65. Si f es una función continua tal que

$$\int_1^x f(t)\, dt = (x - 1)e^{2x} + \int_1^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para toda x, encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ y h'' es continua en todo su dominio. Evalúe $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Si f' es continua sobre $[a, b]$, demuestre que

$$2\int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Determine $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Si f es continua sobre $[0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

70. Evalúe

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$$

71. Suponga que f es continua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ y $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Halle el valor de la integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$.

Problemas adicionales

Antes de ver la solución del siguiente ejemplo, cúbrala e intente resolver el problema por usted mismo.

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right)$.

SOLUCIÓN Empiece por tener un panorama preliminar de los ingredientes de la función. ¿Qué sucede con el primer factor, $x/(x-3)$, cuando x tiende a 3? El numerador tiende a 3 y el denominador tiende a 0, de modo que

$$\frac{x}{x-3}\to\infty \quad \text{cuando} \quad x\to 3^+ \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{x-3}\to-\infty \quad \text{cuando} \quad x\to 3^-$$

El segundo factor tiende a $\int_3^3 (\operatorname{sen} t)/t\,dt$, lo cual es 0. No resulta claro qué sucede a la función como un todo. (Uno de los factores aumenta, y el otro disminuye.) De modo que, ¿cómo proceder?

RP En la página 75 se analizan los principios para la resolución de problemas.

Uno de los principios para la resolución de problemas es *intentar reconocer algo conocido*. ¿Existe una parte de la función que recuerde algo que ya ha visto? Bien, la integral

$$\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

tiene a x como su límite superior de integración, y ese tipo de integral se presenta en la parte 1 del teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Esto sugiere que podría relacionarse con la derivación.

Una vez que empiece a pensar en la derivación, el denominador $(x-3)$ le recuerda algo más que debe serle conocido: una de las formas de la definición de la derivada en el capítulo 2 es

$$F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

y con $a=3$ esto se convierte en

$$F'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$

De modo que, ¿cuál es la función F en esta situación? Note que si definimos

$$F(x)=\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

entonces $F(3)=0$. ¿Qué puede decirse acerca del factor x en el numerador? Esto es una situación irregular, de modo que sáquelo como factor y conjunte el cálculo:

Otro enfoque es usar la regla de l'Hospital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right) &= \lim_{x\to 3} x\cdot\lim_{x\to 3}\frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt}{x-3}\\ &= 3\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\\ &= 3F'(3)=3\,\frac{\operatorname{sen} 3}{3} \qquad \text{(TFC1)}\\ &= \operatorname{sen} 3\end{aligned}$$

Problemas

1. Si $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$, donde f es una función continua, encuentre $f(4)$.

2. Encuentre el valor mínimo del área bajo la curva $y = x + 1/x$ desde $x = a$ hasta $x = a + 1.5$ para toda $a > 0$.

3. Si $\int_0^4 e^{(x-2)^4}\,dx = k$, encuentre el valor de $\int_0^4 xe^{(x-2)^4}\,dx$.

4. a) Trace la gráfica de varios miembros de la familia de funciones $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ y vea las regiones limitadas por estas curvas y el eje x. Haga una conjetura en cuanto a cómo se relacionan las áreas de estas regiones.

   b) Pruebe su conjetura del inciso a).

   c) Vea de nuevo las gráficas del inciso a) y úselas para trazar la curva descrita por los vértices (los puntos más altos) de la familia de funciones. ¿Puede conjeturar qué tipo de curva es ésta?

   d) Halle una ecuación para la curva que trazó en el inciso c).

5. Si $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$, donde $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\,dt$, encuentre $f'(\pi/2)$.

6. Si $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, halle $f'(x)$.

7. Evalúe el $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\,dt$.

8. En la figura pueden verse dos regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ desde 0 hasta t, y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O, P y $(t, 0)$. Calcule $\lim_{t\to 0^+} A(t)/B(t)$.

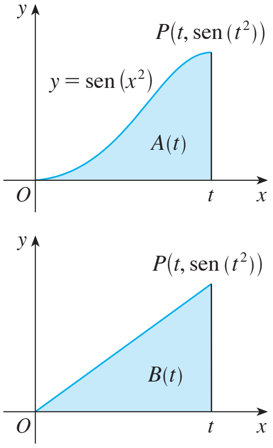


FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

9. Encuentre el intervalo $[a, b]$ para el cual el valor de la integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\,dx$ es un máximo.

10. Utilice una integral para estimar la suma $\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i}$.

11. a) Evalúe $\int_0^n [\![x]\!]\,dx$, donde n es un entero positivo.

    b) Evalúe $\int_a^b [\![x]\!]\,dx$, donde a y b son números reales con $0 \leqslant a < b$.

12. Encuentre $\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}\,du\right) dt$.

13. Suponga que los coeficientes de la polinomial cúbica $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfacen la ecuación

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$

Demuestre que la ecuación $P(x) = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1. ¿Puede generalizar este resultado para un polinomio de grado n-ésimo?

14. En un evaporador se usa un disco circular y se hace girar en un plano vertical. Si debe estar parcialmente sumergido en el líquido de modo que se maximice el área humedecida expuesta del disco, demuestre que el centro de éste debe hallarse a una altura $r/\sqrt{1+\pi^2}$ arriba de la superficie del líquido.

15. Demuestre que si f es continua, entonces $\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du$.

16. En la figura se muestra una región que consta de todos los puntos dentro de un cuadrado que están más cerca del centro que de los lados del cuadrado. Encuentre el área de la región.

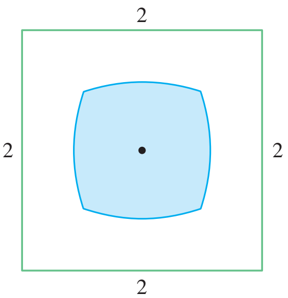


FIGURA PARA EL PROBLEMA 16

17. Evalúe $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\right)$.

18. Para cualquier número c, sea $f_c(x)$ el más pequeño de los dos números $(x-c)^2$ y $(x-c-2)^2$. Entonces, definimos $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\,dx$. Encuentre los valores máximo y mínimo de $g(c)$ si $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

6 Aplicaciones de la integración

La gran pirámide del rey Keops fue construida en Egipto de 2580 a. C. a 2560 a. C. y por más de 3800 años fue la estructura más alta en el mundo construida por el hombre. Las técnicas de este capítulo nos permitirán estimar el trabajo total realizado en la construcción de esta pirámide y, por tanto, hacer una conjetura de cuántos obreros fueron necesarios para construirla.

© Ziga Camernik / Shutterstock

En este capítulo exploramos algunas de las aplicaciones de la integral definida utilizándola para calcular áreas entre curvas, volúmenes de sólidos y el trabajo realizado por una fuerza variable. El tema común es el siguiente método general, que es similar al que utilizamos para encontrar áreas bajo las curvas: descomponemos una cantidad Q en un gran número de pequeñas partes. Después aproximamos cada una de estas partes por una cantidad de la forma $f(x_i^*)\,\Delta x$ y así aproximamos Q mediante una suma de Riemann. Luego, tomamos el límite y expresamos Q como una integral. Por último, evaluamos la integral mediante el teorema fundamental del cálculo o la regla del punto medio.

6.1 Áreas entre curvas

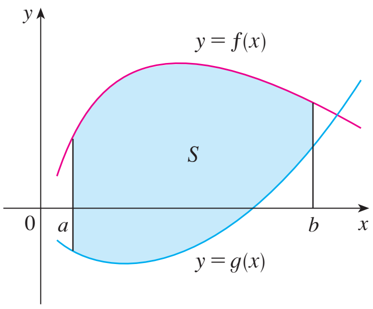


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

En el capítulo 5 se definen y calculan áreas de regiones que están bajo las gráficas de funciones. Aquí usamos integrales para calcular las áreas de regiones que quedan entre las gráficas de dos funciones.

Considere la región S que se ubica entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$. (Véase la figura 1.)

De la misma manera, como lo hicimos para áreas bajo curvas en la sección 5.1, dividimos S en n franjas con igual anchura, y luego calculamos el valor aproximado de la i-ésima franja mediante un rectángulo de base Δx y altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Véase la figura 2. Si lo desea, podríamos tomar todos los puntos muestra como extremos derechos, en cuyo caso $x_i^* = x_i$). Por tanto, la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

es una aproximación a lo que intuimos que es el área de S.

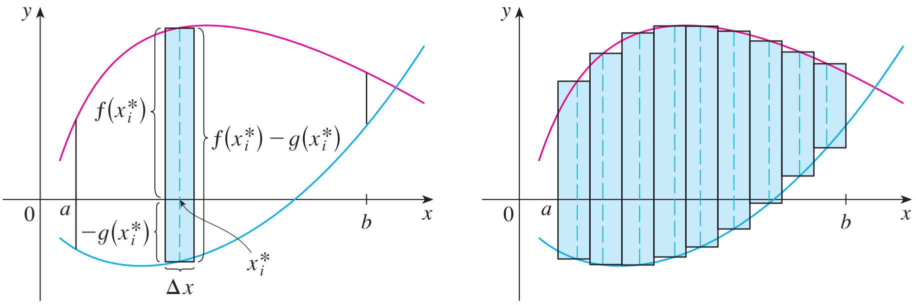


FIGURA 2 a) Rectángulo representativo b) Rectángulos de aproximación

Al parecer, esta aproximación es mejor cuando $n \to \infty$. Por tanto, definimos el **área** A de S como el valor límite de la suma de áreas de estos rectángulos de aproximación.

1
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

Identificamos el límite en 1 como la integral definida de $f - g$; por tanto, tenemos la fórmula siguiente para el área.

2 El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$, es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Observe que en el caso especial donde $g(x) = 0$, S es la región bajo la gráfica de f, y nuestra definición general del área 1 se reduce a la definición anterior (definición 2 de la sección 5.1).

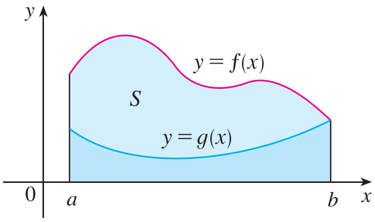


FIGURA 3

$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

En el caso donde f y g son positivas, podemos ver en la figura 3 por qué $\boxed{2}$ es cierta:

$$A = [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)]$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área de la región acotada por arriba por $y = e^x$, por abajo por $y = x$ y a los lados por $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 4. La curva que limita la parte superior es $y = e^x$, y la curva del límite inferior es $y = x$. De este modo usamos la fórmula del área $\boxed{2}$ con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ y $b = 1$.

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

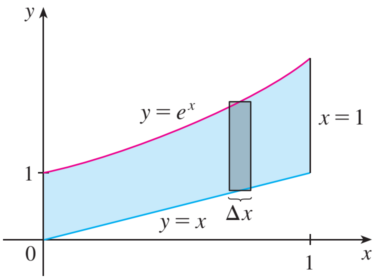


FIGURA 4

En la figura 4 se toma un rectángulo representativo de aproximación cuyo ancho es Δx como recordatorio del procedimiento por medio del cual se define el área $\boxed{1}$. En general, cuando planteamos una integral para determinar un área, es útil elaborar un croquis de la región para identificar la curva superior y_S, la curva inferior y_I y el rectángulo representativo de aproximación como en la figura 5. Por consiguiente, el área de un rectángulo representativo es $(y_S - y_I)$ y la ecuación

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_S - y_I)\,\Delta x = \int_a^b (y_S - y_I)\,dx$$

resume el procedimiento de sumar (en el sentido de límite) las áreas de todos los rectángulos representativos.

Observe que, en la figura 5, el límite o frontera izquierda se reduce a un punto, en tanto que, en la figura 3, la frontera derecha se reduce a un punto. En el ejemplo siguiente, ambos límites se reducen a un punto, de modo que el primer paso es determinar a y b.

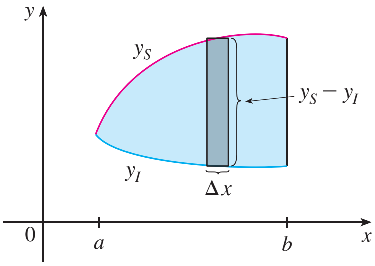


FIGURA 5

V EJEMPLO 2 Calcule el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Primero determinamos los puntos de intersección de las parábolas resolviendo en forma simultánea sus ecuaciones. El resultado es $x^2 = 2x - x^2$, o $2x^2 - 2x^2 = 0$. Así, $2x(x - 1) = 0$, de modo que $x = 0$ o 1. Los puntos de intersección son (0, 0) y (1, 1).

Según la figura 6, los límites superior e inferior son

$$y_S = 2x - x^2 \qquad \text{y} \qquad y_I = x^2$$

El área de un rectángulo representativo es

$$(y_S - y_I)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

por lo que la región se sitúa entre $x = 0$ y $x = 1$. De modo que el área total es

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

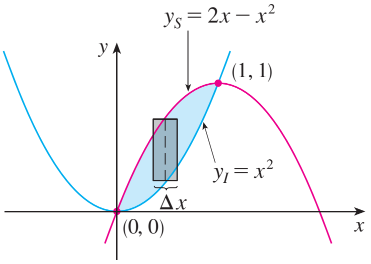


FIGURA 6

Algunas veces es difícil, o hasta imposible, determinar los puntos donde se cortan exactamente las dos curvas. Como se muestra en el ejemplo siguiente, con la ayuda de una calculadora para graficar o de una computadora, podemos encontrar valores aproximados de los puntos de intersección, y luego proceder como antes.

EJEMPLO 3 Calcule el área aproximada de la región acotada por las curvas $y = x/\sqrt{x^2+1}$ $y = x^4 - x$.

SOLUCIÓN Si tratáramos de determinar exactamente los puntos de intersección, habría que resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x$$

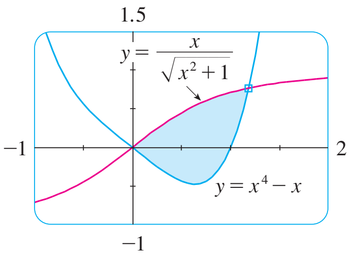


FIGURA 7

Esta ecuación parece muy difícil como para resolverla de manera exacta (de hecho, es imposible), de modo que recurrimos a una calculadora para graficar o a una computadora para trazar las gráficas de las dos curvas de la figura 7. Un punto de intersección está en el origen. Haciendo un acercamiento con el zoom en el otro punto de intersección hallamos que $x \approx 1.18$. (Si se requiere mayor precisión, podríamos aplicar el método de Newton o un buscador de raíces, si se cuenta con un instrumento para graficar.) En estos términos, una aproximación al área entre las curvas es

$$A \approx \int_0^{1.18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar el primer término utilizamos la sustitución $u = x^2 + 1$. Entonces, $du = 2x\,dx$, y cuando $x = 1.18$, $u \approx 2.39$. Así que

$$\begin{aligned} A &\approx \tfrac{1}{2}\int_1^{2.39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18} (x^4 - x)\,dx \\ &= \sqrt{u}\,\Big]_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1.18} \\ &= \sqrt{2.39} - 1 - \frac{(1.18)^5}{5} + \frac{(1.18)^2}{2} \\ &\approx 0.785 \end{aligned}$$

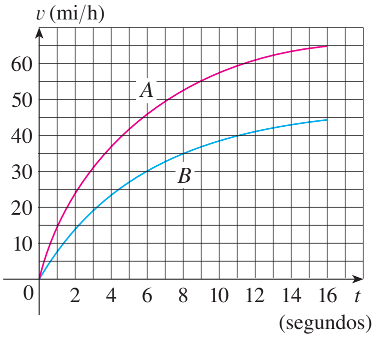


FIGURA 8

EJEMPLO 4 En la figura 8 se muestran las curvas de velocidad para dos automóviles, A y B, que parten juntos y se desplazan a lo largo de la misma carretera. ¿Qué representa el área entre las curvas? Aplique la regla del punto medio para estimarla.

SOLUCIÓN De acuerdo con la sección 5.4, el área bajo la curva A de la velocidad representa la distancia que recorre el vehículo A durante los primeros 16 segundos. Del mismo modo, el área bajo la curva B es la distancia que recorre el automóvil B durante ese tiempo. Así, el área entre estas curvas, que es la diferencia de las áreas bajo las curvas, es la distancia entre los vehículos después de 16 segundos. Tomamos las velocidades de la gráfica y las convertimos en pies por segundo (1 millas/h $= \frac{5280}{3600}$ pie/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Aplicamos la regla del punto medio con $n = 4$ intervalos, de modo que $\Delta t = 4$. Los puntos medios de los intervalos son $\bar{t}_1 = 2, \bar{t}_2 = 6, \bar{t}_3 = 10$ y $\bar{t}_4 = 14$. Estimamos la distancia entre los automóviles después de 16 segundos como se indica a continuación:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\,dt \approx \Delta t\,[13 + 23 + 28 + 29]$$
$$= 4(93) = 372 \text{ pies}$$

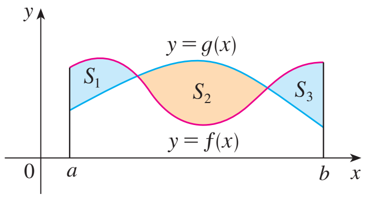


FIGURA 9

Si se pide determinar el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ donde $f(x) \geqslant g(x)$ para algunos valores de x, pero $g(x) \geqslant f(x)$ para otros valores de x, entonces dividimos la región dada S en varias regiones $S_1, S_2, \dots$ con áreas $A_1, A_2, \dots$ como se ilustra en la figura 9. Después definimos el área de la región S como la suma de las áreas de las regiones más pequeñas $S_1, S_2, \dots$, es decir, $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Puesto que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{cuando } f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{cuando } g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$

tenemos la expresión siguiente para A.

3 El área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Al evaluar la integral en 3, aún podemos dividir en integrales que corresponderían a $A_1, A_2, \dots$

V EJEMPLO 5 Calcule el área de la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Los puntos de intersección se presentan cuando $\operatorname{sen} x = \cos x$, es decir, cuando $x = \pi/4$ (puesto que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$). La región se ilustra en la figura 10. Observe que $\cos x \geqslant \operatorname{sen} x$ cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, pero $\operatorname{sen} x \geqslant \cos x$ cuando $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Por tanto, el área requerida es

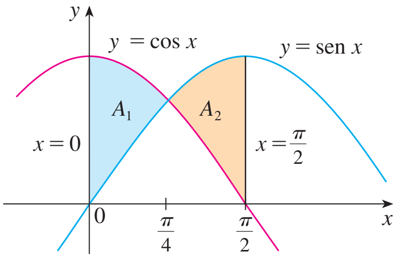


FIGURA 10

$$A = \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\,dx = A_1 + A_2$$
$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$$
$$= \Big[\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 2\sqrt{2} - 2$$

En este ejemplo en particular podríamos haber ahorrado algo de trabajo observando que la región es simétrica respecto a $x = \pi/4$, así que

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$$

Algunas regiones se manejan mejor si se considera a x como una función de y. Si una región está acotada con curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (véase la figura 11), entonces su área es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

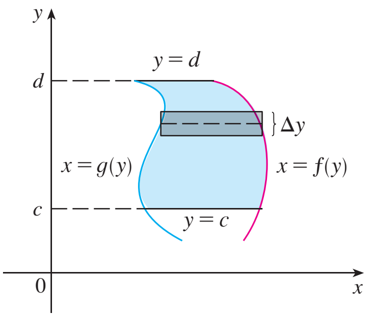


FIGURA 11

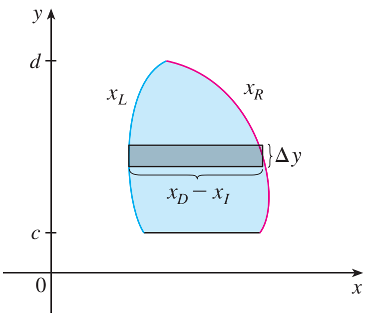


FIGURA 12

Si escribimos x_D para el límite derecho y x_I para el límite izquierdo, entonces, según la figura 12, tenemos

$$A = \int_c^d (x_D - x_I)\, dy$$

He aquí un rectángulo representativo de aproximación con dimensiones $x_D - x_L$ y Δy.

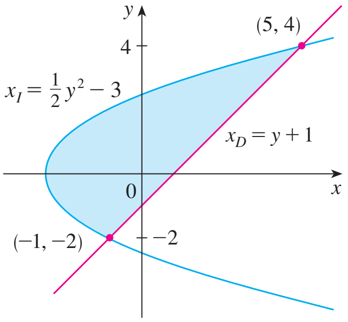


FIGURA 13

EJEMPLO 6 Calcule el área definida mediante la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN Al resolver las dos ecuaciones, los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. Al resolver la ecuación de la parábola y determinar x observamos que, según la figura 13, las curvas que limitan a la izquierda y a la derecha son

$$x_I = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad x_D = y + 1$$

Es necesario integrar entre los valores de y adecuados, $y = -2$ y $y = 4$; por consiguiente,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_D - x_I)\, dy = \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Bigg]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

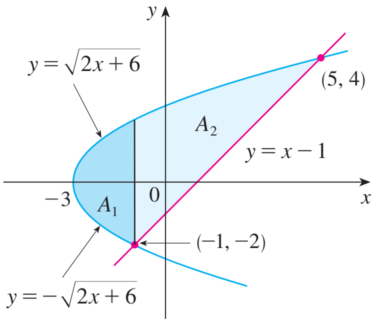
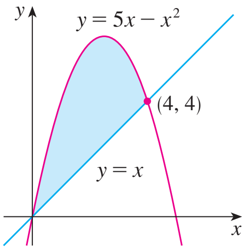


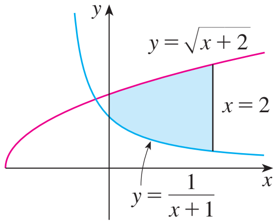
FIGURA 14

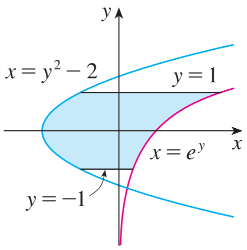
NOTA Pudimos haber calculado el área del ejemplo 6 integrando respecto a x; en lugar de y, pero el cálculo es más complicado, ya que significaría dividir la región en dos y determinar las áreas A_1 y A_2 de la figura 14. El método aplicado en el ejemplo 6 es *mucho* más fácil.

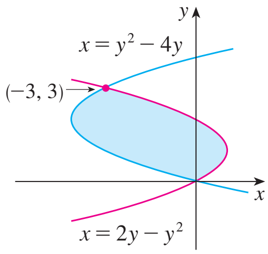
6.1 Ejercicios

1-4 Determine el área de cada una de las regiones sombreadas.

1.


2.


3.


4.


5-12 Dibuje las regiones encerradas por cada una de las curvas dadas. Decida si integra respecto a x o y. Trace un rectángulo representativo de aproximación e indique su altura y su ancho. Luego determine el área de la región.

5. $y = e^x, \quad y = x^2 - 1, \quad x = -1, \quad x = 1$

6. $y = \operatorname{sen} x, \; y = x, \quad x = \pi/2, \quad x = \pi$

7. $y = (x - 2)^2, \quad y = x$

8. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 2x/\pi, \quad x \geqslant 0$

11. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

12. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

13-28 Trace cada una de las regiones encerradas y su área.

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

15. $y = e^x, \quad y = xe^x, \quad x = 0$

16. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

18. $y = \sqrt{x - 1}, \quad x - y = 1$

19. $y = \cos \pi x, \quad y = 4x^2 - 1$

20. $x = y^4, \quad y = \sqrt{2 - x}, \quad y = 0$

21. $y = \tan x, \quad y = 2 \operatorname{sen} x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

22. $y = x^3, \quad y = x$

23. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

24. $y = \cos x, \quad y = 1 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x = 9$

26. $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$

28. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 2x^2, \quad x + y = 3, \quad x \geqslant 0$

29-30 Utilice el cálculo para encontrar el área de cada uno de los siguientes triángulos definidos por los vértices dados.

29. (0, 0), (3, 1), (1, 2)

30. (2, 0), (0, 2) (−1, 1)

31-32 Evalúe cada una de las siguientes integrales e interprétela como el área de una región. Dibuje la región.

31. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x|\, dx$

32. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |3^x - 2^x|\, dx$

33-36 Por medio de una gráfica, encuentre un valor aproximado de las coordenadas x de los puntos de intersección entre las curvas dadas. Luego estime (en forma aproximada) el área de cada una de las siguientes regiones definida por las curvas.

33. $y = x \operatorname{sen}(x^2), \quad y = x^4$

34. $y = \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = x^5 - x, \quad x \geqslant 0$

35. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

36. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

37-40 Grafique cada una de las siguientes regiones entre las curvas dadas y utilice su calculadora para calcular el área con una aproximación de cinco decimales.

37. $y = \dfrac{2}{1 + x^4}, \quad y = x^2$

38. $y = e^{1 - x^2}, \quad y = x^4$

39. $y = \tan^2 x, \quad y = \sqrt{x}$

40. $y = \cos x, \quad y = x + 2 \operatorname{sen}^4 x$

SAC **41.** Utilice un sistema algebraico computarizado para encontrar el área exacta encerrada por las curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ y $y = x$.

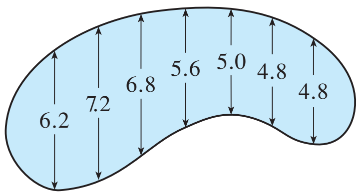
Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

42. Trace la región en el plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ y determine su área.

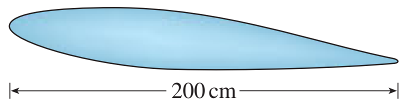
43. Los automóviles de carreras de Chris y Kelly están lado a lado al inicio de la carrera. En la tabla se proporcionan las velocidades de cada vehículo (en millas por hora) durante los primeros 10 segundos de la competencia. Aplique la regla del punto medio para estimar cuánto se adelanta Kelly durante los 10 primeros segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

44. Los anchos, en metros, de una piscina en forma de riñón se midieron a intervalos de 2 metros, como se indica en la figura. Mediante la regla del punto medio, estime el área de la piscina.



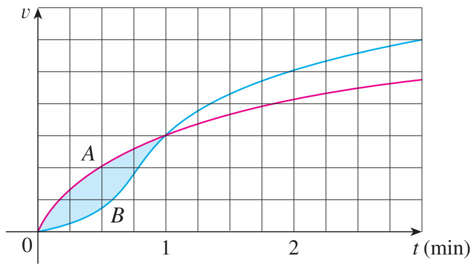
45. Se muestra la sección transversal de un ala de avión. Las mediciones del grosor del ala, en centímetros, en intervalos de 20 centímetros son 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1, 8.7 y 2.8. Aplique la regla del punto medio para estimar el área de la sección transversal del ala.



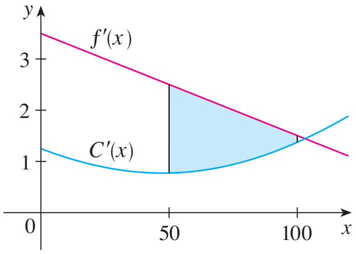
46. La tasa de nacimientos de una población es $b(t) = 2\,200e^{0.024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1460e^{0.018t}$ personas por cada año. Halle el área entre estas curvas para $0 \leqslant t \leqslant 10$. ¿Qué representa el área?

47. Dos automóviles, A y B, se encuentran lado a lado al inicio de la carrera, y aceleran a partir del reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones velocidad.

a) ¿Cuál vehículo tiene ventaja después de un minuto? Explique.
b) ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?
c) ¿Cuál es el automóvil que tiene ventaja después de dos minutos? Explique.
d) Estime el tiempo en el cual los vehículos van de nuevo lado a lado.



48. En la figura se muestran las gráficas de la función ingreso marginal f' y la función costo marginal C' para un fabricante. [Recuerde de la sección 4.8 que $f(x)$ y $C(x)$ representan los ingresos y el costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que f y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Estime el valor de esta cantidad mediante la regla del punto medio.



49. La curva cuya ecuación es $y^2 = x^2(x + 3)$ se denomina curva **cúbica de Tschirnhausen**. Si trazamos la gráfica de esta curva, podremos ver que una parte de ella forma un bucle. Encuentre el área definida por este bucle.

50. Encuentre el área de la región definida por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en (1, 1) y el eje x.

51. Determine el número b tal que la recta $y = b$ divide a la región delimitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.

52. a) Calcule el número a tal que la recta $x = a$ biseca el área bajo la curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.
b) Determine el numero b tal que la recta $y = b$ biseca el área del inciso a).

53. Calcule los valores de c tales que el área de la región delimitada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

54. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valor de c el área de la región que encierran las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$, y $x = 0$ es igual al área de la región encerrada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

55. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ encierran una región? Calcule el área de la región.

PROYECTO DE APLICACIÓN EL ÍNDICE GINI

¿Cómo es posible medir la distribución del ingreso entre los habitantes de un determinado país? Una de esas medidas es el *índice Gini*, nombrado así en honor del economista italiano Corrado Gini, quien lo ideó en 1912.

Primero clasificamos todos los hogares de un país de acuerdo con el ingreso y después calculamos el porcentaje de hogares cuyo ingreso sea a lo sumo un porcentaje dado del ingreso total del país. Definimos una **curva de Lorenz** $y = L(x)$ sobre el intervalo $[0, 1]$ ubicando el punto $(a/100, b/100)$ sobre la curva si la parte inferior $a\%$ de los hogares recibe a lo más $b\%$ del ingreso total. Por ejemplo, en la figura 1, el punto (0.4, 0.12) está sobre la curva de Lorenz para los Estados Unidos en 2008 porque 40% más pobre de la población recibió sólo 12% del ingreso total. Asimismo, la parte inferior 80% de la población recibió 50% del ingreso total, por lo que el punto (0.8, 0.5) está sobre la curva de Lorenz. (La curva de Lorenz es así nombrada en honor del economista estadounidense Max Lorenz).

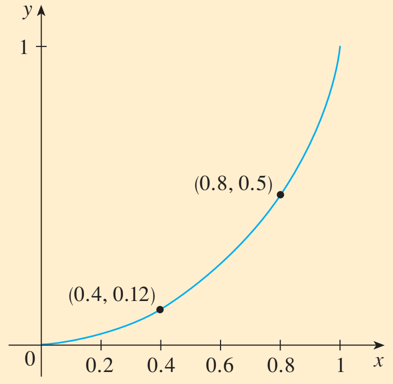


FIGURA 1
Curva de Lorenz para EU en 2008

La figura 2 muestra algunas curvas típicas de Lorenz. Todas pasan por los puntos (0, 0) y (1, 1) y son cóncavas hacia arriba. En el caso extremo $L(x) = x$, la sociedad es perfectamente igualitaria: los más pobres $a\%$ de la población recibe $a\%$ del ingreso total y así todo el mundo recibe el mismo ingreso. El área entre una curva de Lorenz $y = L(x)$ y la recta $y = x$ mide cuánto la distribución del ingreso difiere de una igualdad absoluta. El **índice de Gini** (a veces llamado **coeficiente de Gini** o **coeficiente de desigualdad**) es el área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ (sombreada en la figura 3) dividida entre el área bajo $y = x$.

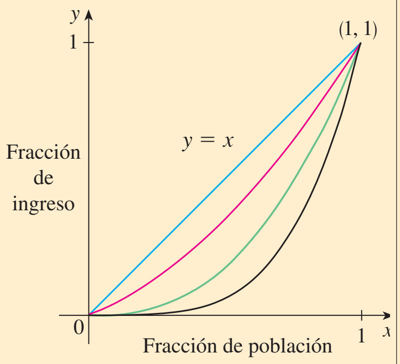


FIGURA 2

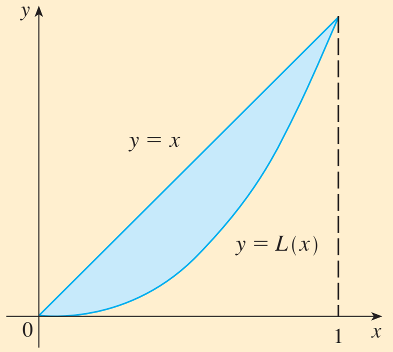


FIGURA 3

1. a) Demuestre que el índice de Gini, G, es dos veces el área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$, es decir,

$$G = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

b) ¿Cuál es el valor de G para una sociedad perfectamente igualitaria (todo el mundo tiene el mismo ingreso)? ¿Cuál es el valor de G para una sociedad perfectamente totalitaria (una sola persona recibe todos los ingresos)?

2. La siguiente tabla (obtenida de los datos facilitados por la Oficina de Censo de EU) muestra los valores de la función de Lorenz de distribución del ingreso en los Estados Unidos para el año 2008.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$L(x)$	0.000	0.034	0.120	0.267	0.500	1.000

a) ¿Qué porcentaje del ingreso total de EU fue recibido por 20% más rico de la población en 2008?

b) Utilice una calculadora o computadora para ajustar los datos de la tabla a una función cuadrática. Grafique los puntos dato y la función cuadrática. ¿Es el modelo cuadrático un ajuste razonable?

c) Utilice el modelo cuadrático para la función de Lorenz para estimar el índice de Gini para Estados Unidos en el año 2008.

3. La siguiente tabla proporciona valores para la función de Lorenz en las décadas de 1970, 1980, 1990 y 2000. Utilice el método del problema 2 para estimar el índice de Gini para Estados Unidos durante esos años y compare con su respuesta al problema 2c). ¿Nota usted una tendencia?

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1970	0.000	0.041	0.149	0.323	0.568	1.000
1980	0.000	0.042	0.144	0.312	0.559	1.000
1990	0.000	0.038	0.134	0.293	0.530	1.000
2000	0.000	0.036	0.125	0.273	0.503	1.000

SAC **4.** A menudo, un modelo potencia proporciona un ajuste más preciso que un modelo cuadrático para una función de Lorenz. Si tiene usted un equipo de cómputo con Maple o Mathematica, ajuste una función potencia ($y = ax^k$) a los datos en el problema 2 y utilícelo para estimar el índice Gini para Estados Unidos en 2008. Compare con su respuesta a los incisos b) y c) del problema 2.

6.2 Volúmenes

Cuando tratamos de calcular el volumen de un sólido, enfrentamos el mismo tipo de problema que al determinar áreas. Intuitivamente sabemos lo que significa un volumen, pero es necesario precisar la idea usando el cálculo, a fin de dar una definición exacta de volumen.

Empezamos con un tipo simple de sólido llamado **cilindro** (o mejor dicho un *cilindro recto*). Como se ilustra en la figura 1a), un cilindro está limitado por una región plana B_1, que se llama **base**, y una región congruente B_2 en un plano paralelo. El cilindro consiste en todos los puntos sobre los segmentos de recta que son perpendiculares a la base y unen a B_1 con B_2. Si el área de la base es A y la altura del cilindro (la distancia desde B_1 hasta B_2) es h, entonces el volumen V del cilindro se define como

$$V = Ah$$

En particular, si la base es un círculo de radio r, entonces el cilindro es un cilindro circular cuyo volumen es $V = \pi r^2 h$ [véase la figura 1b)], y si la base es un rectángulo de largo l y ancho w, entonces el cilindro es una caja rectangular (también se le llama *paralelepípedo rectangular*) cuyo volumen es $V = lwh$ [véase la figura 1c)].

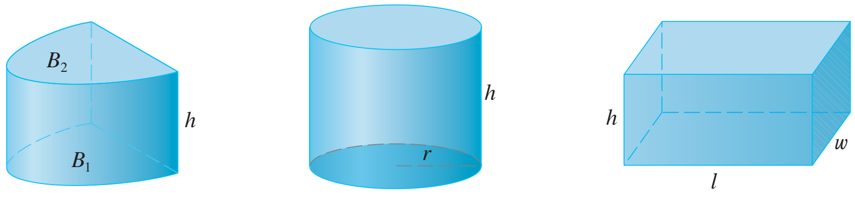


FIGURA 1 a) Cilindro $V = Ah$ b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$ c) Caja rectangular $V = lwh$

En el caso de un sólido S que no es un cilindro, primero "cortamos" a S en piezas y hacemos que cada pieza se aproxime a un cilindro, para después estimar el volumen de S sumando los volúmenes de los cilindros. El valor del volumen exacto de S se obtiene a través un proceso de límite en el que el número de piezas se hace cada vez más grande.

Iniciamos cortando a S con un plano y obteniendo una región plana que se denomina **sección transversal** de S. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x, y que pasa por el punto x, donde $a \leq x \leq b$. (Véase la figura 2. Imagine que corta a S con un cuchillo a través de x y calcule el área de esta rebanada.) El área de la sección transversal $A(x)$ variará cuando x se incrementa desde a hasta b.

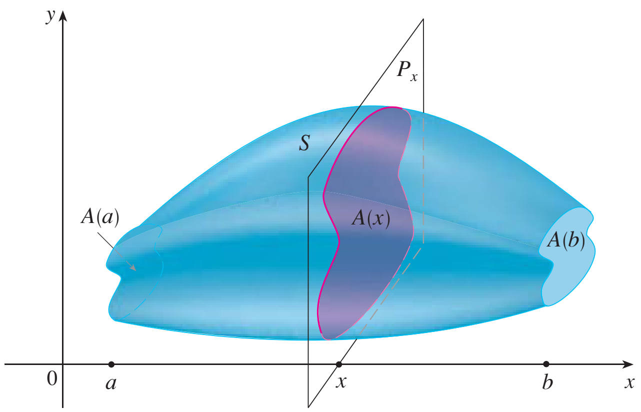


FIGURA 2

Dividimos S en n "rebanadas" del mismo ancho Δx mediante los planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ (Para rebanar el sólido imagine que está rebanando una hogaza de pan.) Si elegimos puntos muestra x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$, podemos tener un valor aproximado de la i-ésima rebanada S_i, (la parte de S que queda entre los planos $P_{x_{i-1}}$ y P_{x_i}) por un cilindro cuya base tiene un área $A(x_i^*)$ y "altura" Δx. (Véase la figura 3.)

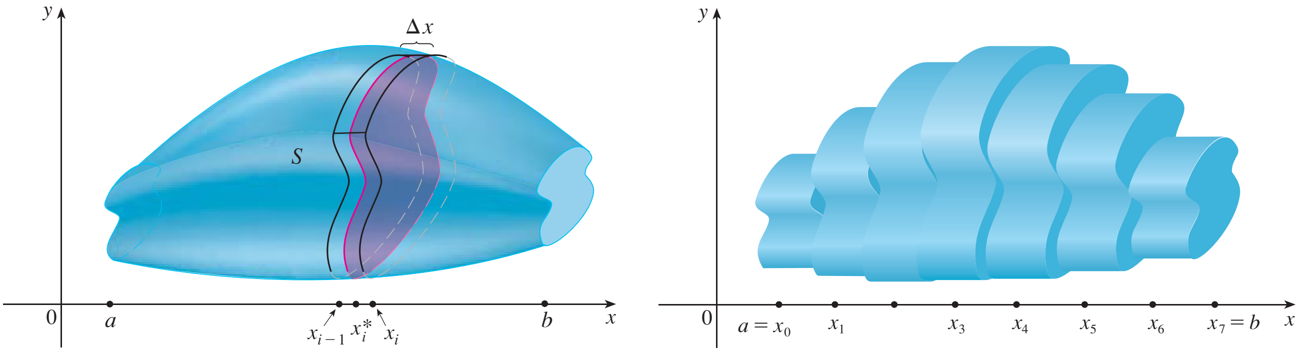


FIGURA 3

El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\,\Delta x$, de modo que una aproximación a la concepción intuitiva del volumen de la i-ésima rebanada S_i es:

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Al sumar los volúmenes de estas rebanadas, obtenemos un valor aproximado del volumen total (es decir, a lo que pensamos intuitivamente que es un volumen):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximación parece ser cada vez mejor cuando $n \to \infty$. (Suponga que las rebanadas son cada vez más delgadas). Por tanto, *definimos* al volumen como el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$. Pero aquí reconocemos el límite de las sumas de Riemann como una integral definida y, por tanto, se tiene la siguiente definición.

Puede demostrarse que esta definición es independiente de dónde se ubique S respecto al eje x. En otras palabras, no importa cómo corte las rebanadas mediante planos paralelos; siempre obtendrá la misma respuesta para V.

Definición de volumen Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, a través de x y perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el **volumen** de S es

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Cuando aplicamos la fórmula del volumen $V = \int_a^b A(x)\,dx$ es importante recordar que $A(x)$ es el área de una sección transversal que se obtiene al cortar a través de x con un plano perpendicular al eje x.

Observe que, en el caso de un cilindro, el área de la sección transversal es constante: $A(x) = A$ para toda x. De este modo, la definición de volumen da $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; esto concuerda con la fórmula $V = Ah$.

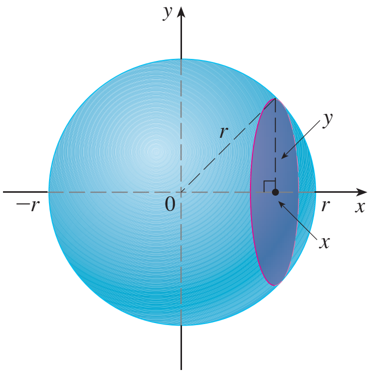


FIGURA 4

EJEMPLO 1 Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

SOLUCIÓN Si colocamos la esfera de modo que su centro esté en el origen (véase la figura 4), entonces el plano P_x corta la esfera en un círculo cuyo radio (según el teorema

de Pitágoras), es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De este modo, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Si aplicamos la definición del volumen con $a = -r$ y $b = r$, tenemos

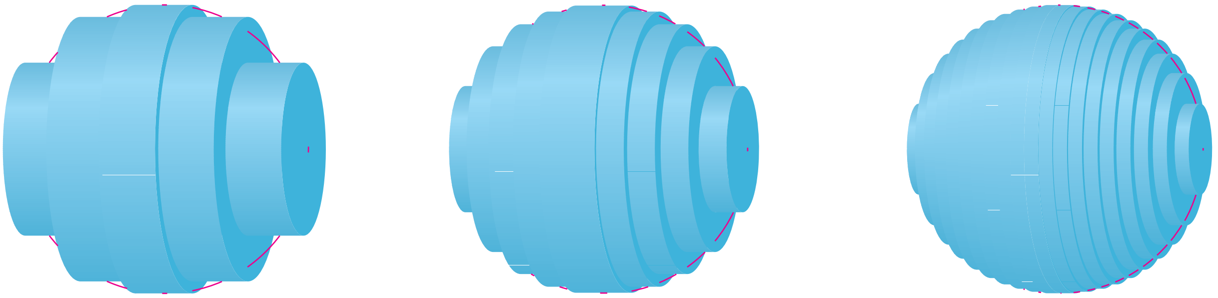
$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(El integrando es una función par.)} \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

En la figura 5 se ilustra la definición de volumen cuando el sólido es una esfera de radio $r = 1$. De acuerdo con el resultado del ejemplo 1, sabemos que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi$, que es aproximadamente 4.18879. En este caso, las rebanadas son cilindros circulares, o *discos*, y las tres partes de la figura 5 muestran las interpretaciones geométricas de las sumas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

cuando $n = 5$, 10 y 20 si elegimos los puntos muestra x_i^* como los puntos medios $\bar{x}_i$. Observe que, cuando incrementamos la cantidad de cilindros de aproximación, las sumas correspondientes de Riemann se vuelven más cercanas al volumen real.

TEC En Visual 6.2A se muestra una animación de la figura 5.



a) Mediante 5 discos, $V \approx 4.2726$ b) Mediante 10 discos, $V \approx 4.2097$ c) Mediante 20 discos, $V \approx 4.1940$

FIGURA 5 Aproximación al volumen de una esfera con radio 1

V EJEMPLO 2 Determine el volumen de un sólido que se obtiene al girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ respecto al eje x desde 0 hasta 1. Ilustre la definición de volumen dibujando un cilindro de aproximación representativo.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 6a). Si giramos alrededor del eje x, obtenemos el sólido que se ilustra en la figura 6b). Cuando cortamos a través de punto x obtenemos un disco de radio $\sqrt{x}$. El área de esta sección transversal es

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

y el volumen del cilindro de aproximación (un disco con espesor Δx) es

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

El sólido está entre $x = 0$ y $x = 1$, de modo que el volumen es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

¿Obtuvimos una respuesta razonable en el ejemplo 2? Como verificación de nuestro trabajo, remplacemos la región dada por un cuadrado de base [0, 1] y altura 1. Si giramos el cuadrado, obtendremos un cilindro de radio 1, altura 1 y volumen $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Ya calculamos que el sólido dado tiene la mitad de este volumen, así que esto parece casi correcto.

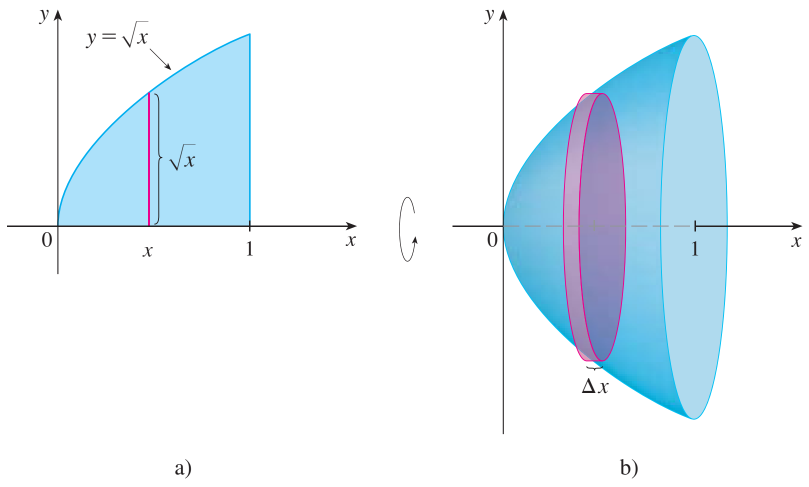


FIGURA 6

V EJEMPLO 3 Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$ respecto al eje y.

SOLUCIÓN La región se ilustra en la figura 7a) y el sólido resultante se muestrea en la figura 7b). Puesto que la región gira alrededor del eje y, tiene sentido "rebanar" el sólido en forma perpendicular al eje y, y, por tanto, integrar respecto a y. Si cortamos a una altura y, obtenemos un disco de radio x, donde $x = \sqrt[3]{y}$, de manera que el área de una sección transversal a través de y es

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

y el volumen del cilindro de aproximación ilustrado en la figura 7b) es

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Puesto que el sólido está entre $y = 0$ y $y = 8$, su volumen es

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\Big[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\Big]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

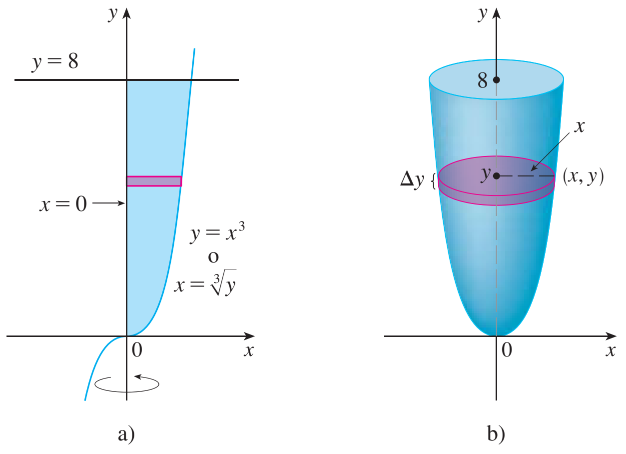


FIGURA 7

EJEMPLO 4 La región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Las curvas $y = x$ y $y = x^2$ se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 1). La región entre ellas, el sólido de revolución y una sección transversal perpendicular al eje x se muestran en la figura 8. Una sección transversal en el plano P_x tiene la forma de una *rondana* (un aro anular) de radio interior x^2 y radio exterior x, de modo que determinamos el área de la sección transversal restando el área del círculo interno del área del círculo externo:

TEC Visual 6.2B muestra cómo se forman los sólidos de revolución.

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Por tanto, tenemos

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

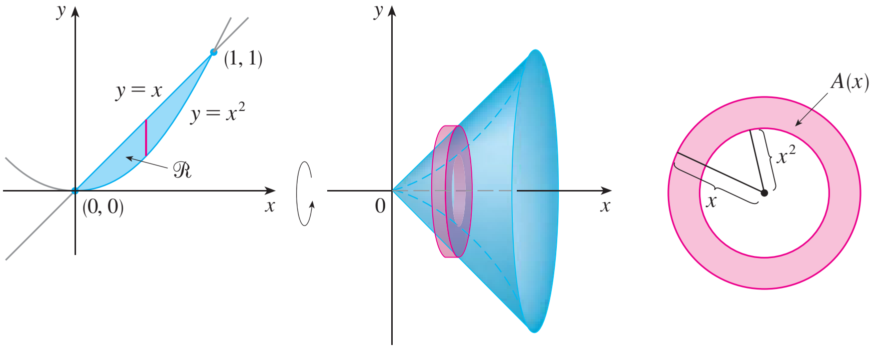


FIGURA 8 a) b) c)

EJEMPLO 5 Calcule el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN El sólido y la sección transversal se muestran en la figura 9. Otra vez, la sección transversal es una rondana, pero ahora el radio interior es $2 - x$, y el radio externo es $2 - x^2$.

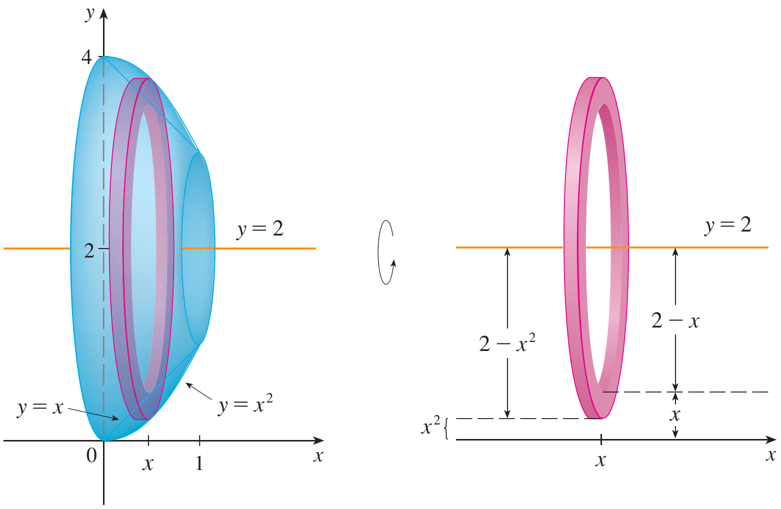


FIGURA 9

El área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

y el volumen de S es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\,\frac{x^3}{3} + 4\,\frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{8\pi}{15}$$

Los sólidos de los ejemplos 1 a 5 reciben el nombre de **sólidos de revolución** porque se generan haciendo girar una región alrededor de una recta. En general, determinamos el volumen de un sólido de revolución usando la fórmula básica definiendo

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \quad \text{o bien} \quad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

y calculamos el área de la sección transversal $A(x)$ o $A(y)$ mediante uno de los métodos siguientes:

- Si la sección transversal es un disco (como en los ejemplos 1 a 3) determinamos el radio del disco (en términos de x o y) y usamos

$$A = \pi(\text{radio})^2$$

- Si la sección transversal es una rondana (como en los ejemplos 4 y 5), determinamos el radio interior r_{in} y el radio exterior r_{ext} a partir de un dibujo (como en las figuras 8, 9 y 10) y calculamos el área de la rondana efectuando la diferencia entre el área del disco interno y el área del disco externo:

$$A = \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$

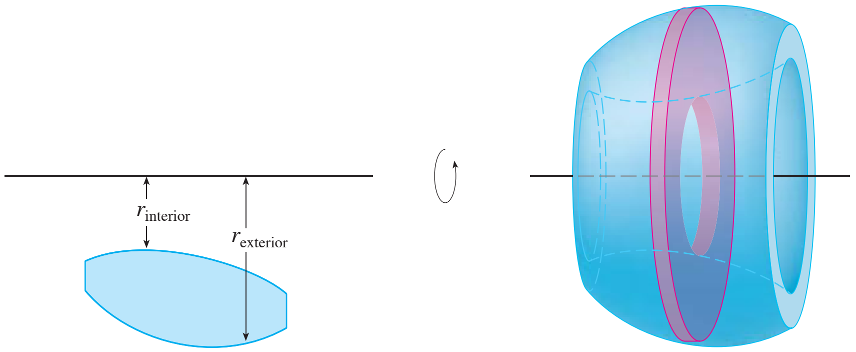


FIGURA 10

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 6 Calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $x = -1$.

SOLUCIÓN En la figura 11 se ilustra una sección transversal horizontal. Es una rondana con radio interior $1 + y$ y radio exterior $1 + \sqrt{y}$, por lo que el área de la sección transversal es

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2 \\ &= \pi(1 + \sqrt{y})^2 - \pi(1 + y)^2 \end{aligned}$$

El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[(1 + \sqrt{y})^2 - (1 + y)^2\right] dy \\ &= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi\left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

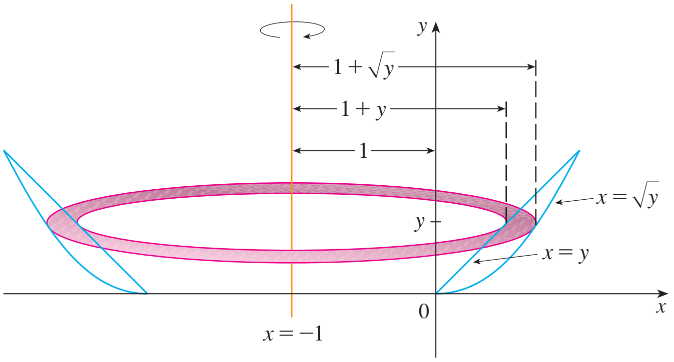


FIGURA 11

Ahora determinaremos los volúmenes de tres sólidos que *no* son sólidos de revolución.

EJEMPLO 7 En la figura 12 se muestra un sólido con una base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas, pero perpendiculares a la base, son triángulos equiláteros. Determine el volumen del sólido.

TEC En Visual 6.2C se muestra una animación de la figura 12.

SOLUCIÓN Consideremos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. El sólido, su base y una sección transversal representativa a una distancia x desde el origen se ilustran en la figura 13.

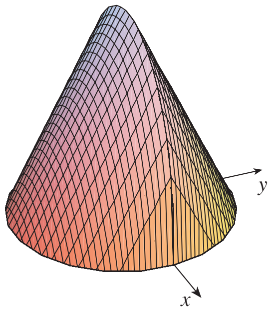
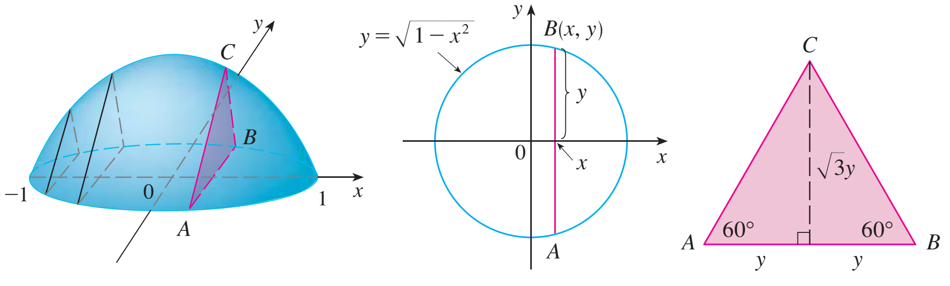


FIGURA 12
Imagen generada mediante computadora del sólido del ejemplo 7



a) El sólido b) Su base c) Una sección transversal

FIGURA 13

Puesto que B está sobre la circunferencia, tenemos $y = \sqrt{1 - x^2}$, y, de esa manera, la base del triángulo ABC es $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Dado que el triángulo es equilátero,

según la figura 13c), su altura es $\sqrt{3}\, y = \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2)$$

y el volumen del sólido es

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

V EJEMPLO 8 Calcule el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado L y cuya altura es h.

SOLUCIÓN Colocamos el origen O en el vértice de la pirámide y el eje x a lo largo de su eje central, como se ilustra en la figura 14. Cualquier plano P_x que pase por x y sea perpendicular al eje x corta a la pirámide en un cuadrado de lado s. Podemos expresar s en función de x observando por triángulos semejantes de la figura 15 que

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

y, de este modo, $s = Lx/h$. [Otro método es observar que la recta OP tiene pendiente $L/(2h)$ y, así, su ecuación es $y = Lx/(2h)$]. Por eso, el área de la sección transversal es

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

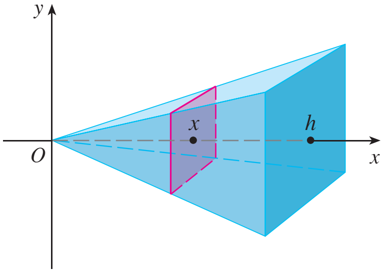


FIGURA 14

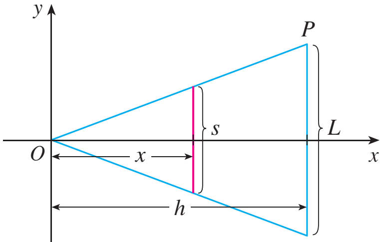


FIGURA 15

La pirámide se ubica entre $x = 0$ y $x = h$, por lo que su volumen es

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$

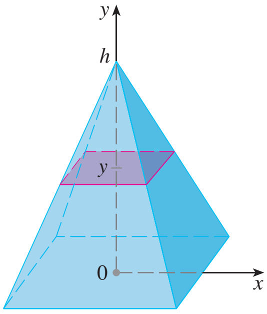


FIGURA 16

NOTA No era necesario colocar el vértice de la pirámide en el origen en el ejemplo 8. Se hizo así para que las ecuaciones resultaran más sencillas. Si en lugar de eso hubiéramos colocado el centro de la base en el origen y el vértice en el eje y positivo, como en la figura 16, habríamos obtenido la integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2h}{3}$$

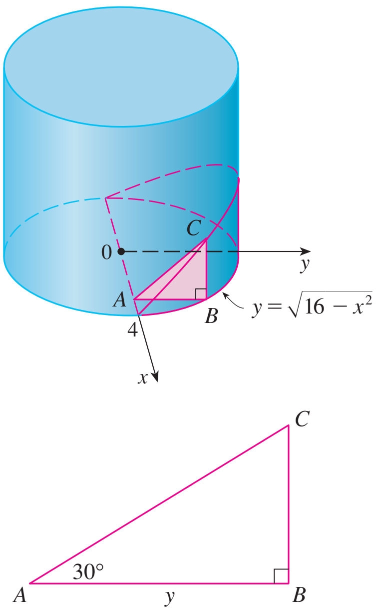


FIGURA 17

EJEMPLO 9 De un cilindro circular de radio 4, definido mediante dos planos, se corta una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro corta al primero en un ángulo de 30° a lo largo del diámetro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.

SOLUCIÓN Si hacemos coincidir el eje x con el diámetro en el lugar donde se encuentran los planos, entonces la base del sólido es un semicírculo delimitado por la ecuación $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Una sección transversal perpendicular al eje x a una distancia x del origen es un triángulo ABC, según se muestra en la figura 17, cuya base es $y = \sqrt{16 - x^2}$ y cuya altura es $|BC| = y \tan 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

y el volumen es

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{4} (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

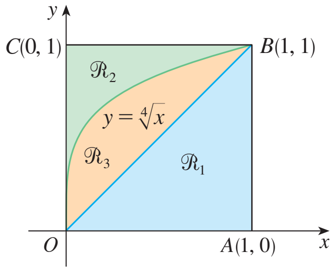
En el ejercicio 64 se proporciona otro método.

6.2 Ejercicios

1-18 Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Grafique la región, el sólido y un disco o arandela representativos.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$ alrededor del eje x
2. $y = 1 - x^2,\ y = 0;$ alrededor del eje x
3. $y = \sqrt{x - 1},\ y = 0,\ x = 5;$ alrededor del eje x
4. $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4;$ alrededor del eje x
5. $x = 2\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 9;$ alrededor del eje y
6. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0;$ alrededor del eje y
7. $y = x^3,\ y = x,\ x \geqslant 0;$ alrededor del eje x
8. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 5 - x^2;$ alrededor del eje x
9. $y^2 = x,\ x = 2y;$ alrededor del eje y
10. $y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 2,\ y = 0;$ alrededor del eje y
11. $y = x^2,\ x = y^2;$ alrededor de $y = 1$
12. $y = e^{-x},\ y = 1,\ x = 2;$ alrededor de $y = 2$
13. $y = 1 + \sec x,\ y = 3;$ alrededor de $y = 1$
14. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4;$ alrededor de $y = -1$
15. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1;$ alrededor de $x = 2$
16. $xy = 1,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$ alrededor de $x = -1$
17. $x = y^2,\ x = 1 - y^2;$ alrededor de $x = 3$
18. $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4;$ alrededor de $x = 1$

19-30 Refiérase a la figura y calcule el volumen generado al hacer girar cada una de las regiones dadas alrededor de la recta especificada.



19. $\mathscr{R}_1$ alrededor de OA
20. $\mathscr{R}_1$ alrededor de OC
21. $\mathscr{R}_1$ alrededor de AB
22. $\mathscr{R}_1$ alrededor de BC

23. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OA

24. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OC

25. $\mathcal{R}_2$ alrededor de AB

26. $\mathcal{R}_2$ alrededor de BC

27. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OA

28. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OC

29. $\mathcal{R}_3$ alrededor de AB

30. $\mathcal{R}_3$ alrededor de BC

31-34 Plantee una integral para el volumen del sólido obtenido al hacer girar cada una de las regiones delimitadas por las curvas dadas, alrededor de la recta especificada. Después utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación a cinco cifras decimales.

31. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$
a) Alrededor del eje x b) Alrededor de $y = -1$

32. $y = 0$, $y = \cos^2 x$, $2\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$
a) Alrededor del eje x b) Alrededor de $y = 1$

33. $x^2 + 4y^2 = 4$
a) Alrededor de $y = 2$ b) Alrededor de $x = 2$

34. $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$
a) Alrededor del eje x b) Alrededor del eje y

35-36 Utilice una gráfica para encontrar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego utilice su calculadora para estimar (en forma aproximada) el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región limitada por estas curvas.

35. $y = 2 + x^2 \cos x$, $y = x^4 + x + 1$

36. $y = 3 \operatorname{sen}(x^2)$, $y = e^{x/2} + e^{-2x}$

SAC **37-38** Mediante un sistema algebraico computarizado, calcule el volumen exacto del sólido obtenido al rotar la región delimitada por estas curvas alrededor de la recta especificada.

37. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $y = -1$

38. $y = x$, $y = xe^{1-x/2}$, alrededor de $y = 3$

39-42 Cada una de las siguientes integrales representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

39. $\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

40. $\pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)^2 \, dy$

41. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8) \, dy$

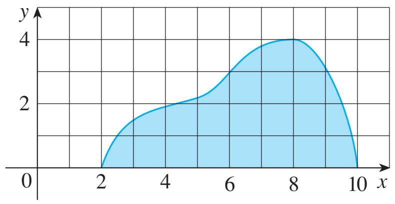
42. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2] \, dx$

43. El estudio de tomografía por medio de computadora proporciona vistas transversales separadas a distancias iguales de un órgano del cuerpo humano, las cuales dan información que, de no ser por este medio, sólo se obtendría mediante una intervención quirúrgica. Suponga que este estudio de tomografía en un hígado humano muestra secciones transversales separadas 1.5 cm. El hígado mide 15 cm de largo, y las áreas de las secciones transversales, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Aplique la regla del punto medio para estimar el volumen del hígado.

44. Se corta un tronco de árbol de 10 m de largo a intervalos de 1 m, y las áreas de las secciones transversales A (a una distancia x del extremo del tronco) se proporcionan en la tabla. Mediante la regla del punto medio $n = 5$, estime el volumen del tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

45. a) Si la región que se muestra en la figura se gira respecto al eje x para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar el volumen del sólido.



b) Estime el volumen si se gira la región respecto al eje y. Una vez más aplique la regla del punto medio con $n = 4$.

SAC **46.** a) Se obtiene un modelo para la forma de un huevo de un ave mediante el giro, respecto al eje x, de la región bajo la gráfica de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

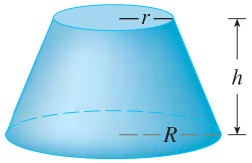
Utilice un sistema algebraico computarizado para encontrar el volumen de un huevo como éste.

b) Para un pato de cuello rojo, $a = -0.06$, $b = 0.04$, $c = 0.1$ y $d = 0.54$. Grafique f y encuentre el volumen de un huevo de esta especie.

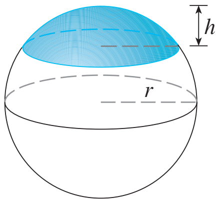
47-59 Calcule el volumen de cada uno de los sólidos S descritos.

47. Un cono circular recto cuya altura es h y el radio de la base es r.

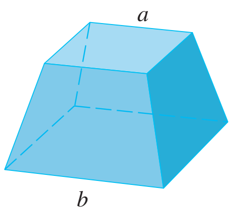
48. Un cono truncado circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r.



49. Un casquete de una esfera con radio r y altura h.



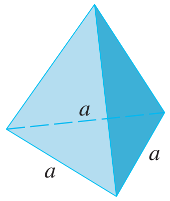
50. Una pirámide truncada con base cuadrada de lado b, cuadrado superior de lado a y altura h



¿Qué sucede si $a = b$? ¿Qué sucede si $a = 0$?

51. Una pirámide de altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.

52. Una pirámide de altura h y base en forma de triángulo equilátero con lado a (tetraedro).



53. Un tetraedro con tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas recíprocamente perpendiculares con distancias 3, 4 y 5 cm.

54. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son cuadradas.

55. La base de S es una región elíptica limitada por la curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales son perpendiculares al eje x y son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base.

56. La base de S es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

57. La base de S es la misma que en el ejercicio 56, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadradas.

58. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadradas.

59. La base de S es la misma que la del ejercicio 58, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos isósceles con altura igual a la base.

---

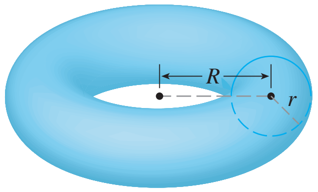
60. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son triángulos isósceles de altura h y el lado desigual en la base.

a) Plantee una integral para el volumen de S.

b) De acuerdo con la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen de S.

61. a) Plantee una integral para el volumen de un *toro* sólido (el sólido en forma de dona mostrado en la figura) de radio r y R.

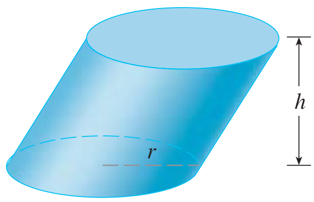
b) Mediante la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen del toro.



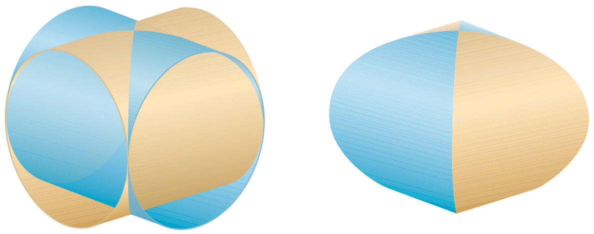
62. Resuelva el ejemplo 9 tomando secciones transversales paralelas a la línea de intersección de los dos planos.

63. a) El principio de Cavalieri establece que si una familia de planos paralelos da áreas iguales de secciones transversales para dos sólidos S_1 y S_2, entonces los volúmenes de S_1 y S_2 son iguales. Demuestre este principio.

b) Mediante el principio de Cavalieri determine el volumen del cilindro oblicuo que se muestra en la figura.



64. Determine el volumen común a dos cilindros circulares, ambos de radio r, si los ejes de los cilindros se cortan en ángulos rectos.



65. Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r, si el centro de cada esfera está sobre la superficie de la otra esfera.

66. Un tazón tiene la forma de un hemisferio con diámetro igual a 30 cm. Una pesada pelota de 10 cm de diámetro se coloca dentro del tazón, y se vierte agua en éste hasta que alcanza una altura de h centímetros. Calcule el volumen de agua que hay en el recipiente.

67. Se abre un agujero de radio r en un cilindro de radio $R > r$ en ángulos rectos al eje del cilindro. Plantee una integral, pero no la evalúe, para determinar el volumen cortado.

68. Un agujero de radio r se taladra en el centro de una esfera de radio $R > r$. Calcule el volumen de la parte restante de la esfera.

69. Algunos de los iniciadores del cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles

de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Stereometria doliorum* en 1615, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de los barriles). A menudo se aproximan la forma de sus lados mediante parábolas.

a) Se genera un barril de altura h y radio máximo R al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leqslant x \leqslant h/2$, donde c es una constante positiva. Demuestre que el radio de cada extremo del barril es $r = R - d$, donde $d = ch^2/4$.

b) Demuestre que el volumen encerrado por el barril es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

70. Suponga que una región $\mathcal{R}$ tiene un área A que se localiza por arriba del eje x. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de volumen V_1. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $y = -k$, (donde k es un número positivo), genera un sólido de volumen V_2. Exprese V_2 en función de V_1, k y A.

6.3 Volúmenes mediante cascarones cilíndricos

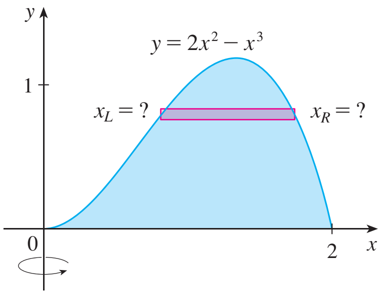


FIGURA 1

Algunos problemas relacionados con volúmenes son muy difíciles de manejar con los métodos de las secciones anteriores. Por ejemplo, consideremos el problema de determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$ alrededor del eje y. (Véase la figura 1). Si cortamos en forma perpendicular al eje y, obtendremos una rondana. Pero para calcular los radios interior y exterior de la rondana, tenemos que resolver la ecuación cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para encontrar x en función de y, y esto no es fácil.

Por fortuna, hay un sistema llamado **método de los cascarones cilíndricos**, que es más fácil de usar en tal caso. En la figura 2 se ilustra un cascarón cilíndrico de radio interior r_1, radio exterior r_2 y altura h. Su volumen V se calcula restando el volumen V_1 del cilindro interior del volumen V_2 que corresponde al cilindro exterior:

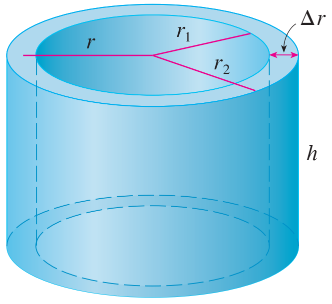


FIGURA 2

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Si hacemos $\Delta r = r_2 - r_1$ (el espesor del cascarón) y $r = \tfrac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (el radio promedio del cascarón) entonces esta fórmula del volumen de un cascarón cilíndrico se transforma en

1 $$V = 2\pi rh\,\Delta r$$

que puede recordarse como

$$V = [\text{circunferencia}][\text{altura}][\text{espesor}]$$

Ahora, sea S el sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y a la región limitada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geqslant 0$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, donde $b > a \geqslant 0$. (Véase la figura 3.)

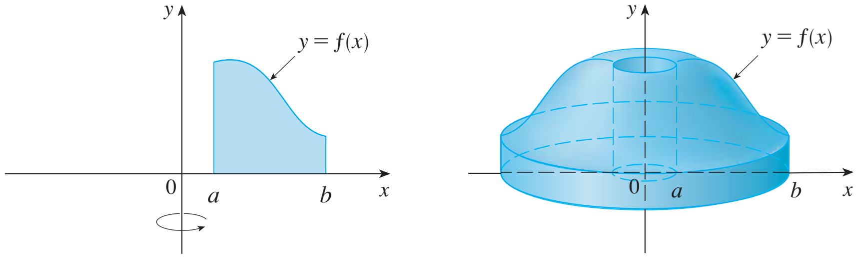


FIGURA 3

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual anchura Δx y sea $\bar{x}_i$, el punto medio del i-ésimo subintervalo. Si el rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\bar{x}_i)$ se hace girar alrededor del eje y, entonces el resultado es un cascarón cilíndrico cuyo radio promedio es $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$ y espesor Δx (véase la figura 4), de modo que, por la fórmula 1, su volumen es

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

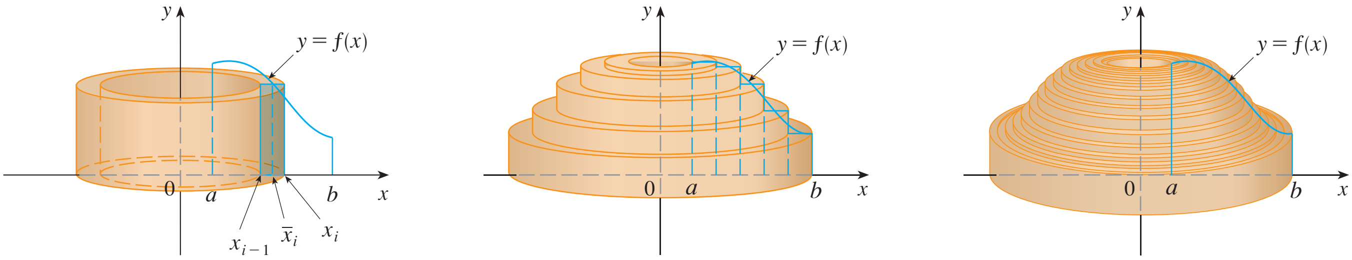


FIGURA 4

Por tanto, un volumen aproximado V de S se obtiene mediante la suma de los volúmenes de estos cascarones:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Esta aproximación mejora cuando $n \to \infty$. Pero, de acuerdo con la definición de integral, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Así, lo siguiente parece plausible:

2 El volumen del sólido de la figura 3, que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b, es

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \qquad \text{donde } 0 \leq a < b$$

El argumento de usar cascarones cilíndricos hace que la fórmula 2 parezca razonable, pero posteriormente podremos comprobarlo (véase el ejercicio 67 de la sección 7.1).

La mejor manera de recordar la fórmula 2 es pensar en el cascarón representativo, cortado y aplanado como en la figura 5, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y espesor Δx o dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferencia}} \quad \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \quad \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

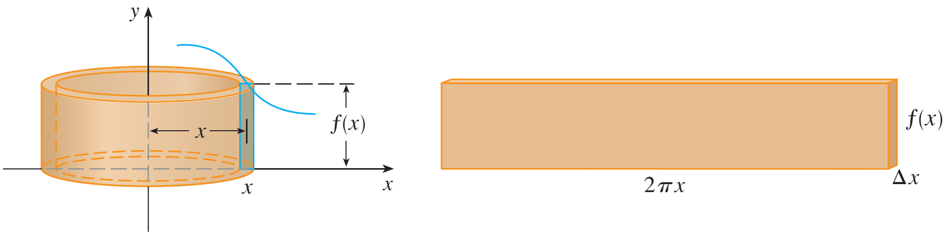


FIGURA 5

Este tipo de razonamiento es útil en otras situaciones, como cuando hacemos girar alrededor de rectas distintas del eje y.

EJEMPLO 1 Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$.

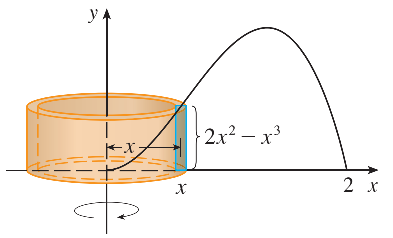


FIGURA 6

SOLUCIÓN En el dibujo de la figura 6, podemos ver que un cascarón representativo tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. También, según el método del cascaron, el volumen es

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Puede verificarse que el método del cascarón cilíndrico proporciona la misma respuesta que las "rebanadas".

En la figura 7 se observa una imagen generada mediante computadora del sólido cuyo volumen se calcula en el ejemplo 1.

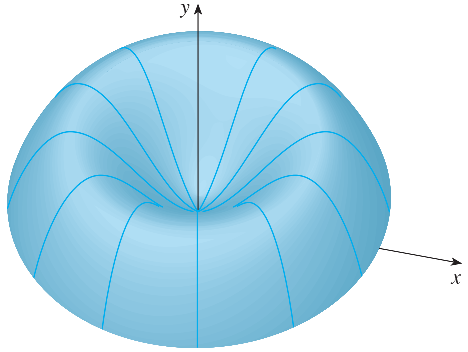


FIGURA 7

NOTA Al comparar la solución del ejemplo 1 con las observaciones del comienzo de esta sección, es claro que el método de los cascarones cilíndricos es mucho más sencillo que el método en el que se utilizan rondanas para este problema. No es necesario encontrar las coordenadas del máximo local y no tiene que resolverse la ecuación de la curva, ni dar x en función de y. Sin embargo, en otros ejemplos, pueden ser más sencillos los métodos de la sección anterior.

V EJEMPLO 2 Calcule el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje y la región entre $y = x$ y $y = x^2$.

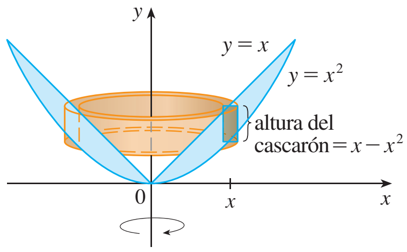


FIGURA 8

SOLUCIÓN La región y un cascarón representativo se ilustran en la figura 8. El cascarón tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $x - x^2$. Así que el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

Como se muestra en el ejemplo siguiente, el método del cascarón cilíndrico funciona muy bien si hace girar alrededor del eje x. Simplemente dibujamos un diagrama para identificar el radio y la altura del cascarón.

V EJEMPLO 3 Mediante un cascarón cilíndrico calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ desde 0 hasta 1.

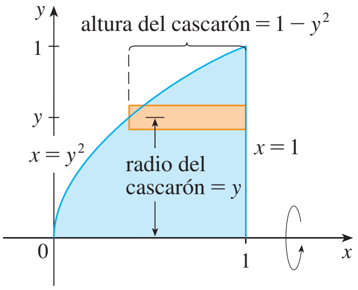


FIGURA 9

SOLUCIÓN Este problema se resolvió usando discos en el ejemplo 2 de la sección 6.2. Para usar cascarones, llamemos a la curva $y = \sqrt{x}$ (en la figura en este ejemplo) como $x = y^2$ en la figura 9. Por lo que toca a la rotación alrededor del eje x, un cascarón representativo tiene radio y, circunferencia $2\pi y$ y altura $1 - y^2$. Así, el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\, dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

En este problema, el método del disco fue más simple.

V EJEMPLO 4 Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 2$ la región limitada por $y = x - x^2$ y $y = 0$.

SOLUCIÓN En la figura 10 se ilustra la región y un cascaron cilíndrico formado por la rotación alrededor de la recta $x = 2$. El radio es $2 - x$, circunferencia $2\pi(2 - x)$ y altura $x - x^2$.

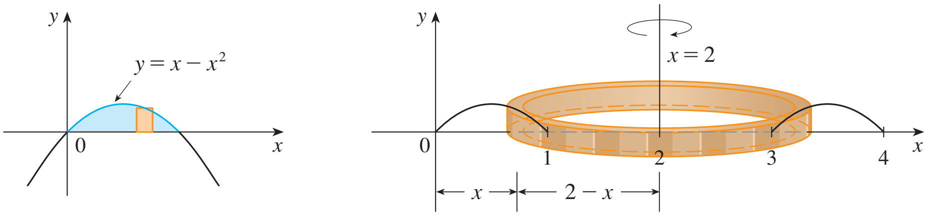


FIGURA 10

El volumen del sólido dado es

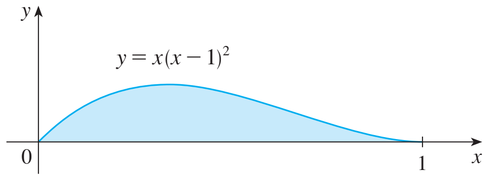
$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$$

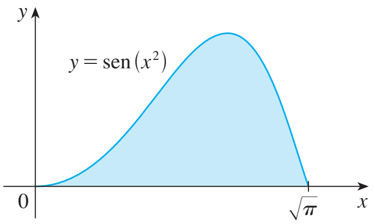
$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.3 Ejercicios

1. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se ilustra en la figura. Explique por qué es inconveniente usar los cortes por rebanadas para determinar el volumen V de S. Dibuje un cascarón representativo de aproximación. ¿Cuáles son la circunferencia y la altura? Mediante cascarones encuentre V.



2. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se ilustra en la figura. Dibuje un cascarón cilíndrico representativo y determine su circunferencia y altura. Mediante cascarones calcule el volumen de S. ¿Cree usted que este método es mejor que el de las rebanadas? Explique.



Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

volumen que se genera al hacer girar alrededor del eje y, cada una de las regiones definidas por las curvas dadas.

3. $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 1$

4. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 4x - x^2, \quad y = x$

7. $y = x^2, \quad y = 6x - 2x^2$

8. Sea V el volumen del sólido que se obtiene cuando la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje y. Calcule V cortando rebanadas y formando cascarones cilíndricos. En ambos casos, elabore un diagrama para explicar su método.

9-14 Mediante el método de los cascarones cilíndricos determine el volumen de cada uno de los siguientes sólidos que se obtienen al hacer girar alrededor del eje x la región que delimitan las curvas dadas.

9. $xy = 1, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 3$

10. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 2$

11. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3, \quad x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2, \quad x = 2$

14. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

15-20 Mediante el método de los cascarones cilíndricos determine el volumen generado cuando gira cada una de las siguientes regiones que definen las curvas dadas, alrededor del eje especificado.

15. $y = x^4, \; y = 0, \; x = 1;$ alrededor $x = 2$

16. $y = \sqrt{x}, \; y = 0, \; x = 1;$ alrededor $x = -1$

17. $y = 4x - x^2, \; y = 3;$ alrededor $x = 1$

18. $y = x^2, \; y = 2 - x^2;$ alrededor $x = 1$

19. $y = x^3, \; y = 0, \; x = 1;$ alrededor $y = 1$

20. $x = y^2 + 1, \; x = 2;$ alrededor $y = -2$

21-26

a) Plantee una integral para el volumen del sólido que se genera al hacer rotar la región que definen las curvas dadas alrededor del eje especificado.

b) Utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación de cinco decimales.

21. $y = xe^{-x}, \; y = 0, \; x = 2;$ alrededor del eje y

22. $y = \tan x, \; y = 0, \; x = \pi/4;$ alrededor de $x = \pi/2$

23. $y = \cos^4 x, \; y = -\cos^4 x, \; -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2;$
alrededor de $x = \pi$

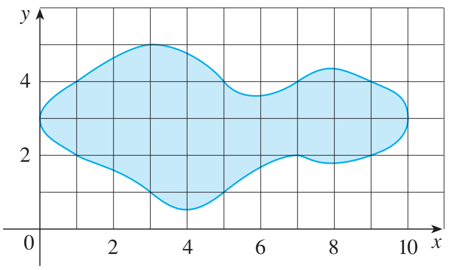
24. $y = x, \; y = 2x/(1 + x^3);$ alrededor de $x = -1$

25. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}, \; 0 \leqslant y \leqslant \pi, \; x = 0;$ alrededor de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7, \; x = 4;$ alrededor de $y = 5$

27. Aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen obtenido cuando la región bajo la curva $y = \sqrt{1 + x^3}, 0 \leqslant x \leqslant 1$, gira alrededor del eje y.

28. Si la región que se ilustra en la figura gira alrededor del eje y para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen del sólido.



29-32 Cada una de las siguientes integrales representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

29. $\int_0^3 2\pi x^5 \, dx$

30. $2\pi \int_0^2 \frac{y}{1 + y^2} \, dy$

31. $\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2) \, dy$

32. $\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \operatorname{sen} x) \, dx$

33-34 Por medio de una gráfica, estime las coordenadas x de los puntos donde se cortan las curvas dadas. Luego con esa información estime el volumen del sólido obtenido cuando giran alrededor del eje y la región delimitada por estas curvas.

33. $y = e^x, \quad y = \sqrt{x} + 1$

34. $y = x^3 - x + 1, \quad y = -x^4 + 4x - 1$

SAC **35-36** Use un sistema algebraico computarizado para calcular el volumen exacto del sólido obtenido al girar la región que definen las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

35. $y = \operatorname{sen}^2 x, \; y = \operatorname{sen}^4 x, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $x = \pi/2$

36. $y = x^3 \operatorname{sen} x, \; y = 0, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $x = -1$

37-43 La región delimitada por las curvas dadas gira alrededor del eje especificado. Determine el volumen del sólido resultante, por medio de cualquier método.

37. $y = -x^2 + 6x - 8, \; y = 0;$ alrededor del eje y

38. $y = -x^2 + 6x - 8, \; y = 0;$ alrededor del eje x

39. $y^2 - x^2 = 1, \; y = 2;$ alrededor del eje x

40. $y^2 - x^2 = 1, \; y = 2;$ alrededor del eje y

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; alrededor del eje y

42. $x = (y - 3)^2$, $x = 4$; alrededor de $y = 1$

43. $x = (y - 1)^2$, $x - y = 1$; alrededor de $x = -1$

44. Sea T la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2), y sea V el volumen del sólido generado cuando T gira alrededor de la recta $x = a$, donde $a > 1$. Exprese a en términos de V.

45-47 Mediante cascarones cilíndricos, calcule el volumen del sólido.

45. Una esfera de radio r

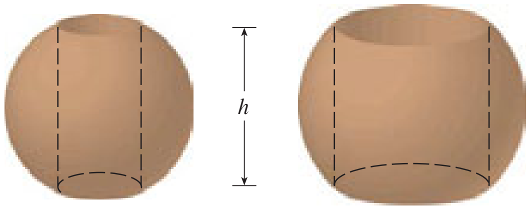
46. El toro sólido del ejercicio 67 de la sección 6.2

47. Un cono circular recto de altura h y base de radio r

46. Suponga que usted fabrica anillos para servilletas perforando agujeros de diferentes diámetros en dos bolas de madera (las cuales también tienen diámetros distintos). Usted descubre que ambos anillos para las servilletas tienen la misma altura h, como se muestra en la figura.

a) Intuya cuál anillo contiene más madera.

b) Verifique su conjetura: mediante cascarones cilíndricos calcule el volumen de un anillo para servilleta generado al perforar un agujero con radio r a través del centro de una esfera de radio R y exprese la respuesta en función de h.



6.4 Trabajo

El término *trabajo* se utiliza en el lenguaje cotidiano para expresar el esfuerzo que se requiere para ejecutar una tarea. En física, el trabajo tiene un significado técnico que depende de la idea de *fuerza*. Intuitivamente podemos pensar en una fuerza como algo que provoca un impulso o un jalón sobre un objeto; por ejemplo, el empuje horizontal de un libro hacia el otro lado de la mesa, o bien, el jalón hacia abajo que ejerce la gravedad de la Tierra sobre una pelota. En general, si un objeto se desplaza en línea recta con función posición $s(t)$, entonces la **fuerza** F sobre el objeto (en la misma dirección) está dada por la segunda ley de Newton del movimiento como el producto de su masa m por su aceleración, es decir:

1
$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

En el sistema métrico SI, la masa se mide en kilogramos (kg), el desplazamiento en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en newtons ($\text{N} = \text{kg·m/s}^2$). Así, una fuerza de 1 N que actúa sobre una masa de 1kg produce una aceleración de m/s^2. En el sistema usual de Estados Unidos, la unidad fundamental que se ha elegido como la unidad de fuerza es la libra.

En el caso de aceleración constante, la fuerza F también es constante, y el trabajo realizado esta definido como el producto de la fuerza F por la distancia d que el objeto recorre:

2
$$W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Si F se mide en newtons y d en metros, entonces la unidad de W es un newton-metro, llamada joule (J). Si F se mide en libras y d en pies, entonces la unidad de W es libra-pie (lb-pie), que es de casi 1.36 J.

V EJEMPLO 1

a) ¿Qué tanto trabajo se realiza al levantar un libro de 1.2 kg desde el suelo y colocarlo en un escritorio que tiene 0.7 m de altura? Utilice el hecho de que la aceleración debida a la gravedad es $g = 9.8\,\text{m/s}^2$.

b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al levantar desde el suelo un peso de 20 lb a una altura de 6 pies?

SOLUCIÓN

a) La fuerza ejercida es igual y opuesta a la que ejerce la gravedad, de modo que con la ecuación 1 se obtiene

$$F = mg = (1.2)(9.8) = 11.76\,\text{N}$$